نام آزمون: هندسه

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۵\end{vmatrix}$ دو سر یک قطر از دایره‌ای به مرکز O هستند. OC شعاعی از دایره است که امتداد آن از مبدأ مختصات می‌گذرد. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات تا نقطهٔ C به‌صورت $\sqrt{۲}(\sqrt{a}-b)$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (a و b اعداد طبیعی هستند.)

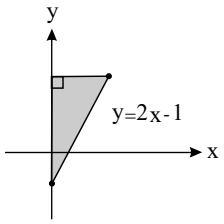
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۷

۲ - مطابق شکل وتر مثلث به معادلهٔ $y=۲x-۱$، با شرط $۰ \le x \le ۳$ مفروض است. اگر مثلث را حول محور yها دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟



(۱) ۱۲π

(۲) ۱۵π

(۳) ۱۸π

(۴) ۲۱π

۳ - در یک بیضی افقی به مرکز $\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$، طول قطر کوچک ۶ و فاصلهٔ کانونی برابر ۸ می‌باشد. مختصات یکی از دو سر قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

(۱) $(۲,۴)$

(۲) $(-۴,۴)$

(۳) $(-۲,۳)$

(۴) $(-۲,۴)$

۴ - وضعیت نقاط $A\begin{vmatrix}۵\\-۱\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}۲\\۱\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۴\\-۲\end{vmatrix}$ نسبت به دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$، به‌ترتیب کدام است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

(۱) روی دایره، درون دایره، بیرون دایره

(۲) درون دایره، بیرون دایره، روی دایره

(۳) بیرون دایره، درون دایره، روی دایره

(۴) روی دایره، بیرون دایره، درون دایره

۵ - دایره‌ای به مرکز $O\left|\begin{matrix}\circ\\ ۲\end{matrix}\right.$ و مماس بر نیم‌ساز ربع دوم، از محور عرض‌ها، پاره‌خطی با کدام طول را جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۲

۴) $۲\sqrt{۲}$

۶ - مثلث متساوی‌الساقین با ساق ۵ و قاعدهٔ ۸ را حول قاعده دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه‌قدر است؟

۱) ۱۸π

۲) ۲۴π

۳) ۲۷π

۴) ۳۶π

۷ - به‌ازای کدام مقدار a، دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y+a=\circ$ بر خط به معادلهٔ $۴x-۳y=۵$ مماس است؟

۱) -۳

۲) -۴

۳) ۳

۴) ۴

۸ - طول وتری که خط $y=x-۱$ روی دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=\circ$ جدا می‌کند، چه‌قدر است؟

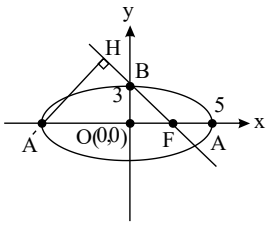
۱) $\sqrt{۷}$

۲) $۲\sqrt{۷}$

۳) $\sqrt{۵}$

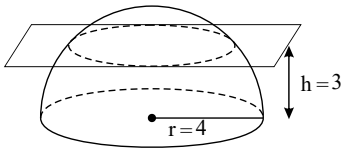
۴) $۲\sqrt{۵}$

۹ - در بیضی شکل زیر طول $A'H$ چه‌قدر است؟



۱) ۳٫۲
۲) ۳٫۴
۳) ۵٫۲
۴) ۵٫۴

۱۰ - مطابق شکل، یک نیم‌کره به شعاع $r = ۴$ را با صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعده و به فاصلهٔ $h = ۳$ از آن قطع می‌کنیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟



۱) ۷π
۲) π
۳) $\frac{۱۶\pi}{۹}$
۴) ۱۲π

۱۱ - چندمورد از گزاره‌های زیر درست‌اند؟

الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی است.

ج) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، حاصل یک سهمی است.

د) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل هذلولی است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۲ - مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول وتر $۳\sqrt{۲}$ را حول وترش دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۲\pi}$
۲) $\frac{۹}{۴}\sqrt{۲\pi}$
۳) $\frac{۹}{۲}\sqrt{۲\pi}$
۴) $۱۸\sqrt{۲\pi}$

۱۳ - طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصلهٔ یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

① $\frac{۱}{۳}$

② $\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۱}{۴}$

④ $\frac{۲}{۳}$

۱۴ - پاره‌خط $AA' = \sqrt{۵}$ قطر بزرگ یک بیضی با فاصلهٔ کانونی ۲ است. خطوط مماس بر بیضی در دو سر قطر کوچک آن، دایره‌ای به مرکز بیضی و قطر AA' را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی‌ای که این چهار نقطه رأس‌های آن هستند، کدام است؟

① ۲

② ۴

③ ۱

④ ۰٫۵

۱۵ - فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰$ از نقطهٔ $A(-۱, ۷)$ چقدر است؟

① ۵

② ۹

③ ۴

④ ۱

۱۶ - معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن روی محور xها بوده و بر دو خط $y = -x$ و $y = ۳\sqrt{۲} - x$ مماس باشد، کدام است؟

① $(x - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۹}{۴}$

② $(x - \frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۹}{۴}$

③ $(x - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۳}{۴}$

④ $(x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۹}{۴}$

۱۷ - مراکز دایره‌هایی به معادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۲۵$ که از خط $۳y+۴x=۱$ وترهایی به‌طول ۸ جدا کند، بر روی کدام خط می‌توانند باشند؟

(۱) $۳y+۴x=۱۶$

(۲) $۳y+۴x=۱۵$

(۳) $۳y+۴x=-۱۳$

(۴) $۳y+۴x=-۱۲$

۱۸ - اگر مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $B(۳,۸)$ و $B'(۳,۲)$ و خروج از مرکز آن $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول قطر کانونی آن کدام است؟

(۱) $\frac{۹}{\sqrt{۵}}$

(۲) $\frac{۱۸\sqrt{۵}}{۵}$

(۳) $\frac{۹}{۵}$

(۴) $\frac{۸۱}{۵}$

۱۹ - معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۳ که در ربع اول در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور طول‌ها مماس باشد، کدام است؟

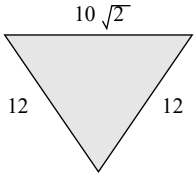
(۱) $x^۲+y^۲+۴x+۶y+۱=۰$

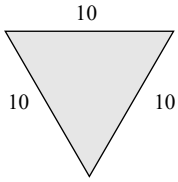
(۲) $x^۲+y^۲-۴x-۶y+۴=۰$

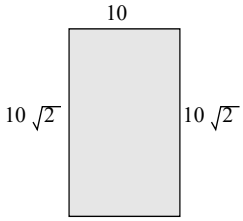
(۳) $x^۲+y^۲+۴x+۶y+۱۶=۰$

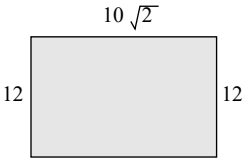
(۴) $x^۲+y^۲-۴x-۶y+۹=۰$

۲۰ - کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند سطح مقطع مکعبی به طول یال ۱۰ در تقاطع با یک صفحه باشد؟

① 

② 

③ 

④ 

۲۱ - دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ مفروض است. اگر این دایره روی خط $5x+12y=0$ وتری به طول ۱۰ ایجاد کند، آنگاه مقدار c کدام است؟

① ۱۶

② -16

③ $\sqrt{29}$

④ -32

۲۲ - در یک بیضی به کانون‌های $(2,-1)$ و $(2,7)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

① ۰٫۶

② ۰٫۶۴

③ ۰٫۷۵

④ ۰٫۸

۲۳ - خروج از مرکز یک بیضی که یک رأس و کانون‌های آن، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۴ - صفحه‌ای از سه قطر وجه مکعبی که متقاطع‌اند می‌گذرد. (قطرها در سه صفحهٔ متفاوت هستند.) مقطع حاصل کدام است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع

۲) مربع

۳) مثلث متساوی‌الساقین

۴) مستطیل

۲۵ - نقاط $F\begin{vmatrix}۳\\۰\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}-۳\\۰\end{vmatrix}$ کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطهٔ $M\begin{vmatrix}۳\\۲\end{vmatrix}$ روی این بیضی واقع باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}-۳}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۱۰}-۲}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۰}-۱}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۱۰}-\sqrt{۳}}{۳}$

۲۶ - چهار خط به معادلهٔ $x=۱$، $x=۶$، $y=-۱$ و $y=۳$ بر یک بیضی به کانون‌های F و F' مماس هستند. اگر P نقطه‌ای واقع بر این بیضی باشد، به‌طوری‌که P، F و F' رأس‌های یک مثلث باشند، محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۲۷ - معادلهٔ دایره‌ای که دو نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۳ \\ ۰ \end{vmatrix}$ دو سر قطری از آن هستند، کدام است؟

(۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$

(۲) $x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y = ۰$

(۳) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y = -۳$

(۴) $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$

۲۸ - در یک بیضی، قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۳}$

(۲) $\frac{۲}{۳}$

(۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

(۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۲۹ - صفحهٔ $P_۱$ کره‌ای به شعاع ۵ واحد را به گونه‌ای قطع می‌کند که سطح مقطع حاصل حداکثر مساحت را داشته باشد. اگر صفحهٔ $P_۲$ که موازی صفحهٔ $P_۱$ است، به فاصلهٔ ۳ واحد از $P_۱$، کره را قطع کند، مساحت سطح مقطع فوق چند واحد مربع است؟

(۱) ۸π

(۲) ۹π

(۳) ۱۶π

(۴) ۱۸π

۳۰ - چه نقاطی در نابرابری $(۲x - y)^۲ + (۲y + x)^۲ \leq x^۲ + y^۲ + ۱۶$ صدق می‌کنند؟

(۱) نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۴

(۲) نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲

(۳) نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $۲\sqrt{۲}$

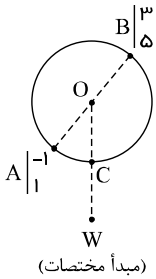
(۴) نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $۴\sqrt{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:

برای پیدا کردن فاصلهٔ W تا C، باید شعاع دایره (OC) را محاسبه و از فاصلهٔ W تا O کم می‌کنیم:



$$O\begin{vmatrix}\frac{-۱+۳}{۲}\\ \frac{۱+۵}{۲}\end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix}۱\\ ۳\end{vmatrix}$$

$$\text{فاصلهٔ } O \text{ تا } W \text{ (مبدأ مختصات)} = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

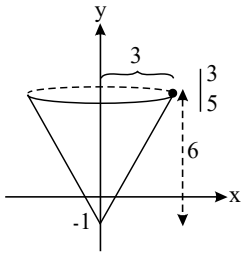
$$AB = \text{قطر دایره} = \sqrt{(-۱-۳)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow R = ۲\sqrt{۲}$$

پس جواب مسئله برابر است با:

$$CW = OW - OC \Rightarrow \sqrt{۱۰} - ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲}(\sqrt{۵} - ۲)$$

در مقایسه با $\sqrt{۲}(\sqrt{a} - b)$ داریم $a = ۵$ و $b = ۲$ و لذا $a + b = ۷$.

۲ - گزینه ۳ از دوران مثلث داده‌شده حول محور yها یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۶ حاصل می‌شود. می‌دانیم حجم مخروط برابر $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است.



$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۶ = ۱۸\pi$$

۳ - گزینه ۴

$$۲b = ۶ \longrightarrow b = ۳ \quad \text{و} \quad ۲c = ۸ \longrightarrow c = ۴$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \longrightarrow ۱۶ = a^۲ - ۹ \longrightarrow a^۲ = ۲۵ \longrightarrow a = ۵$$

در بیضی افقی با مرکز $W\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ مختصات دو سر قطر بزرگ $A\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix}$ است پس:

$$A\begin{vmatrix}۳+۵\\ ۴\end{vmatrix} \longrightarrow A\begin{vmatrix}۸\\ ۴\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad A'\begin{vmatrix}۳-۵\\ ۴\end{vmatrix} \longrightarrow A'\begin{vmatrix}-۲\\ ۴\end{vmatrix}$$

۴ - گزینه ۴ روش اول:

$$\begin{matrix} f'_x = ۰ \rightarrow ۲x - ۶ = ۰ \rightarrow x = ۳ \\ f'_y = ۰ \rightarrow ۲y + ۲ = ۰ \rightarrow y = -۱ \end{matrix} \longrightarrow C\begin{vmatrix}۳\\ -۱\end{vmatrix}$$

$$R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۳۶ + ۴ - ۲۴}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \longrightarrow R = ۲$$

حال با مقایسهٔ فاصلهٔ نقاط تا مرکز دایره با اندازهٔ شعاع دایره داریم:

$$AC = \sqrt{(۳-۵)^۲ + (-۱+۱)^۲} = ۲ = R \Rightarrow A \text{ روی دایره است.}$$

$BC = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۵} > R \Rightarrow$ B بیرون دایره است.

$DC = \sqrt{(۳-۴)^۲ + (-۱+۲)^۲}\sqrt{۲} < R \Rightarrow$ C درون دایره است.

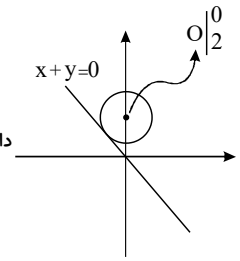
روش دوم:

کافی است مختصات نقاط داده‌شده را در معادلهٔ دایره صدق دهید اگر جواب مثبت باشد نقطه خارج دایره است اگر جواب صفر شد نقطه روی دایره است و اگر جواب منفی شد نقطه خارج دایره است.

۵ - گزینه ۴ برای پیدا کردن شعاع دایره کافی است فاصلهٔ نقطهٔ $O\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ را از خط به معادلهٔ $x+y=۰$ به‌دست آورید.

$$R = \frac{|۰+۲+۰|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

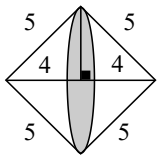
با توجه به شکل



دایره پاره‌خطی به طول $۲R = ۲\sqrt{۲}$ روی محور عرض‌ها جدا می‌کند.

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $AH = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۶ - گزینه ۲ حجم حاصل دو تا مخروط در قاعده مشترک است. شعاع قاعدهٔ مخروط‌ها برابر با ارتفاع مثلث: $r = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳$ و ارتفاع هرکدام ۴ است. پس داریم:



$$V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۴ = ۲۴\pi$$

توجه کنید حجم مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به‌دست می‌آید.

۷ - گزینه ۲

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+a=۰ \rightarrow \begin{cases} f'_x = ۰ \rightarrow ۲x+۲=۰ \rightarrow x=-۱ \\ f'_y = ۰ \rightarrow ۲y-۴=۰ \rightarrow y=۲ \end{cases} \rightarrow C\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.$$

$$R^۲ = \frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴} = \frac{۴+۱۶-۴a}{۴} = \frac{۲۰-۴a}{۴} = ۵-a \rightarrow R = \sqrt{۵-\alpha}$$

چون خط $۴x-۳y-۵=۰$ بر دایره مماس است پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس، برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|-۴-۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \rightarrow \sqrt{۵-\alpha} = ۳ \rightarrow ۵-a = ۹ \rightarrow a = -۴$$

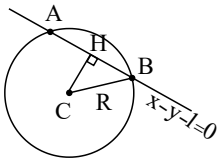
توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $AH = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۸ - گزینه ۲ مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} f'_x = ۰ \rightarrow ۲x-۴=۰ \rightarrow x=۲ \\ f'_y = ۰ \rightarrow ۲y+۲=۰ \rightarrow y=-۱ \end{matrix} \rightarrow C\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$R^۲ = \frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴} = \frac{۱۶+۴+۱۶}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \rightarrow R = ۳$$

CH فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $x-y-۱=۰$ $CH = \frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$



فیثاغورث : $R^۲ = (CH)^۲ + (BH)^۲ \to ۹ = ۲ + (BH)^۲ \to (BH)^۲ = ۷ \to BH = \sqrt{۷} \to AB = ۲BH = ۲\sqrt{۷}$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ از رابطهٔ $AH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۹ - گزینه ۴ با توجه به شکل $a = ۵$ و $b = ۳$ است.

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \to c = ۴$$

$$\begin{cases} B\left|\begin{matrix}۰\\ ۳\end{matrix}\right. \\ F\left|\begin{matrix}۴\\ ۰\end{matrix}\right. \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط } BF} \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} \to \frac{y - ۳}{x} = \frac{۳ - ۰}{۰ - ۴} = -\frac{۳}{۴}$$

$$\to ۴y - ۱۲ = -۳x \to ۳x + ۴y - ۱۲ = ۰$$

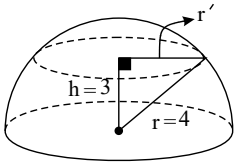
اکنون باید فاصلهٔ نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۵\\ ۰\end{matrix}\right.$ را از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y - ۱۲ = ۰$ حساب کنیم.

$$AH = \frac{|-۱۵ + ۰ - ۱۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۲۷}{۵} = ۵٫۴$$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ از رابطهٔ $AH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۱۰ - گزینه ۱

مطابق شکل، طبق قضیهٔ فیثاغورث، به‌راحتی می‌توانیم شعاع دایرهٔ مقطع را حساب کنیم.



$$r' = \sqrt{۴^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۷}$$

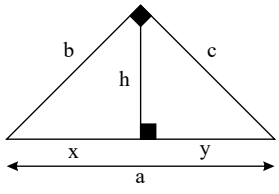
پس مساحت دایرهٔ حاصل برابر است با:

$$S = \pi r^۲ = ۷\pi$$

۱۱ - گزینه ۲ موارد «ب» و «د» غلط هستند.

۱۲ - گزینه ۳

اگر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع b و c حول وتر خود که (a) می‌باشد دوران کند دو مخروط هم‌قاعده و هم‌محور به حجم $V = \dfrac{\pi b^۲ c^۲}{۳a}$ ساخته می‌شود.



زیرا:

$$\text{دو مخروط هم‌قاعده } V = \frac{۱}{۳}\pi h^۲ x + \frac{۱}{۳}\pi h^۲ y = \frac{۱}{۳}\pi h^۲ (x + y)$$

$$\xrightarrow{x+y=a} V = \frac{۱}{۳}\pi h^۲ a \xrightarrow{h=\frac{bc}{a}} V = \frac{\pi}{۳} \times \frac{b^۲ c^۲}{a}$$

طبق اطلاعات صورت سؤال داریم: $a = ۳\sqrt{۲}$ و $b = c$ است.

$$\text{فیثاغورث : } a^۲ = b^۲ + b^۲ \Rightarrow ۹ \times ۲ = ۲b^۲ \Rightarrow b = ۳$$

$$V = \frac{\pi b^۲ c^۲}{۳a} = \frac{\pi \times ۹ \times ۹}{۳ \times ۳\sqrt{۲}} = \frac{۹\pi}{\sqrt{۲}} = ۹ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi$$

۱۳ - گزینه ۱

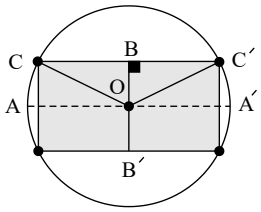
$$\text{قطرکوچک} = ۲b \longrightarrow ۲b = ۴\sqrt{۲} \longrightarrow b = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس} = a - c \longrightarrow a - c = ۲ \longrightarrow a = ۲ + c$$

$$\text{از طرفی : } c^۲ = a^۲ - b^۲ \longrightarrow c^۲ = (۲ + c)^۲ - ۸ \longrightarrow c^۲ = ۴ + c^۲ + ۴c - ۸ \longrightarrow ۴c = ۴ \longrightarrow c = ۱ \xrightarrow{a=۲+c} a = ۳$$

$$\text{پس : } e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴ - گزینه ۱



قطر دایره است، پس شعاع دایره برابر است با $\frac{AA'}{۲} = a$، بنابراین $OC = a$ و طول OB برابر نصف طول کوچک‌ترین قطر بیضی است، یعنی $AA' = ۲a$ $OB = b$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC داریم:

$$OC^۲ = OB^۲ + BC^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = \underbrace{a^۲ - b^۲}_{c^۲} \Rightarrow BC = c$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = BB' \times CC' \Rightarrow S = (۲b)(۲c) = ۴bc \quad (*)$$

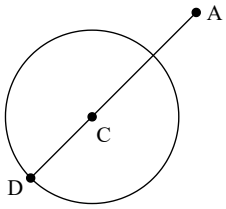
$$\text{طبق فرض : } \begin{cases} ۲a = \sqrt{۵} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{۵}}{۲} \\ ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} S = ۴(\frac{۱}{۲})(۱) = ۲$$

۱۵ - گزینه ۲ مرکز و شعاع دایره را معلوم می‌کنیم.

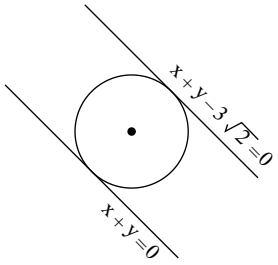
$$\begin{matrix} f'_x = ۰ \to ۲x - ۴ = ۰ \to x = ۲ \\ f'_y = ۰ \to ۲y - ۶ = ۰ \to y = ۳ \end{matrix} \longrightarrow C \left| \begin{matrix} ۲ : \alpha \\ ۳ : \beta \end{matrix} \right.$$

$$R^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - c = ۴ + ۹ + ۳ = ۱۶ \longrightarrow R = ۴$$



$$\longrightarrow AD = AC + R = \sqrt{(-۱ - ۲)^۲ + (۷ - ۳)^۲} + ۴ = \sqrt{۹ + ۱۶} + ۴ = ۹$$

۱۶ - گزینه ۴ شیب دو خط داده‌شده -۱ است یعنی دو خط داده‌شده باهم موازی هستند پس حتماً فاصلهٔ بین این دو خط، قطر دایره را می‌دهد.



$$\longrightarrow \text{قطر} = \frac{|۰ + ۳\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۳ \longrightarrow R = \frac{۳}{۲}$$

هندسه

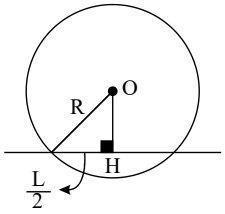
مرکز دایره $C \left| \begin{matrix} \alpha \\ ۰ \end{matrix} \right.$ است و اگر فاصلهٔ آن را از یکی از دو خط مماس بر دایره به‌دست آوریم برابر شعاع دایره است.

$$\begin{cases} C\left|\begin{matrix}\alpha\\ ۰\end{matrix}\right. \\ x+y=۰ \end{cases} \longrightarrow R=\frac{|\alpha+۰+۰|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|\alpha|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۲}\longrightarrow |\alpha|=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{\alpha>۰}\alpha=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases} C\left|\begin{matrix}\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right. \\ R=\frac{۳}{۲} \end{cases} \longrightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\longrightarrow (x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲+y^۲=\frac{۹}{۴}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ کمک می‌گیریم و برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۱۷ - گزینه ۱ با توجه به شکل فرضی می‌دانیم:



$$\rightarrow (OH)^۲+(\frac{L}{۲})^۲=R^۲\rightarrow (OH)^۲=۲۵-(۴)^۲=۹\rightarrow OH=۳$$

OH فاصلهٔ مرکز دایره از خط $۴x+۳y-۱=۰$ می‌باشد. پس فرمول فاصله را می‌نویسیم:

$$OH=\frac{|۴\alpha+۳\beta-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۳$$

$$|۳\beta+۴\alpha-۱|=۱۵\Rightarrow \begin{cases} ۳\beta+۴\alpha=۱۶\Rightarrow ۳y+۴x=۱۶ \\ ۳\beta+۴\alpha=-۱۴\Rightarrow ۳y+۴x=-۱۴ \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $۳y+۴x=۱۶$ مورد قبول است.

برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

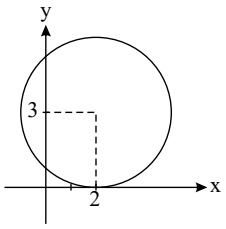
۱۸ - گزینه ۲ منظور از قطر کانونی، همان قطر بزرگ یعنی $۲a$ است.

$$B\left|\begin{matrix}۳\\ ۸\end{matrix}\right. \text{ و } B'\left|\begin{matrix}۳\\ ۲\end{matrix}\right. \longrightarrow BB'=۲b\longrightarrow ۲b=۶\longrightarrow b=۳$$

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}\longrightarrow \frac{۲}{۳}=\sqrt{۱-\frac{۹}{a^۲}}\longrightarrow \frac{۴}{۹}=۱-\frac{۹}{a^۲}\longrightarrow \frac{۹}{a^۲}=\frac{۵}{۹}$$

$$\longrightarrow a^۲=\frac{۸۱}{۵}\longrightarrow a=\frac{۹}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۹\sqrt{۵}}{۵}\longrightarrow ۲a=\frac{۱۸\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۹ - گزینه ۲ با توجه به اطلاعات مسأله، شکل را رسم می‌کنیم.



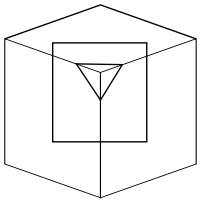
$$\longrightarrow C\left|\begin{matrix}۲:\alpha\\ ۳:\beta\end{matrix}\right. \quad , \quad R=۳$$

معادلهٔ دایره : $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\longrightarrow (x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۹$

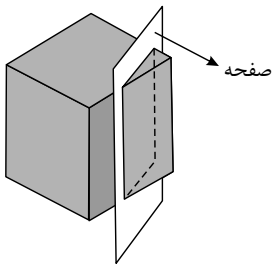
$$\longrightarrow x^۲+۴-۴x+y^۲-۶y=۰\longrightarrow x^۲+y^۲-۴x-۶y+۴=۰$$

هندسه

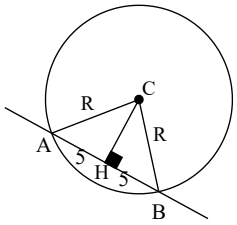
۲۰ - گزینه ۴ قطر هر سطح جانبی مکعب $۱۰\sqrt{۲}$ می‌باشد. اگر به‌صورت روبه‌رو صفحهٔ مورد نظر مکعب را قطع کند، سطح مقطع مثلثی خواهد بود که می‌تواند متساوی‌الاضلاع با ضلع حداکثر $۱۰\sqrt{۲}$ باشد و یا اینکه مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ حداکثر $۱۰\sqrt{۲}$ و ساق‌های کوچک‌تر از $۱۰\sqrt{۲}$ باشد.



اگر صفحهٔ عمود بر یکی از صفحات مکعب آن را قطع کند، سطح مقطع آن مستطیلی خواهد بود که یک ضلع آن ۱۰ و ضلع دیگر کوچک‌ترمساوی $۱۰\sqrt{۲}$ خواهد بود و مستطیل با ترکیب گزینهٔ «۴» تشکیل نخواهد شد.



۲۱ - گزینه ۲ شکل فرضی زیر را درنظر بگیرید.



$$\begin{cases} f'_x = ۰ \to ۲x - ۴ = ۰ \to x = ۲ \\ f'_y = ۰ \to ۲y + ۶ = ۰ \to y = -۳ \end{cases} \longrightarrow c \left| \begin{matrix} ۲ & : \alpha \\ -۳ & : \beta \end{matrix} \right.$$

اکنون فاصلهٔ مرکز دایره تا خط داده‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$CH = \frac{|۱۰ - ۳۶ + ۰|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

شعاع دایره را نیز به‌دست می‌آوریم.

$$R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۱۶ + ۳۶ - ۴c}{۴} = \frac{۵۲ - ۴c}{۴} = ۱۳ - c \longrightarrow R = \sqrt{۱۳ - c}$$

$$\overset{\triangle}{CBH} : R^۲ = (CH)^۲ + (BH)^۲ \longrightarrow ۱۳ - c = ۴ + ۲۵ \longrightarrow ۱۳ - c = ۲۹ \longrightarrow c = -۱۶$$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ از رابطهٔ $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

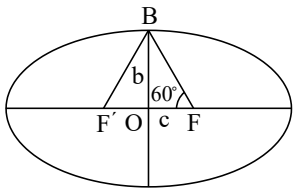
۲۲ - گزینه ۴ قطر کوچک یعنی $۲b$ برابر ۶ است پس $b = ۳$ است.

$$\begin{cases} F \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۷ \end{matrix} \right. \\ F' \left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right. \end{cases} \to FF' = ۲c \to ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = a^۲ - ۹ \to a^۲ = ۲۵ \to a = ۵$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۲۳ - گزینه ۲ در مثلث $\overset{\triangle}{OBF}$، زاویه $\hat{F} = ۶۰^\circ$ می‌باشد پس داریم:



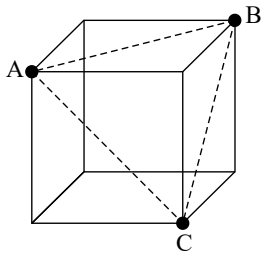
$$\to \tan ۶۰^\circ = \frac{OB}{OF} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \sqrt{۳}c$$

از طرفی در بیضی داریم $a^۲ = b^۲ + c^۲$ پس:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{b=\sqrt{۳}c} a^۲ = ۳c^۲ + c^۲ = ۴c^۲ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$

۲۴ - گزینه ۱

مقطع حاصل مثلث ABC می‌باشد که متساوی‌الاضلاع است.



۲۵ - گزینه ۳ مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر قطر بزرگ یعنی $۲a$ است.

$$MF + MF' = ۲a \Rightarrow \sqrt{(۳+۳)^۲ + (۲-۰)^۲} + \sqrt{(۳-۳)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲a$$

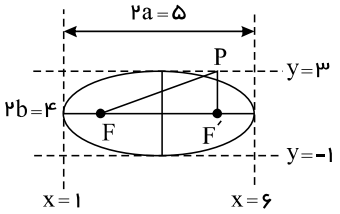
$$\Rightarrow \sqrt{۴۰} + ۲ = ۲a \Rightarrow ۲\sqrt{۱۰} + ۲ = ۲a \Rightarrow a = \sqrt{۱۰} + ۱$$

$$FF' = ۲c \Rightarrow ۶ = ۲c \Rightarrow c = ۳$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}+۱} \times \frac{\sqrt{۱۰}-۱}{\sqrt{۱۰}-۱} = \frac{۳(\sqrt{۱۰}-۱)}{۱۰-۱} = \frac{\sqrt{۱۰}-۱}{۳}$$

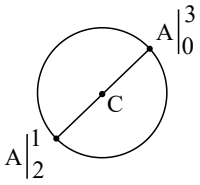
۲۶ - گزینه ۲

با توجه به شکل مقابل، در این بیضی $۲a = ۵$ و $۲b = ۴$، پس با توجه به اینکه $c^۲ = a^۲ - b^۲$ داریم $۲c = ۳$. از طرفی محیط مثلث FPF' برابر است با:



$$\underbrace{PF + PF'}_{۲a} + \underbrace{FF'}_{۲c} = ۵ + ۳ = ۸$$

۲۷ - گزینه ۳



$$\longrightarrow AB \text{ وسط } C \left| \begin{array}{l} \frac{۳+۱}{۲} = ۲ : \alpha \\ \frac{۰+۲}{۲} = ۱ : \beta \end{array} \right.$$

$$R = AC = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

معادلهٔ دایره : $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$

$$\rightarrow x^۲ + ۴ - ۴x + y^۲ + ۱ - ۲y = ۲ \rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y = -۳$$

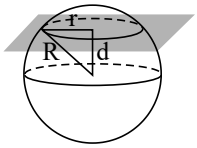
۲۸ - گزینه ۴

$$۲a = ۳(۲b) \longrightarrow a = ۳b$$

می‌دانیم : $e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{۹b^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۹}} = \sqrt{\frac{۸}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۲۹ ـ گزینه ۳

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از شکل برمی‌آید بین شعاع کره (R) و شعاع دایرهٔ کوچک (r) و فاصلهٔ دو صفحه (d) رابطهٔ فیثاغورس برقرار است.

$$R^۲ = d^۲ + r^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + r^۲ \Rightarrow r = ۴$$

پس مساحت سطح مقطع کوچک‌تر برابر است با:

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow S = ۱۶\pi$$

۳۰ ـ گزینه ۲

$$(۲x - y)^۲ + (۲y + x)^۲ \leq x^۲ + y^۲ + ۱۶ \rightarrow ۴x^۲ + y^۲ - ۴xy + ۴y^۲ + x^۲ + ۴xy \leq x^۲ + y^۲ + ۱۶$$

$$\rightarrow ۴x^۲ + ۴y^۲ \leq ۱۶ \rightarrow x^۲ + y^۲ \leq ۴ \rightarrow (x - ۰)^۲ + (y - ۰)^۲ \leq ۴$$

پس نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ در نابرابری بالا صدق می‌کنند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۴	۸ - ۲	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۱	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۱	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۳	۳۰ - ۲