



علی هاشمی

۱- دو خط  $x + y + 4 = 0$  و  $2y = 5 - 2x$  بر دایره‌ای مماس هستند. شعاع این دایره کدام است؟

①  $\frac{13}{2\sqrt{2}}$

②  $\frac{13}{4}$

③  $\frac{13}{4\sqrt{2}}$

④  $\frac{13}{2}$

۲- دو دایره با معادلات  $x^2 + y^2 - 4y = b$  و  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  مماس خارج هستند. مقدار  $b$  کدام است؟

①  $2 - 2\sqrt{5}$

②  $4 - 2\sqrt{5}$

③  $2\sqrt{5}$

④ ۱

۳- شعاع دایره‌ای مماس بر هر دو محور مختصات که از نقطه‌ی  $(-۱, ۲)$  می‌گذرد، کدام است؟

① ۱ یا ۴

② ۱ یا ۵

③ ۲ یا ۳

④ ۲ یا ۴



۴- معادله‌ی تمام قائم‌های رسم شده بر دایره به صورت  $y = m(x - y) + 1$  است. اگر دایره محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، محور  $x$ ها را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

- ① -۳, ۵
- ② ۳, -۱
- ③  $-1 \pm 3\sqrt{2}$
- ④  $-1 \pm 2\sqrt{3}$

۵- شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 1)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(0, 0)$  می‌گذرد کدام است؟

- ① ۲
- ② ۲,۵
- ③ ۳
- ④ ۳,۵

۶- معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدا و مماس خارج بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$  کدام است؟

- ①  $x^2 + y^2 = 14 - 2\sqrt{13}$
- ②  $x^2 + y^2 = 12$
- ③  $x^2 + y^2 = 14 + 2\sqrt{13}$
- ④  $x^2 + y^2 = 14$

۷- چه نقاطی در نابرابری  $x^2 + y^2 + 2x - 4y \leq -4$  صدق می‌کنند؟

- ① نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز  $(1, -2)$  و شعاع  $\sqrt{8}$
- ② نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و شعاع ۱
- ③ نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و شعاع  $\sqrt{2}$
- ④ نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز  $(1, -2)$  و شعاع ۱



۸- به ازای کدام مقدار  $m$  خط  $2x - 3y + m = 2$  بر دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$  مماس است؟

- ① ۲۴-۲
- ② ۱۵-۲
- ③ ۱۸-۳
- ④ ۱۶-۳

۹- به ازای کدام مقدار  $a$ ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله‌ی  $3x + 2y = a$  در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها،  $90^\circ$  درجه است؟

- ① ۲
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ ۵

۱۰- فاصله‌ی نقطه‌ی  $M(x, y)$  از نقطه‌ی  $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط  $M$  کدام است؟

- ①  $2\sqrt{3}$
- ②  $2\sqrt{5}$
- ③  $4\sqrt{3}$
- ④  $4\sqrt{5}$

۱۱- از نقطه‌ی  $A(-2, -11)$  مماسی بر دایره‌ی به معادله‌ی  $x^2 - 8x + y^2 + 6y = -21$  رسم می‌کنیم. طول خط مماس کدام است؟

- ①  $8\sqrt{6}$
- ②  $4\sqrt{6}$
- ③  $5\sqrt{2}$
- ④  $8\sqrt{2}$



۱۲- اگر مرکز دایره  $ax^2 + y^2 + bx - cy = 0$  نقطه  $(-1, -2)$  باشد،  $a + b + c$  کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) -۱
- ۳) ۰
- ۴) ۲

۱۳- دو دایره از نقطه  $A(-3, 6)$  می‌گذرند و بر محورهای مختصات مماس‌اند. مجموع شعاع‌های آن‌ها کدام است؟

- ۱) ۱۸
- ۲) ۱۵
- ۳) ۴۵
- ۴) ۳۶

۱۴- به ازای کدام مقدار  $k$ ، خط  $y = 2x + k$  بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  مماس است؟

- ۱)  $\pm 5$
- ۲) ۱ یا -۹
- ۳) ۱ یا ۹
- ۴) ۱ یا -۹

۱۵- دو دایره  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 4$  و  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$  نسبت به هم چگونه‌اند؟

- ۱) مماس خارج
- ۲) مماس داخل
- ۳) متقاطع
- ۴) متخارج

۱۶- به ازای کدام مقدار  $a$ ، رابطه  $a^2x^2 + 4y^2 + 8x - 4y + a = 0$  معادله‌ی یک دایره است؟

- ۱) فقط -۲
- ۲) فقط ۲
- ۳)  $\pm 2$
- ۴) هیچ مقدار



۱۷- دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و مماس بر خط به معادله‌ی  $x - y = 1$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ① ۱ و ۳
- ② ۱ و ۴
- ③ ۲ و ۳
- ④ ۱٫۵ و ۴

۱۸- قائم بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 + ay + b = 0$  در نقطه‌ی  $A(\sqrt{3}, 2)$  واقع بر آن، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول  $(-\sqrt{3})$  قطع می‌کند.  $a - b$  کدام است؟

- ① -۵
- ② -۱
- ③ ۱
- ④ ۵

۱۹- قطری از دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$  که موازی خط  $y = 2x + 1$  است، از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

- ①  $(-2, 4)$
- ②  $(-2, 2)$
- ③  $(0, 1)$
- ④  $(0, -1)$

۲۰- دو رأس کانونی یک بیضی  $A(7, 1)$  و  $A'(-3, 1)$  هستند. اگر بیضی بر محور  $x$ ها مماس باشد، فاصله‌ی کانونی آن چقدر است؟

- ①  $2\sqrt{26}$
- ②  $2\sqrt{6}$
- ③  $4\sqrt{6}$
- ④ ۸



۲۱- مجموع فواصل نقطه‌ی  $P$  روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت  $M$  و  $N$  به طول‌های  $-۳$  و  $۴$  روی محور  $x$ ‌ها برابر  $۹$  است. اندازه‌ی قطر کوچک این بیضی کدام است؟

- ①  $\sqrt{۳۲}$   
 ②  $\sqrt{۳۴}$   
 ③  $\sqrt{\frac{۳۲}{۲}}$   
 ④  $\frac{\sqrt{۳۴}}{۴}$

۲۲- دو دایره به معادله‌های  $x^2 + y^2 - ۶x - ۴y + ۱۱ = ۰$  و  $x^2 + y^2 + ۲y + a = ۰$  مماس خارج هستند.  $a$  کدام است؟

- ①  $۷$   
 ②  $-۷$   
 ③  $۶$   
 ④  $-۶$

۲۳- دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $A(۰, -۱)$  و  $B(۰, ۳)$  می‌گذرد و بر خط  $x = ۱$  مماس است. کدام یک از نقاط زیر روی این دایره قرار دارد؟

- ①  $(-\frac{۳}{۲}, ۲)$   
 ②  $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$   
 ③  $(\frac{۳}{۲}, ۰)$   
 ④  $(-\frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۲})$

۲۴- معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادله‌های  $x^2 + y^2 + ۳x - y - ۱ = ۰$  ,  $x^2 + y^2 - ۲x - ۴ = ۰$  از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

- ①  $(۲, ۱)$   
 ②  $(-۱, ۲)$   
 ③  $(۳, ۴)$   
 ④  $(-۴, ۳)$



۲۵- معادله‌ی دایره‌ای که بالای محور  $x$ ‌ها بوده و بر نیمسازهای نواحی اول و دوم مختصات مماس است و مرکز آن بر روی خط  $x + 2y - 4 = 0$  قرار دارد کدام است؟

①  $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

②  $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$

③  $x^2 + y^2 - 4y = 0$

④  $x^2 + y^2 - 4x = 0$

۲۶- دو دایره به معادله‌های  $x^2 + (y - 3)^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 + 8x + m = 0$  مماس خارج هستند.  $m$  کدام است؟

① ۴

② ۵

③ ۶

④ ۷

۲۷- دایره‌ای به معادله‌ی  $x^2 + y^2 + n(2x - 2y) = 0$  از نقطه‌ی  $A \left|_{-1}^1 \right.$  می‌گذرد. شعاع این دایره کدام است؟

①  $\frac{1}{2}$

②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

④  $\frac{1}{4}$

۲۸- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $M(x, y)$  تا نقطه‌ی  $A(2, 0)$  سه برابر فاصله‌اش تا نقطه‌ی  $B(0, 4)$  باشد، معادله‌ی مکان هندسی  $M$  کدام است؟

① دایره‌ای به مرکز  $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$

② دایره‌ای به مرکز  $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{2})$

③ دایره‌ای به مرکز  $(-\frac{1}{2}, 9)$

④ دایره‌ای مرکز  $(-1, -9)$



۲۹- اگر نقطه‌ی  $A(1, 2)$  خارج دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + m = 0$  واقع باشد، مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- ①  $m < -1$
- ②  $-5 < m < -1$
- ③  $m > 1$
- ④  $1 < m < 5$

۳۰- دایره‌ای به مرکز  $(\alpha, \beta)$  در ربع اول دستگاه مختصات بر محور  $x$  ها و نیمساز ربع اول مماس است. کدام است  $\frac{\beta}{\alpha}$ ؟

- ①  $\sqrt{2}$
- ②  $\sqrt{2} + 1$
- ③  $\sqrt{2} - 1$
- ④  $1 - \sqrt{2}$





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (ضرایب  $x, y$  در هر دو معادله خط باید یکسان باشند)

این دو خط موازی اند چون شیب هایشان برابر است، پس فاصله‌ی آن‌ها برابر قطر دایره است:

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x + y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{|4 - (-\frac{5}{2})|}{\sqrt{1+1}} = \frac{13}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{13}{4\sqrt{2}}$$

۲ - گزینه ۱ دو دایره‌ی به مراکز  $C$  و  $C'$  مماس خارج‌اند، هرگاه  $CC' = R + R'$  باشد.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow C|_0, R = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = b \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = b+4 \Rightarrow C'|_0, R' = \sqrt{b+4} \end{cases}$$

$$CC' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = R + R' = 1 + \sqrt{b+4} \Rightarrow \sqrt{b+4} = \sqrt{5} - 1$$

توان  $\sqrt{\phantom{x}}$

$$\rightarrow b + 4 = 5 + 1 - 2\sqrt{5} \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{5}$$

۳ - گزینه ۲ ۱- مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, R)$  است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, R)$  است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, -R)$  است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, -R)$  است.

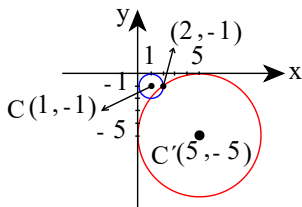
که شعاع دایره است.

این دایره از نقطه‌ی  $(2, -1)$  می‌گذرد، پس باید در ربع چهارم باشد، پس مرکز این دایره به صورت  $C(R, -R)$  است. چون نقطه‌ی  $A(2, -1)$  روی این دایره است، داریم:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2 \xrightarrow[\text{صدق}]{\substack{2 \\ -1}} (2-R)^2 + (-1+R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4R + R^2 + 1 - 2R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R-5)(R-1) = 0 \Rightarrow R = 1, 5$$

بنابراین دو دایره با مراکز  $(1, -1)$  و  $(5, -5)$  به ترتیب با شعاع‌های ۱ و ۵ با این ویژگی‌ها وجود دارد.



۴ - گزینه ۲ قائم‌های رسم شده بر دایره، همگی از مرکز دایره می‌گذرند برای این منظور دو مقدار دلخواه به  $m$  داده و با تشکیل دستگاه بین دو خط بدست آمده مختصات مرکز دایره را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} m = 0 \rightarrow y = 1 \\ m = 1 \rightarrow y = x - y + 1 \rightarrow 1 = x - 1 + 1 \rightarrow x = 1 \end{cases} \quad C \rightarrow |_1^1$$

چون این دایره محور عرض را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند بنابراین نقطه‌ی  $A|_3^0$  روی دایره قرار دارد فاصله‌ی  $A$  تا  $C$  برابر شعاع دایره است.

$$R = AC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\text{معادله‌ی دایره: } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \xrightarrow{y=0} (x-1)^2 + 1 = 5$$

$$\rightarrow (x-1)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۵ - گزینه ۲ معادله‌ی دایره در حالت گسترده به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است. این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0 \\ B \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \\ C \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 0, b = -5$$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$ ، شعاع دایره برابر است با:



$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

۶ - گزینه ۱ دو دایره به مراکز  $C$  و  $C'$  و شعاع‌های  $R$  و  $R'$  مماس خارج‌اند، هرگاه:  $CC' = R + R'$  باشد.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{3^2 + (-2)^2 - 4(12)}{4} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$CC' = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}, \quad R + R' = \sqrt{13} \xrightarrow{R=1} R' = \sqrt{13} - 1$$

بنابراین معادله‌ی دایره عبارت است از:  $((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2)$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{13} - 1)^2 = 13 + 1 - 2\sqrt{13} = 14 - 2\sqrt{13}$$

۷ - گزینه ۲

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y \leq -4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$$

پس نقاط مورد نظر، نقاط درون و روی دایره‌ی  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  هستند، یعنی نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و شعاع ۱.

۸ - گزینه ۱

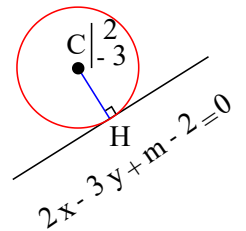
$$\begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow C \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 4 + 9 - 0 = 13 \Rightarrow R = \sqrt{13}$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر شعاع دایره است.

$$CH = R = \frac{|4 + 9 + m - 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|m + 11|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |m + 11| = 13 \Rightarrow \begin{cases} m + 11 = 13 \Rightarrow m = 2 \\ m + 11 = -13 \Rightarrow m = -24 \end{cases}$$



توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

۹ - گزینه ۱ خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد.

$$f'_x = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

اکنون کافی است که مختصات مرکز دایره  $C \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$  را در خط به معادله‌ی  $3x + 2y = a$  صدق دهیم.

$$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow 3 - 1 = a \Rightarrow a = 2$$

۱۰ - گزینه ۴

$$AM = 2OM \Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 36 - 12y = 4x^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

معادله‌ی دایره:  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 16 + 60}{4} = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

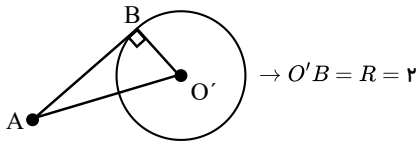
$$\rightarrow \text{قطر بزرگترین وتر} = 4\sqrt{5}$$

۱۱ - گزینه ۲ روش اول: در معادله‌ی دایره‌ی داده شده داریم:

$$x^2 - 8x + y^2 + 6y = -21 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4 \Rightarrow R = 2, \quad O'(4, -3)$$

حال با توجه به شکل داریم:

$$O'A = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-11 - (-3))^2} = 10$$



$$\Rightarrow (O'A)^2 = (O'B)^2 + (AB)^2 \rightarrow 100 = 4 + AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

روش دوم: کافی است نقطه‌ی داده شده را در معادله‌ی دایره قرار دهیم و از عدد حاصل جذر بگیریم.

$$x^2 - 8x + y^2 + 6y + 21 = 0 \xrightarrow{\begin{matrix} -2 \\ -11 \end{matrix}} 4 + 16 + 121 - 66 + 21 = 96 \rightarrow \text{طول مماس} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

۱۲ - گزینه ۲ چون منحنی داده شده یک دایره است، پس ضریب  $x^2$  و  $y^2$  برابر هستند بنابراین  $a = 1$  است و برای پیدا کردن مختصات مرکز دایره یک بار نسبت به  $x$  و یک بار نسبت به  $y$  مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} f'_x = 2x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 2 \\ f'_y = 2y - c = 0 \Rightarrow y = \frac{c}{2} \Rightarrow -2 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -4 \end{cases}$$

پس  $a + b + c = -1$  می‌باشد.

۱۳ - گزینه ۱ - مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, R)$  است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, R)$  است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, -R)$  است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, -R)$  است.

که  $R$  شعاع دایره است.

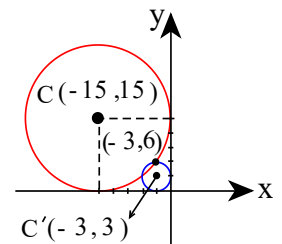
طبق نکته‌ی مذکور مرکز این دایره‌ها  $C \mid_R^{-R}$  می‌باشد پس معادله‌ی این دو دایره به صورت زیر است:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

نقطه‌ی  $(-3, 6)$  در این معادله صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} (-3 + R)^2 + (6 - R)^2 &= R^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 6R + 9 + R^2 - 12R + 36 \\ &\Rightarrow R^2 - 18R + 45 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{مجموع شعاع‌ها} = R_1 + R_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-18)}{1} = 18$$



۱۴ - گزینه ۲ ابتدا معادله دایره را استاندارد می‌کنیم و می‌دانیم فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \Rightarrow C(1, -2), R = \sqrt{5}$$

$$2x - y + k = 0 \text{ فاصله مرکز دایره تا خط} = R = \frac{|2 + 2 + k|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|4 + k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow |4 + k| = 5 \rightarrow k + 4 = \pm 5 \rightarrow k = 1 \text{ یا } k = -9$$

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی } A \mid_{\alpha}^{\beta} \text{ از خط به معادله‌ی } ax + by + c = 0 \text{ می‌شود:}$$

۱۵ - گزینه ۳

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 4$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow C \mid_{-1}^{-2}, R = 3$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 = 11 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow C' \mid_1^2, R' = 4$$

$$CC' = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

چون  $|R - R'| < CC' < R + R'$  است دو دایره متقاطع هستند.

۱۶ - گزینه ۳ در معادله‌ی دایره ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  مساوی هستند. بنابراین:  $a = \pm 4 \Rightarrow a^2 = 4$

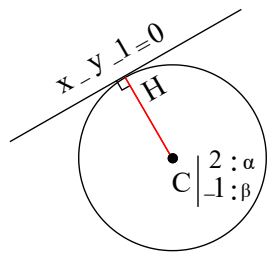
حال قابل قبول بودن هر یک از این مقادیر را بررسی می‌کنیم:



$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-\frac{1}{4})^2 = \frac{17}{4} \\ a = -2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-\frac{1}{4})^2 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

بنابراین هر دو مقدار ۲ و -۲ قابل قبول اند.

۱۷ - گزینه ۱



$$R = CH = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، نشان دهنده شعاع دایره می باشد.

$$\text{معادله ی دایره: } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + 1 = 2$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{توجه کنید فاصله ی نقطه ی } A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \text{ از خط به معادله ی } ax + by + c = 0 \text{ از رابطه ی } AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ به دست می آید.}$$

۱۸ - گزینه ۳

$$f'_x = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0, \quad f'_y = 0 \rightarrow 2y + a = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{2} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 0 : \alpha \\ -\frac{a}{2} : \beta \end{matrix} \right.$$

قائم بر دایره از مرکز دایره می گذرد بنابراین قائم بر دایره از سه نقطه ی  $A \left| \begin{matrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{matrix} \right.$  و  $B \left| \begin{matrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{matrix} \right.$  و  $C \left| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \end{matrix} \right.$  می گذرد یعنی این سه نقطه، همراستا هستند پس شرط همراستا بودن سه نقطه را می نویسیم.

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{2 - 0}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{0 + \frac{a}{2}}{-\sqrt{3} - 0} \rightarrow -2\sqrt{3} = a\sqrt{3} \rightarrow a = -2$$

از طرفی نقطه ی  $A(\sqrt{3}, 2)$  متعلق به دایره است، پس در معادله ی دایره، صدق می کند.

$$(\sqrt{3})^2 + 2^2 + (-2)(\sqrt{3}) + b = 0 \Rightarrow b = -3 \rightarrow a - b = -2 - (-3) = 1$$

۱۹ - گزینه ۱ قطر دایره از مرکز دایره می گذرد بنابراین ابتدا باید مختصات مرکز دایره را بدست آوریم.

$$f'_x = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3, \quad f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow C \left| \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$y = 2x + 1 \rightarrow m_{\text{قطر}} = 2 \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{خط}} = 2$$

حال، با داشتن شیب و یک نقطه، معادله ی خط را می نویسیم.

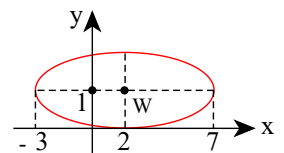
$$\begin{cases} C \left| \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right. \rightarrow y - 2 = 2(x + 3) \rightarrow y = 2x + 8 \\ m = 2 \end{cases}$$

فقط گزینه اول در معادله ی این خط صدق می کند.

۲۰ - گزینه ۳

$$y_A = y_{A'} \rightarrow \text{بیضی افقی و } AA' = 2a \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$$

$$AA' \text{ وسط } W \left| \begin{matrix} \frac{y-3}{2} = 2 \\ \frac{1+1}{2} = 1 \end{matrix} \right.$$



با توجه به شکل،  $b = 1$  است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 1^2 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{6}$$

۲۱ - گزینه ۱ طبق تعریف بیضی، مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، مقداری ثابت برابر  $2a$  است.

$$2a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{2}, \quad F \left| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right., \quad F' \left| \begin{matrix} -4 \\ 0 \end{matrix} \right. \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 2c = 7 \rightarrow c = \frac{7}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow \frac{49}{4} = \frac{81}{4} - b^2 \rightarrow b^2 = \frac{32}{4} \rightarrow b = \frac{\sqrt{32}}{2} \rightarrow 2b = \sqrt{32}$$

۲۲ - گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 3 : \alpha \\ 2 : \beta \end{matrix} \right.$$



$$R^2 = \alpha^2 - \beta^2 - c = 9 + 4 - 11 = 2 \rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2y + a = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 2 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow C' \Big|_{-1; \beta}^{\circ: \alpha}$$

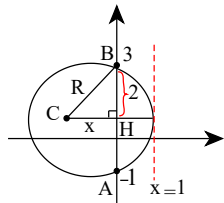
$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 0 + 1 - a \rightarrow R' = \sqrt{1-a}$$

$$\text{شرط مماس خارج: } CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{9+9} = \sqrt{2} + \sqrt{1-a} \rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{1-a}$$

$$\rightarrow 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{1-a} \rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{1-a} \rightarrow 8 = 1-a \rightarrow a = -7$$

۲۳ - گزینه ۴

ابتدا نمودار تقریبی دایره را رسم می‌کنیم.



$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \quad (\text{مرکز دایره روی عمود منصف AB است.})$$

$$\triangle BCH: R^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow R^2 = x^2 + 4 \xrightarrow{R=x+1} (x+1)^2 = x^2 + 4$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow C \Big|_{\frac{3}{2}; 1}^{-\frac{3}{2}}, R = x + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4}$$

نقطه  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  روی این دایره قرار دارد.

۲۴ - گزینه ۳ برای یافتن معادله وتر مشترک دو دایره، کافیست جملات از درجه دوم را بین آنها حذف کنیم.

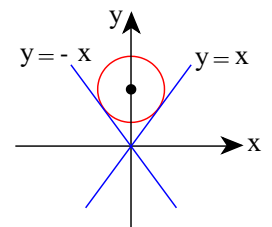
$$2x^2 + 2y^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - y - 8 = 0$$

فقط گزینه سوم در معادله وتر مشترک صدق می‌کند.

۲۵ - گزینه ۱ چون دایره بالای محور xها بوده و بر نیمسازهای نواحی اول و دوم مختصات مماس است. نتیجه می‌شود که مرکز آن روی محور yها قرار دارد (به شکل توجه کنید).

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \text{مرکز دایره: } C(0, 2)$$



برای محاسبه شعاع دایره، کافی است فاصله مرکز دایره از خط  $x - y = 0$  (نیمساز ناحیه اول) را به دست آوریم:

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{توجه کنید فاصله نقطه } A \Big|_{\beta}^{\alpha} \text{ از خط به معادله } ax + by + c = 0 \text{ می‌شود.}$$

۲۶ - گزینه ۴

$$x^2 + (y - 3)^2 = 4 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} C \Big|_{\circ}^{\circ} \\ R = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 8x + m = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow C' \Big|_{\circ: \beta}^{-4: \alpha}$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 16 + 0 - m \rightarrow R' = \sqrt{16 - m}$$

$$\text{شرط مماس خارج: } CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{16 + 9} = 2 + \sqrt{16 - m} \rightarrow 3 = \sqrt{16 - m}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 = 16 - m \rightarrow m = 7$$

۲۷ - گزینه ۲ چون نقطه A روی دایره قرار دارد بنابراین مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند.



$$A \Big|_{-1}^1 \xrightarrow{\text{صنق}} 1 + 1 + n(2 + 2) = 0 \rightarrow 2 + 4n = 0 \rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله‌ی دایره: } x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(2x - 2y) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{1 + 1 - 0}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۸ - گزینه ۲

$$MA = 3MB \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + (y-4)^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-2)^2 + y^2 = 9(x^2 + (y-4)^2)$$

$$\rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 = 9x^2 + 9y^2 + 144 - 72y = 0$$

$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 4x - 72y + 140 = 0 \xrightarrow{\div 8} x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 9y + \frac{35}{2} = 0$$

$$f'_x = 0 \rightarrow 2x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad f'_y = 0 \rightarrow 2y - 9 = 0 \rightarrow y = \frac{9}{2}$$

معادله‌ی مکان هندسی، دایره‌ای به مرکز  $\left(\frac{-1}{4}, \frac{9}{2}\right)$  می‌باشد.

۲۹ - گزینه ۴ دقت کنید معادله‌ی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در صورتی نشان دهنده‌ی معادله‌ی یک دایره است که  $R^2 > 0$  باشد و اگر نقطه‌ای خارج دایره باشد وقتی مختصات آن نقطه را در معادله‌ی دایره صدق دهیم، جواب باید مثبت شود.

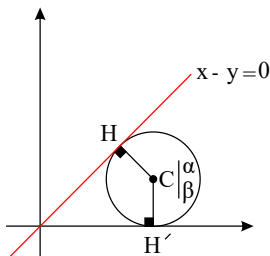
$$R^2 > 0 \rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0 \rightarrow \frac{4 + 16 - 4m}{4} > 0$$

$$\rightarrow 20 - 4m > 0 \rightarrow 4m < 20 \rightarrow m < 5 \quad (I)$$

$$A \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \xrightarrow{\text{صنق}} 1 + 4 + 2 - 8 + m > 0 \rightarrow m > 1 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب  $1 < m < 5$  می‌رسیم.

۳۰ - گزینه ۳ مطابق شکل، فاصله‌ی مرکز دایره از خط  $x - y = 0$  (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) باید بافاصله‌ی آن از خط  $y = 0$  (محور طول) برابر باشد.



$$\rightarrow CH = CH' \rightarrow \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{1+1}} = \beta \rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{2}\beta$$

$$\rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{2}\beta \rightarrow \alpha = \beta \pm \sqrt{2}\beta \rightarrow \alpha = (1 \pm \sqrt{2})\beta$$

چون دایره در ربع اول بر نیمساز ربع اول مماس است بنابراین  $\alpha$  و  $\beta$  مثبت هستند پس:

$$\alpha = (1 + \sqrt{2})\beta \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \Big|_{\beta}^{\alpha}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۳	۲۵ - ۱	۳۰ - ۳