نام آزمون: هندسه

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - کدام‌یک از نقاط زیر یکی از نقاط تقاطع دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x+۶y-۱۳=۰$ و $x^۲+y^۲+۶x-۲y-۷=۰$ است؟

① $(۱,۲)$

② $(-۱,۲)$

③ $(۱,-۲)$

④ $(-۱,-۲)$

۲ - دو خط $y=۳x-۱$ و $x-۲y+۳=۰$، قطرهای دایره‌ای هستند که از مبدا مختصات می‌گذرد. شعاع این دایره کدام است؟

① ۳

② $\sqrt{۳}$

③ ۵

④ $\sqrt{۵}$

۳ - معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مراکز $(۱,۰)$ و $(۰,-۱)$ و شعاع ۲ کدام است؟

① $y=x$

② $y=x+۲$

③ $y=-x$

④ $y=-x+۲$

۴ - دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ بر نیمساز ربع دوم و چهارم مماس است. قطر آن کدام است؟

① ۲

② $\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

④ $\sqrt{۲}$

۵ - مرکز دایره‌ای روی خط $y = x + ۱$ قرار دارد. اگر این دایره از نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, ۳)$ عبور کند، مرکز آن کدام نقطه است؟

① $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$

② $(۱, ۲)$

③ $(۲, ۳)$

④ $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$

۶ - مرکز دایره‌ای که از نقاط (۲و۱)، (۰و۰) و (۱و۲-) می‌گذرد، کدام نقطه است؟

① (۱و ۰٫۵)

② (۰٫۵و۱-)

③ (۱٫۵و ۰٫۵-)

④ (۰٫۵و۱)

۷ - دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

① مماس خارج

② مماس داخل

③ متقاطع

④ متخارج

۸ - هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-۲, ۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

① ۲

② $۲\sqrt{۲}$

③ ۳

④ $۳\sqrt{۲}$

۹ - دایره‌ای از نقطه $(-۱, ۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

① ۱۵

② ۱۰

③ ۱۲

④ ۸

۱۰ - به ازای کدام مقدار a، دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰$ بر خط به معادله‌ی $x + ۳y = ۰$ مماس است؟

① $\frac{۳}{۲}$

② $\frac{۵}{۲}$

③ ۲

④ ۵

۱۱ - دایره به مرکز (۰ و ۲) و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

① $۱, ۳$

② $۴, ۱$

③ $\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}$

④ $۲ + \sqrt{۲}, ۲ - \sqrt{۲}$

۱۲ - نقطه‌ی $(a, ۲a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه‌ی $(۲, ۱)$ و $(-۱, ۴)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

① ۳

② ۴

③ $۲\sqrt{۲}$

④ $۳\sqrt{۲}$

۱۳ - طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ و $C(۰, -۳)$ می‌گذرد کدام است؟

① $\sqrt{۳}$

② ۲

③ $\sqrt{۵}$

④ ۳

۱۴ - دو دایره به معادلات $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۱۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) مماس داخل

(۲) مماس خارج

(۳) متقاطع

(۴) متداخل

۱۵ - شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$، برابر کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$

(۲) $\sqrt{۳}$

(۳) $\sqrt{۵}$

(۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

۱۶ - بیشترین فاصله‌ی نقاط دایره‌ی $x^۲+y^۲=۴x+۲y$ از محور xها کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) $۱+\sqrt{۵}$

(۴) $\sqrt{۵}$

۱۷ - در بیضی با کانون‌های $F(\sqrt{۳},۱)$ و $F'(-\sqrt{۳},۱)$، اگر قطر کوچک برابر ۲ باشد، مختصات رئوس کانونی کدام است؟

(۱) $(۰,\pm۱)$

(۲) $(۰,\pm۲)$

(۳) $(\pm۱,۱)$

(۴) $(\pm۲,۱)$

۱۸ - تمام قائم‌های وارد بر منحنی $ax^۲ + y^۲ + cx + dy + ۲ = ۰$ از نقطه‌ی $(-۲, ۱)$ می‌گذرند. مقدار acd کدام است؟

(۱) -۴

(۲) ۴

(۳) -۸

(۴) ۸

۱۹ - وتر مشترک دو دایره‌ی $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۱۴ = ۰$ بر کدام‌یک از خطوط زیر عمود است؟

(۱) $۵x + ۷y = ۳$

(۲) $۷x + ۵y = ۱$

(۳) $۷x - ۵y = ۹$

(۴) $۵x - ۷y = -۱$

۲۰ - دایره‌ای بر هر دو محور مختصات و خط $y = x + ۲$ در ربع دوم مماس است. شعاع آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{۲} \pm ۱$

(۲) $\sqrt{۲}$

(۳) ۲

(۴) $۲ \pm \sqrt{۲}$

۲۱ - در بیضی با کانون‌های $F(۲, ۱)$ و $F'(-۴, ۱)$، اگر خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ باشد، بیشترین عرض این بیضی کدام است؟

(۱) $۳\sqrt{۳} - ۱$

(۲) $۳\sqrt{۳} + ۱$

(۳) $۳\sqrt{۳}$

(۴) $۶\sqrt{۳}$

۲۲ - محیط دایره‌ای که از سه نقطه‌ی $A(۱,۱)$ ، $B(۱,۷)$ و $C(۷,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

(۱) $۳\sqrt{۲\pi}$

(۲) $۶\sqrt{۲\pi}$

(۳) $۸\sqrt{۲\pi}$

(۴) $۱۲\sqrt{۲\pi}$

۲۳ - معادله دایره‌ای که از سه نقطه‌ی $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(-۳,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

(۱) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$

(۲) $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$

(۳) $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۰$

(۴) $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰$

۲۴ - دو سر یک قطر از دایره‌ای نقاط $(۲,-۱)$ و $(۰,۵)$ هستند. این دایره محور عرض‌ها را با کدام عرض منفی قطع می‌کند؟

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

۲۵ - وضعیت دو دایره‌ی $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۸$ و $x^۲+y^۲+۶x-۶y=۸۰$ نسبت به یکدیگر چگونه است؟

(۱) متقاطع

(۲) متخارج

(۳) مماس داخل

(۴) متداخل

۲۶ - دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $A(۴,۰)$ و $B(۰,۲)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $y=۳x-۴$ باشد، دارای چه مرکزی است؟

(۱) $(۲,۲)$

(۲) $(۰,-۴)$

(۳) $(۱,-۱)$

(۴) $(\frac{۴}{۳},۰)$

۲۷ - چه نقاطی در نابرابری $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۱۲ < ۰$ صدق می‌کند؟

(۱) نقاط درون دایره‌ای به مرکز $(۲,۳)$ و شعاع ۲

(۲) نقاط بیرون دایره‌ای به مرکز $(۲,۳)$ و شعاع ۱

(۳) نقاط درون دایره‌ای به مرکز $(۳,۲)$ و شعاع ۱

(۴) نقاط درون دایره‌ای به مرکز $(۲,۳)$ و شعاع ۱

۲۸ - مختصات مرکز دایره‌ای که از دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(۸,۰)$ بگذرد و بر خط $y = ۲$ مماس باشد کدام است؟

(۱) $(۵,-۱)$

(۲) $(۵,-\frac{۷}{۳})$

(۳) $(۵,-\frac{۴}{۳})$

(۴) $(۵,-\frac{۵}{۴})$

۲۹ - وتر مشترک دو دایره‌ی $(x+۳)^۲ + (y+۴)^۲ = ۲۵$ و $(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۷$ با کدام‌یک از خط‌های زیر موازی است؟

(۱) $y = \frac{-۵}{۷}x - \frac{۵}{۷}$

(۲) $y = \frac{۷}{۵}x + \frac{۷}{۵}$

(۳) $۷x = -۵y$

(۴) $y = ۵x + ۷$

۳۰ - اگر معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی $x^۲ + y^۲ + k'x + ۸y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۴x - ky = ۱۴$ به صورت $۵x + ۷y = -۷$ باشد، خط $y = kx + k'$ بر کدام یک از خط‌های زیر عمود است؟

(۱) $y = ۶x$

(۲) $y = -\frac{۱}{۶}x$

(۳) $۶y = x$

(۴) $۱۲y = -x$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ ابتدا معادله وتر مشترک این دو دایره را به دست می‌آوریم (جملات از درجه دوم را بین آنها حذف می‌کنیم)

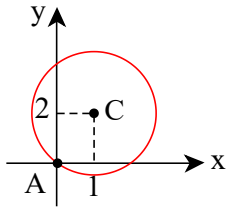
$$(x^۲+y^۲-۴x+۶y-۱۳)-(x^۲+y^۲+۶x-۲y-۷)=۰$$
$$\Rightarrow -۱۰x+۸y-۶=۰ \Rightarrow -۵x+۴y-۳=۰$$

حال باید محل تقاطع این خط را با یکی از دایره‌ها به دست آوریم، ولی در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۱ در معادله این خط صدق می‌کند. پس نیازی به انجام ادامه محاسبات نیست.

۲ - گزینه ۴ مرکز دایره، محل تلاقی دو قطر می‌باشد.

$$\begin{cases} y-۳x=-۱ \\ -۲y+x=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y-۶x=-۲ \\ -۲y+x=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۵x=-۵ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۲ \ , \ c\Big|_{۲}^{۱}$$



شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ی $(۰,۰)$ است.

$$R=AC=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

۳ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی هر دو دایره را به دست می‌آوریم و سپس با حذف جملات از درجه دوم بین دو معادله دایره، معادله وتر مشترک را بدست می‌آوریم.

$$\left.\begin{matrix}(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۴ \rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲=۴ \\ (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۰)^۲+(y+۱)^۲=۴ \rightarrow x^۲+y^۲+۲y+۱=۴ \end{matrix}\right\} - \Rightarrow -۲y-۲x=۰ \rightarrow y=-x$$

۴ - گزینه ۴ خط به معادله $y=x$، نیمساز ربع اول و سوم و خط به معادله $y=-x$ نیمساز ربع دوم و چهارم است و فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

شعاع این دایره، برابر فاصله‌ی مرکز آن از خط مماس است.

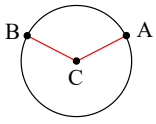
$$R=(\text{فاصله نقطه } (۲,-۱) \text{ از نیمساز ربع دوم و چهارم } (x+y=۰))=\frac{|۲+(-۱)|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow d=۲R=۲(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A\Big|_{\beta}^{\alpha}$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ از رابطه $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۵ - گزینه ۱

مرکز این دایره به صورت $C(a,a+۱)$ است و دو نقطه $A\Big|_{۰}^{۱}$ و $B\Big|_{۳}^{۰}$ روی دایره قرار دارند.



$$AC=BC \Rightarrow \sqrt{(a-۱)^۲+(a+۱)^۲}=\sqrt{(a-۰)^۲+(a+۱-۳)^۲}$$
$$\Rightarrow a^۲-۲a+۱+a^۲+۲a+۱=a^۲+a^۲-۴a+۴ \Rightarrow ۲=-۴a+۴ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow C(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

۶ - گزینه ۳ کافی است مختصات سه نقطه را در معادله گسترده دایره صدق دهیم.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$
$$\left.\begin{matrix}A\Big|_{۲}^{۱} \xrightarrow{\text{صدق}} ۴+۱+a+۲b+c=۰ \rightarrow a+۲b+c=-۵ \\ B\Big|_{۰}^{۰} \xrightarrow{\text{صدق}} c=۰ \\ C\Big|_{۱}^{-۲} \xrightarrow{\text{صدق}} ۴+۱-۲a+b+c=۰ \rightarrow -۲a+b+c=-۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=۱ \ , \ b=-۳$$
$$\left.\begin{matrix}f'_x=۰ \rightarrow ۲x+a=۰ \rightarrow ۲x+۱=۰ \rightarrow x=-\frac{۱}{۲}=-۰/۵ \\ f'_y=۰ \rightarrow ۲y+b=۰ \rightarrow ۲y-۳=۰ \rightarrow y=\frac{۳}{۲}=۱/۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow c(-۰/۵,۱/۵)$$

۷ - گزینه ۱

$$x^۲+y^۲-۲x+۶y-۸=۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x=۰ \to ۲x-۲=۰ \to x=۱ \\ f'_y=۰ \to ۲y+۶=۰ \to y=-۳ \end{cases} \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۱\\-۳\end{matrix}\right.$$

$$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۱+۹+۸=۱۸ \Rightarrow R=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

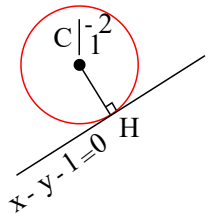
$$x^۲+y^۲+۸x-۴y+۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x=۰ \to ۲x+۸=۰ \to x=-۴ \\ f'_y=۰ \to ۲y-۴=۰ \to y=۲ \end{cases} \Rightarrow C'\left|\begin{matrix}-۴\\۲\end{matrix}\right.$$

$$R'^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۱۶+۴-۱۲=۸ \to R'=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

از طرفی: $CC'=\sqrt{(۱+۴)^۲+(-۳-۲)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$

چون $CC'=R+R'$ است دو دایره مماس خارج هستند.

۸ - گزینه ۲ قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس $C\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$ می‌باشد.



$$R=CH=\frac{|-۲-۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۹ - گزینه ۲ ۱- مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R,R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,R)$ است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,-R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R,-R)$ است.

که R شعاع دایره است.

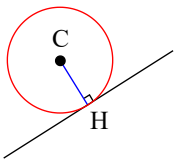
از نقطه‌ی داده شده روی دایره متوجه می‌شویم دایره در ناحیه‌ی دوم بر هر دو محور مختصات مماس است پس مرکز آن $C\left|\begin{matrix}-R\\R\end{matrix}\right.$ است.

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \xrightarrow[\text{صدق}]{\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.} (-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲ \Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰$$

$$\Rightarrow (R-۱)(R-۵)=۰ \begin{cases} R=۱ \\ R=۵ \Rightarrow \text{قطر دایره بزرگتر}=۱۰ \end{cases}$$

۱۰ - گزینه ۲ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.



$$\begin{matrix} f'_x=۰ \to ۲x-۲=۰ \to x=۱ \\ f'_y=۰ \to ۲y+۴=۰ \to y=-۲ \end{matrix} \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$$

$$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۱+۴-a=۵-a \to R=\sqrt{۵-a}$$

$$\text{فاصله‌ی مرکز دایره تا خط } x+۳y=۰ = CH=R=\frac{|۱-۶+۰|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

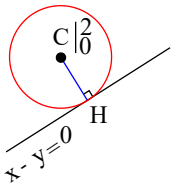
$$\text{بنابراین: } \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۵-a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۲۵}{۱۰}=۵-a \to a=\frac{۵}{۲}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

هندسه

۱۱ - گزینه ۱ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $y=x$ (نیم‌ساز ناحیه‌ی اول) شعاع دایره را می‌دهد.

$$R = CH = \frac{|۲ + ۰ + ۰|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$



حال با داشتن مرکز دایره و شعاع دایره، معادله‌ی آن را می‌نویسیم.

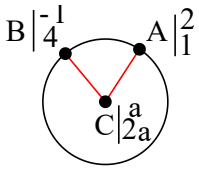
$$C\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \ , \ R = \sqrt{۲} \Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + y^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۱} (x-۲)^۲ + ۱ = ۲$$

$$(x-۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ **از خط به معادله‌ی** $ax + by + c = ۰$ **از رابطه‌ی** $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ **به‌دست می‌آید.**

۱۲ - گزینه ۱

شکل مسأله به صورت مقابل می‌باشد.



$$R = AC = \sqrt{(۲-a)^۲ + (۱-۲a)^۲}, R = BC = \sqrt{(-۱-a)^۲ + (۴-۲a)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۲-a)^۲ + (۱-۲a)^۲} = \sqrt{(-۱-a)^۲ + (۴-۲a)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}} ۴ - ۴a + a^۲ + ۱ - ۴a + ۴a^۲ = ۱ + ۲a + a^۲ + ۱۶ - ۱۶a + ۴a^۲ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$R = AC = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۱-۴)^۲} = \sqrt{۰ + ۹} = ۳$$

۱۳ - گزینه ۳ کافی است معادله گسترده دایره یعنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ **را بنویسیم و این نقاط را در معادله دایره صدق دهیم.**

$$\left.\begin{matrix} A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱ - a + c = ۰ \\ B\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۹ + ۳a + c = ۰ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -۲ \ , \ c = -۳$$

$$C\left|\begin{matrix}۰\\-۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۹ - ۳b + c = ۰ \xrightarrow{c=-۳} b = ۲$$

$$R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۴ + ۴ + ۱۲}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x = ۰ \rightarrow ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \\ f'_y = ۰ \rightarrow ۲y + ۴ = ۰ \rightarrow y = -۲ \end{cases} \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$$

$$R^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - c = ۱ + ۴ + ۱۳ = ۱۸ \rightarrow R = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x = ۰ \rightarrow ۲x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۱ \\ f'_y = ۰ \rightarrow ۲y = ۰ \rightarrow y = ۰ \end{cases} \Rightarrow C'\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$R'^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - c = ۱ + ۰ + ۱ = ۲ \rightarrow R' = \sqrt{۲}$$

از طرفی : $CC' = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

چون $CC' = |R - R'|$ **است پس دو دایره مماس داخل هستند.**

۱۵ - گزینه ۱ معادله‌ی دایره در حالت گسترده به صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ **است این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم.**

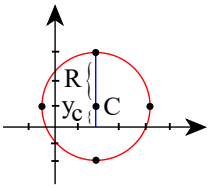
$$\left.\begin{matrix} A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} c = ۰ \\ B\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = -۵ \\ C\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰ \Rightarrow a - ۲b = -۵ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -۳ \ , \ b = ۱$$

$$R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۹ + ۱ - ۰}{۴} = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۱۶ - گزینه ۳

$x^۲+y^۲-۴x-۲y=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۵ \Rightarrow C(۲,۱) \quad , \quad R=\sqrt{۵}$

بیشترین فاصله‌ی نقاط این دایره از محور xها، برابر است با عرض مرکز به اضافه شعاع دایره (مطابق شکل) یعنی $y_C+R=۱+\sqrt{۵}$



۱۷ - گزینه ۴

چون عرض دو کانون با هم برابر است، پس بیضی افقی است:

FF' وسط $W \left| \begin{matrix} \frac{x_F+x_{F'}}{۲} \\ \frac{y_F+y_{F'}}{۲} \end{matrix} \right. \rightarrow W \left| \begin{matrix} ۰ : \alpha \\ ۱ : \beta \end{matrix} \right.$

$$\begin{cases} FF'=۲c=۲\sqrt{۳} \Rightarrow c=\sqrt{۳} \\ BB'=۲b=۲ \Rightarrow b=۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲=۱+۳=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow A(۲,۱), A'(-۲,۱)$$

دقت کنید در بیضی افقی $A \left| \begin{matrix} \alpha+a \\ \beta \end{matrix} \right.$ و $A' \left| \begin{matrix} \alpha-a \\ \beta \end{matrix} \right.$ می‌باشند.

۱۸ - گزینه ۳ این منحنی حتماً دایره است، پس $a=۱$، نقطه‌ی $(-۲,۱)$ هم، مرکز دایره است (چون قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد)

$$x^۲+y^۲+cx+dy+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x=۰ \rightarrow ۲x+c=۰ \rightarrow -۴+c=۰ \Rightarrow c=۴ \\ f'_y=۰ \rightarrow ۲y+d=۰ \rightarrow ۲+d=۰ \Rightarrow d=-۲ \end{cases}$$

بنابراین $acd=-۸$

۱۹ - گزینه ۳ معادله‌ی وتر مشترک دو دایره را از طریق حذف جملات $x^۲$ و $y^۲$ در یک دستگاه می‌یابیم:

$$-\begin{cases} x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x-۶y-۱۴=۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰x+۱۴y+۱۴=۰ \Rightarrow ۵x+۷y+۷=۰$$

پس شیب وتر مشترک برابر $-\frac{۵}{۷}$ است که بر خطی عمود است که شیب آن $\frac{۷}{۵}$ باشد در گزینه‌ها تنها گزینه‌ی ۳ چنین ویژگی‌ای دارد.

۲۰ - گزینه ۴

۱-مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R,R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,R)$ است.

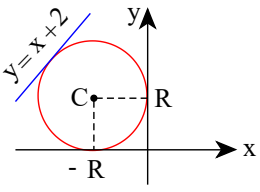
۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,-R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R,-R)$ است.

که R شعاع دایره است.

شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس است.

مرکز دایره‌ای به شعاع R که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $C(-R,R)$ است، بنابراین:



شعاع $= x-y+۲=۰$ از خط $C(-R,R)$ فاصله نقطه $\Rightarrow R=\frac{|-R-R+۲|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}} \Rightarrow \frac{|۲R-۲|}{\sqrt{۲}}=R$

$$\Rightarrow |۲R-۲|=\sqrt{۲}R \Rightarrow ۲R-۲=\pm\sqrt{۲}R \Rightarrow (۲\mp\sqrt{۲})R=۲$$

$$\Rightarrow R=\frac{۲}{۲\mp\sqrt{۲}} \Rightarrow \begin{cases} R_۱=\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}}\times\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=۲+\sqrt{۲} \\ R_۲=\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=۲-\sqrt{۲} \end{cases}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ از رابطه $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

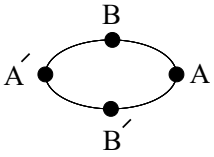
۲۱ - گزینه ۲

$$F(۲,۱), F'(-۴,۱) \Rightarrow y_F = y_{F'} \rightarrow \text{بیضی افقی} \ , \ FF' \text{ وسط } W \left| \begin{matrix} \frac{۲+(-۴)}{۲} = -۱ : \alpha \\ \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \quad : \beta \end{matrix} \right.$$

$$FF' = ۲c \rightarrow ۲c = ۶ \rightarrow c = ۳ \ , \ e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{c=۳} a = ۶$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \rightarrow ۹ = ۳۶ - b^۲ \rightarrow b^۲ = ۲۷ \rightarrow b = ۳\sqrt{۳}$$

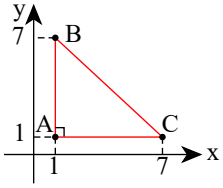
در بیضی افقی، بیشترین عرض را نقطه‌ی B دارد.



$\rightarrow B$ عرض نقطه‌ی $= \beta + b = ۱ + ۳\sqrt{۳}$

۲۲ - گزینه ۲ روش اول: کافی است مختصات سه نقطه را در معادله گسترده دایره یعنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ صدق دهیم و پس از حل دستگاه و پیدا شدن a و b و c به راحتی شعاع را از فرمول $R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$ به دست آوریم و محیط محاسبه می‌شود. $(S = ۲\pi R)$

روش دوم :ابتدا نقاط را بر روی محور مختصات مشخص می‌کنیم. واضح است اگر دایره از نقاط A,B,C بگذرد، وتر BC قطر دایره خواهد بود. (A زاویه‌ی محاطی رو به قطر)، پس داریم:



$$۲R = BC = \sqrt{۶^۲ + ۶^۲} = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow R = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۶\sqrt{۲}\pi$$

۲۳ - گزینه ۲ مختصات این نقاط را در معادله‌ی گسترده‌ی دایره یعنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ صدق می‌دهیم:

$$\left| \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۰ + ۰ + ۰ + c = ۰ \Rightarrow c = ۰$$

$$\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱ + ۱ + a + b + ۰ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲$$

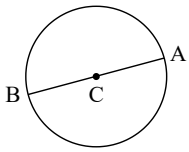
$$\left| \begin{matrix} -۳ \\ ۳ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۹ + ۹ - ۳a + ۳b + ۰ = ۰ \Rightarrow -۳a + ۳b = -۱۸ \Rightarrow a - b = ۶$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = ۲, b = -۴$$

پس معادله دایره به صورت $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ است.

۲۴ - گزینه ۱

$A \left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۵ \end{matrix} \right.$ دو سر قطر دایره هستند که مرکز دایره وسط قطر AB است.



C وسط AB $\left| \begin{matrix} \frac{۰+۲}{۲}=۱ \\ \frac{-۱+۵}{۲}=۲ \end{matrix} \right.$ و $R = AC = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (-۱-۲)^۲} = \sqrt{۱۰}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱۰ \xrightarrow{x=۰} (y-۲)^۲ = ۹ \rightarrow y - ۲ = \pm ۳ \rightarrow y = ۵ \ , \ y = -۱$

۲۵ - گزینه ۳

$$(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۸ \Rightarrow C(۲,-۲), R = ۲\sqrt{۲}$$

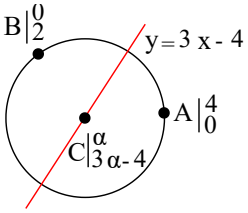
$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۶y = ۸۰ \Rightarrow (x+۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹۸ \Rightarrow C'(-۳,۳), R' = ۷\sqrt{۲}$$

$$CC' = \sqrt{(۲+۳)^۲ + (-۲-۳)^۲} = \sqrt{۵^۲ + ۵^۲} = ۵\sqrt{۲}$$

باتوجه به اینکه $CC' = |R' - R|$ ، دو دایره مماس داخل هستند.

۲۶ - گزینه ۳

مرکز دایره روی خط $y = ۳x - ۴$ واقع است، پس مختصات آن به صورت $C(\alpha, ۳\alpha - ۴)$ می‌باشد.



$$BC = AC \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲ + (۳\alpha - ۶)^۲} = \sqrt{(\alpha - ۴)^۲ + (۳\alpha - ۴)^۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ + ۹\alpha^۲ + ۳۶ - ۳۶\alpha = \alpha^۲ + ۱۶ - ۸\alpha + ۹\alpha^۲ + ۱۶ - ۲۴\alpha \Rightarrow ۴\alpha = ۴ \Rightarrow \alpha = ۱ \Rightarrow C(۱, -۱)$$

۲۷ - گزینه ۴

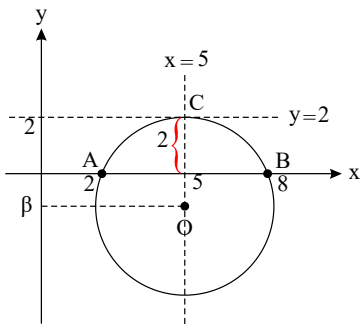
$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۱۲ < ۰ \rightarrow x^۲ - ۴x + y^۲ - ۶y + ۱۲ < ۰$$

$$\rightarrow (x-۲)^۲ - ۴ + (y-۳)^۲ - ۹ + ۱۲ < ۰ \rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ < ۱$$

بنابراین نقاط مورد نظر، نقاط درون دایره‌ای به مرکز $C\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ و شعاع $R = ۱$ است.

۲۸ - گزینه ۴

شکل دایره‌ی مورد نظر به صورت مقابل است:



باتوجه به این شکل، مختصات مرکز این دایره به صورت $O(۵, \beta)$ است.

چون OA و OC هر دو برابر شعاع دایره‌اند، داریم:

$$OA = OC \Rightarrow \sqrt{(۵-۲)^۲ + (\beta - ۰)^۲} = ۲ - \beta$$

$$\Rightarrow ۹ + \beta^۲ = ۴ + \beta^۲ - ۴\beta \Rightarrow -۴\beta = ۵ \Rightarrow \beta = -\frac{۵}{۴}$$

۲۹ - گزینه ۱ برای پیدا کردن معادله‌ی وتر مشترک بین دو دایره کافی است جملات از درجه‌ی دوم بین آن‌ها را حذف کنیم.

$$(x+۳)^۲ + (y+۴)^۲ = ۲۵ \rightarrow x^۲ + ۹ + ۶x + y^۲ + ۱۶ + ۸y = ۲۵ \rightarrow x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y = ۰$$

$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۷ \rightarrow x^۲ + ۴ - ۴x + y^۲ + ۹ - ۶y = ۲۷ \rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۱۴$$

اگر معادله‌ی پایین را در یک منفی ضرب کرده و با معادله‌ی بالا جمع کنیم، داریم:

$$۱۰x + ۱۴y = -۱۴ \rightarrow m = -\frac{۱۰}{۱۴} = -\frac{۵}{۷}$$

تنها گزینه‌ی اول است که شیب خط داده شده برابر $\frac{-۵}{۷}$ است و با وتر مشترک موازی است.

۳۰ - گزینه ۲ برای پیدا کردن معادله‌ی وتر مشترک بین دو دایره کافی است که جملات از درجه‌ی دوم را از بین آن‌ها حذف کنیم.

$$-\begin{cases} x^۲ + y^۲ + k'x + ۸y = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۴x - ky = ۱۴ \end{cases} \rightarrow \underbrace{k'x + ۴x} + \underbrace{۸y + ky} = -۱۴ \rightarrow (k'+۴)x + (۸+k)y = -۱۴$$

$$\rightarrow (\frac{k'+۴}{۲})x + (\frac{۸+k}{۲})y = -۷ \xrightarrow{\text{مقایسه با } ۵x+۷y=-۷} \begin{cases} \frac{k'+۴}{۲} = ۵ \rightarrow k' = ۶ \\ \frac{۸+k}{۲} = ۷ \rightarrow k = ۶ \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خط مورد نظر به صورت $y = ۶x + ۶$ است که شیب این خط برابر ۶ است و تنها گزینه‌ای که شیب خط داده شده‌اش عکس و قرینه‌ی ۶ یعنی $\frac{-۱}{۶}$ باشد، گزینه‌ی دوم است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۱	۱۷ - ۴	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۳	۲۴ - ۱	۲۹ - ۱
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۴	۲۵ - ۳	۳۰ - ۲