نام آزمون: هندسه

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- دو خط $x+y+4=0$ و $2y=5-2x$ بر دایره‌ای مماس هستند. شعاع این دایره کدام است؟

① $\frac{13}{2\sqrt{2}}$

② $\frac{13}{4}$

③ $\frac{13}{4\sqrt{2}}$

④ $\frac{13}{2}$

۲- دو دایره با معادلات $x^2+y^2-4y=b$ و $x^2+y^2-2x=0$ مماس خارج هستند. مقدار b کدام است؟

① $2-2\sqrt{5}$

② $4-2\sqrt{5}$

③ $2\sqrt{5}$

④ 1

۳- شعاع دایره‌ای مماس بر هر دو محور مختصات که از نقطه‌ی (۱- و ۲) می‌گذرد، کدام است؟

① ۱ یا ۴

② ۱ یا ۵

③ ۲ یا ۳

④ ۲ یا ۴

۴- معادله‌ی تمام قائم‌های رسم شده بر دایره به صورت $y = m(x-y) + ۱$ است. اگر دایره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، محور xها را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

① $-۳, ۵$

② $۳, -۱$

③ $-۱ \pm ۳\sqrt{۲}$

④ $-۱ \pm ۲\sqrt{۳}$

۵- شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱), (-۲,۴), (۰,۰)$ می‌گذرد کدام است؟

① ۲

② ۲٫۵

③ ۳

④ ۳٫۵

۶- معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدا و مماس خارج بر دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y + ۱۲ = ۰$ کدام است؟

① $x^۲ + y^۲ = ۱۴ - ۲\sqrt{۱۳}$

② $x^۲ + y^۲ = ۱۲$

③ $x^۲ + y^۲ = ۱۴ + ۲\sqrt{۱۳}$

④ $x^۲ + y^۲ = ۱۴$

۷- چه نقاطی در نابرابری $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y \leq -۴$ صدق می‌کنند؟

① نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز $(۱, -۲)$ و شعاع $\sqrt{۸}$

② نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز $(-۱, ۲)$ و شعاع ۱

③ نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز $(-۱, ۲)$ و شعاع $\sqrt{۲}$

④ نقاط بیرون و روی دایره‌ای به مرکز $(۱, -۲)$ و شعاع ۱

۸ - به ازای کدام مقدار m خط $2x-3y+m=2$ بر دایره $x^2+y^2-4x+6y=0$ مماس است؟

(۱) ۲۴- و ۲

(۲) ۱۵- و ۲

(۳) ۱۸- و ۳

(۴) ۱۶- و ۳

۹ - به ازای کدام مقدار a، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x+y=1$ و خط به معادله‌ی $3x+2y=a$ در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها، ۹۰ درجه است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰ - فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از نقطه‌ی $A(3,6)$، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{5}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $4\sqrt{5}$

۱۱ - از نقطه‌ی $A(-2,-11)$ مماسی بر دایره‌ی به معادله‌ی $x^2-8x+y^2+6y=-21$ رسم می‌کنیم. طول خط مماس کدام است؟

(۱) $8\sqrt{6}$

(۲) $4\sqrt{6}$

(۳) $5\sqrt{2}$

(۴) $8\sqrt{2}$

۱۲ - اگر مرکز دایره‌ی $ax^۲ + y^۲ + bx - cy = ۰$، نقطه‌ی $(-۱, -۲)$ باشد، $a + b + c$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) -۱

(۳) ۰

(۴) ۲

۱۳ - دو دایره از نقطه‌ی $A(-۳, ۶)$ می‌گذرند و بر محورهای مختصات مماس‌اند. مجموع شعاع‌های آن‌ها کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۵

(۳) ۴۵

(۴) ۳۶

۱۴ - به ازای کدام مقدار k، خط $y = ۲x + k$ بر دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰$ مماس است؟

(۱) ± ۵

(۲) ۹- یا ۱

(۳) ۹ یا ۱

(۴) ۹ یا -۱

۱۵ - دو دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y = ۴$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y = ۱۱$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

(۱) مماس خارج

(۲) مماس داخل

(۳) متقاطع

(۴) متخارج

۱۶ - به ازای کدام مقدار a، رابطه‌ی $a^۲x^۲ + ۴y^۲ + ۸x - ۴y + a = ۰$ معادله‌ی یک دایره است؟

(۱) فقط ۲-

(۲) فقط ۲

(۳) ± ۲

(۴) هیچ مقدار

۱۷ - دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x-y=۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱

۲) ۴ و ۱

۳) ۳ و ۲

۴) ۴ و ۱٫۵

۱۸ - قائم بر دایره‌ی $x^۲+y^۲+ay+b=۰$ در نقطه‌ی $A(\sqrt{۳},۲)$ واقع بر آن، محور xها را در نقطه‌ای به طول $\left(-\sqrt{۳}\right)$ قطع می‌کند. $a-b$ کدام است؟

۱) -۵

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۵

۱۹ - قطری از دایره‌ی $x^۲+y^۲+۶x-۴y-۳=۰$ که موازی خط $y=۲x+۱$ است، از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۲,۴)$

۲) $(-۲,۲)$

۳) $(۰,۱)$

۴) $(۰,-۱)$

۲۰ - دو رأس کانونی یک بیضی $A(۷,۱)$ و $A'(-۳,۱)$ هستند. اگر بیضی بر محور xها مماس باشد، فاصله‌ی کانونی آن چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲۶}$

۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) $۴\sqrt{۶}$

۴) ۸

۲۱ - مجموع فواصل نقطه‌ی P روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت M و N به طول‌های ۳− و ۴ روی محور xها برابر ۹ است. اندازه‌ی قطر کوچک این بیضی کدام است؟

① $\sqrt{۳۲}$

② $\sqrt{۳۴}$

③ $\sqrt{\frac{۳۲}{۲}}$

④ $\frac{\sqrt{۳۴}}{۴}$

۲۲ - دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۶x-۴y+۱۱=۰$ و $x^۲+y^۲+۲y+a=۰$ مماس خارج هستند. a کدام است؟

① ۷

② ۷−

③ ۶

④ ۶−

۲۳ - دایره‌ای از دو نقطه‌ی $A(۰,-۱)$ و $B(۰,۳)$ می‌گذرد و برخط $x=۱$ مماس است. کدام‌یک از نقاط زیر روی این دایره قرار دارد؟

① $(-\frac{۳}{۲},۲)$

② $(-\frac{۱}{۲},۱)$

③ $(\frac{۳}{۲},۰)$

④ $(-\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲})$

۲۴ - معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲+۳x-y-۱۰=۰$, $۲x^۲+۲y^۲-۲x-۴=۰$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

① $(۲\,,\,۱)$

② $(-۱\,,\,۲)$

③ $(۳\,,\,۴)$

④ $(-۴\,,\,۳)$

۲۵ – معادله‌ی دایره‌ای که بالای محور xها بوده و بر نیمسازهای نواحی اول و دوم مختصات مماس است و مرکز آن بر روی خط $x+2y-4=0$ قرار دارد کدام است؟

① $x^2+y^2-4y+2=0$

② $x^2+y^2-4x+2=0$

③ $x^2+y^2-4y=0$

④ $x^2+y^2-4x=0$

۲۶ – دو دایره به معادله‌های $x^2+(y-3)^2=4$ و $x^2+y^2+8x+m=0$ ، مماس خارج هستند. m کدام است؟

① ۴

② ۵

③ ۶

④ ۷

۲۷ – دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2+n(2x-2y)=0$ از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ می‌گذرد. شعاع این دایره کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

④ $\frac{1}{4}$

۲۸ – اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ تا نقطه‌ی $A(2,0)$ سه برابر فاصله‌اش تا نقطه‌ی $B(0,4)$ باشد، معادله‌ی مکان هندسی M کدام است؟

① دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{2},\frac{9}{2})$

② دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{4},\frac{9}{2})$

③ دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{2},9)$

④ دایره‌ای مرکز $(-1,-9)$

۲۹ - اگر نقطه‌ی $A(۱,۲)$ خارج دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۴y+m=۰$ واقع باشد، مقادیر m به کدام صورت است؟

(۱) $m<-۱$

(۲) $-۵<m<-۱$

(۳) $m>۱$

(۴) $۱<m<۵$

۳۰ - دایره‌ای به مرکز (α,β) در ربع اول دستگاه مختصات بر محور xها و نیمساز ربع اول مماس است. $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{۲}$

(۲) $\sqrt{۲}+۱$

(۳) $\sqrt{۲}-۱$

(۴) $۱-\sqrt{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با: $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ضرایب x, y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند)

این دو خط موازی‌اند چون شیب هایشان برابر است، پس فاصله‌ی آن‌ها برابر قطر دایره است:

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ x+y-\frac{5}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow 2R=\frac{|4-(-\frac{5}{2})|}{\sqrt{1+1}}=\frac{13}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R=\frac{13}{4\sqrt{2}}$$

۲ - گزینه ۱ دو دایره‌ی به مراکز C و C' مماس خارج‌اند، هرگاه $CC'=R+R'$ باشد.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow C\left|^{1}_{0}\right., R=1 \\ x^2+y^2-4y=b \Rightarrow x^2+(y-2)^2=b+4 \Rightarrow C'\left|^{0}_{2}\right., R'=\sqrt{b+4} \end{cases}$$

$$CC'=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}=R+R'=1+\sqrt{b+4} \Rightarrow \sqrt{b+4}=\sqrt{5}-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} b+4=5+1-2\sqrt{5} \Rightarrow b=2-2\sqrt{5}$$

۳ - گزینه ۲ ۱-مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R, R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, R)$ است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, -R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R, -R)$ است.

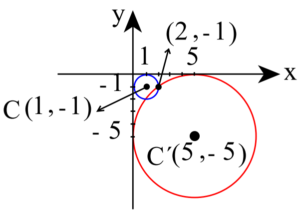
که R شعاع دایره است.

این دایره از نقطه‌ی $(2, -1)$ می‌گذرد، پس باید در ربع چهارم باشد، پس مرکز این دایره به صورت $C(R, -R)$ است. چون نقطه‌ی $A(2, -1)$ روی این دایره است، داریم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \xrightarrow[\text{صدق}]{\left|^{2}_{-1}\right.} (2-R)^2+(-1+R)^2=R^2$$

$$\Rightarrow 4-4R+R^2+1-2R+R^2=R^2 \Rightarrow R^2-6R+5=0 \Rightarrow (R-5)(R-1)=0 \Rightarrow R=1,5$$

بنابراین دو دایره با مراکز $(1, -1)$ و $(5, -5)$ به ترتیب با شعاع‌های ۱ و ۵ با این ویژگی‌ها وجود دارد.



۴ - گزینه ۲ قائم‌های رسم شده بر دایره، همگی از مرکز دایره می‌گذرند برای این منظور دو مقدار دلخواه به m داده و با تشکیل دستگاه بین دو خط بدست آمده مختصات مرکز دایره را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} m=0 \to y=1 \\ m=1 \to y=x-y+1 \to 1=x-1+1 \to x=1 \end{cases} \quad C \to \left|^{1}_{1}\right.$$

چون این دایره محور عرض را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند بنابراین نقطه‌ی $A\left|^{0}_{3}\right.$ روی دایره قرار دارد فاصله‌ی A تا C برابر شعاع دایره است.

$$R=AC=\sqrt{(0-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

معادله‌ی دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \to (x-1)^2+(y-1)^2=5 \xrightarrow{y=0} (x-1)^2+1=5$

$$\to (x-1)^2=4 \to \begin{cases} x-1=2 \to x=3 \\ x-1=-2 \to x=-1 \end{cases}$$

۵ - گزینه ۲ معادله‌ی دایره در حالت گسترده به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم.

$$A\left|^{0}_{0}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} c=0$$

$$\left.\begin{array}{l} B\left|^{-2}_{4}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4+16-2a+4b=0 \\ C\left|^{2}_{1}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4+1+2a+b=0 \end{array}\right\} \to a=0\ ,\ b=-5$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b و c، شعاع دایره برابر است با:

$$R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}=\frac{0+25-0}{4}=\frac{25}{4}\rightarrow R=\frac{5}{2}=2/5$$

۶ - گزینه ۱ دو دایره به مراکز C و C' و شعاع‌های R و R' مماس خارج‌اند، هرگاه: $CC'=R+R'$ باشد.

$$x^2+y^2-6x+4y+12=0\Rightarrow\begin{cases}f'_x=0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3\\ f'_y=0\Rightarrow 2y+4=0\Rightarrow y=-2\end{cases}\Rightarrow C\Big|_{-2}^{3}$$

$$R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}=\frac{36+16-48}{4}=1\Rightarrow R=1$$

$$CC'=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}\ ,\ \ R+R'=\sqrt{13}\xrightarrow{R=1}R'=\sqrt{13}-1$$

بنابراین معادله‌ی دایره عبارت است از: $\left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\right)$

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{13}-1\right)^2=13+1-2\sqrt{13}=14-2\sqrt{13}$$

۷ - گزینه ۲

$$x^2+y^2+2x-4y\le -4\Rightarrow x^2+y^2+2x-4y+4\le 0\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2\le 1$$

پس نقاط مورد نظر، نقاط درون و روی دایره‌ی $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ هستند، یعنی نقاط درون و روی دایره‌ای به مرکز $(-1,2)$ و شعاع ۱.

۸ - گزینه ۱

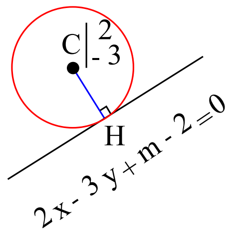
$$\begin{aligned}&f'_x=0\rightarrow 2x-4=0\ \rightarrow x=2\\ &f'_y=0\rightarrow 2y+6=0\ \rightarrow y=-3\end{aligned}\Rightarrow C\ \Big|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}$$

$$R^2=\alpha^2+\beta^2-c=4+9-0=13\rightarrow R=\sqrt{13}$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر شعاع دایره است.

$$CH=R=\frac{|4+9+m-2|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|m+11|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

$$\rightarrow\ |m+11|=13\Rightarrow\begin{cases}m+11=13\rightarrow m=2\\ m+11=-13\rightarrow m=-24\end{cases}$$



توجه کنید فاصله نقطه $A\Big|_{\beta}^{\alpha}$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ از رابطه $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می‌آید.

۹ - گزینه ۱ خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد.

$$f'_x=0\rightarrow 2x-2=0\rightarrow x=1\quad ,\quad f'_y=0\rightarrow 2y+1=0\rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

اکنون کافی است که مختصات مرکز دایره $C\ \Big|\begin{matrix}1\\-\frac{1}{2}\end{matrix}$ را در خط به معادله‌ی $3x+2y=a$ صدق دهیم.

$$3(1)+2(-\frac{1}{2})=a\rightarrow 3-1=a\rightarrow a=2$$

۱۰ - گزینه ۴

$$AM=2OM\rightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow (x-3)^2+(y-6)^2=4x^2+4y^2$$

$$\rightarrow x^2+9-6x+y^2+36-12y=4x^2+4y^2\rightarrow 3x^2+3y^2+6x+12y-45=0$$

$\rightarrow x^2+y^2+2x+4y-15=0$:معادله‌ی دایره

$$R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}=\frac{4+16+60}{4}=\frac{80}{4}=20\rightarrow R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

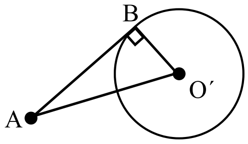
$\rightarrow$ بزرگترین وتر $\,=\,$ قطر $=4\sqrt{5}$

۱۱ - گزینه ۲ روش اول: در معادله‌ی دایره‌ی داده شده داریم:

$$x^2-8x+y^2+6y=-21\Rightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=4\Rightarrow R=2\ ,\ O'(4,-3)$$

حال با توجه به شکل داریم:

$$O'A=\sqrt{(-2-4)^2+(-11-(-3))^2}=10$$



$\rightarrow O'B = R = 2$

$\Rightarrow (O'A)^2 = (O'B)^2 + (AB)^2 \rightarrow 100 = 4 + AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

روش دوم: کافی است نقطه‌ی داده شده را در معادله‌ی دایره قرار دهیم و از عدد حاصل جذر بگیریم.

$x^2 - 8x + y^2 + 6y + 21 = 0 \xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}-2\\-11\end{smallmatrix}\right.} 4 + 16 + 121 - 66 + 21 = 96 \rightarrow$ طول مماس $= \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

۱۲ - گزینه ۲ چون منحنی داده شده یک دایره است، پس ضریب x^2 و y^2 برابر هستند بنابراین $a = 1$ است و برای پیدا کردن مختصات مرکز دایره یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y، مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} f'_x = 2x + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2} \Rightarrow -1 = \dfrac{-b}{2} \Rightarrow b = 2 \\ f'_y = 2y - c = 0 \Rightarrow y = \dfrac{c}{2} \Rightarrow -2 = \dfrac{c}{2} \Rightarrow c = -4 \end{cases}$$

پس $a + b + c = -1$ می‌باشد.

۱۳ - گزینه ۱ ۱-مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R, R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, R)$ است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, -R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R, -R)$ است.

که R شعاع دایره است.

طبق نکته‌ی مذکور مرکز این دایره‌ها $C\left|\begin{smallmatrix}-R\\R\end{smallmatrix}\right.$ می‌باشد پس معادله‌ی این دو دایره به صورت زیر است:

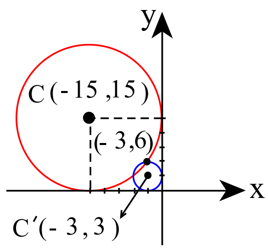
$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

نقطه‌ی $(-3, 6)$ در این معادله صدق می‌کند:

$$(-3 + R)^2 + (6 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 6R + 9 + R^2 - 12R + 36$$

$$\Rightarrow R^2 - 18R + 45 = 0$$

$$\text{مجموع شعاع‌ها} = R_1 + R_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-18)}{1} = 18$$



۱۴ - گزینه ۲ ابتدا معادله دایره را استاندارد می‌کنیم و می‌دانیم فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \Rightarrow C(1, -2)\ ,\ R = \sqrt{5}$

$2x - y + k = 0$ فاصله مرکز دایره تا خط $= R = \dfrac{|2 + 2 + k|}{\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{|4 + k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\rightarrow |4 + k| = 5 \rightarrow k + 4 = \pm 5 \rightarrow k = 1$ یا $k = -9$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ می‌شود: $AH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۱۵ - گزینه ۳

$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 4$

$\Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow C\left|\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right., R = 3$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$

$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 = 11 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow C'\left|\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right., R' = 4$

$CC' = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

چون $|R - R'| < CC' < R + R'$ است دو دایره متقاطع هستند.

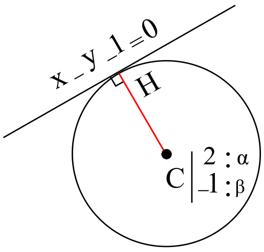
۱۶ - گزینه ۳ در معادله‌ی دایره ضرایب x^2 و y^2 مساوی هستند. بنابراین: $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

حال قابل قبول بودن هر یک از این مقادیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴y^۲+۸x-۴y+۲=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-y+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴} \\ a=-۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴y^۲+۸x-۴y-۲=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-y-\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۷}{۴} \end{cases}$$

بنابراین هر دو مقدار ۲ و ۲- قابل قبول‌اند.

۱۷ - گزینه ۱



فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، نشان‌دهنده شعاع دایره می‌باشد.

$$R=CH=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

معادله‌ی دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲ \xrightarrow{y=۰} (x-۲)^۲+۱=۲$

$$\rightarrow (x-۲)^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \rightarrow x=۳ \\ x-۲=-۱ \rightarrow x=۱ \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به دست می‌آید.

۱۸ - گزینه ۳

$$f'_x=۰ \rightarrow ۲x=۰ \rightarrow x=۰ \quad , \quad f'_y=۰ \rightarrow ۲y+a=۰ \rightarrow y=-\frac{a}{۲} \rightarrow C\left|\begin{matrix}۰ & : & \alpha \\ -\frac{a}{۲} & : & \beta\end{matrix}\right.$$

قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین قائم بر دایره از سه نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\ ۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-\sqrt{۳}\\ ۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\ -\frac{a}{۲}\end{matrix}\right.$ می‌گذرد یعنی این سه نقطه، همراستا هستند پس شرط همراستا بودن سه نقطه را می‌نویسیم.

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C} \rightarrow \frac{۲-۰}{\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}=\frac{۰+\frac{a}{۲}}{-\sqrt{۳}-۰} \rightarrow -۲\sqrt{۳}=a\sqrt{۳} \rightarrow a=-۲$$

از طرفی نقطه‌ی $A(\sqrt{۳},۲)$، متعلق به دایره است، پس در معادله‌ی دایره، صدق می‌کند.

$$(\sqrt{۳})^۲+۲^۲+(-۲)(۲)+b=۰ \Rightarrow b=-۳ \rightarrow a-b=-۲-(-۳)=۱$$

۱۹ - گزینه ۱ قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین ابتدا باید مختصات مرکز دایره را بدست آوریم.

$$f'_x=۰ \rightarrow ۲x+۶=۰ \rightarrow x=-۳ \ , \ f'_y=۰ \rightarrow ۲y-۴=۰ \rightarrow y=۲ \rightarrow C|_{۲}^{-۳}$$

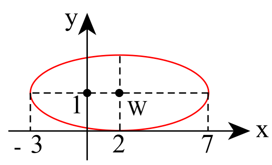
$$y=۲x+۱ \rightarrow m_{\text{قطر}}=۲ \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{خط}}=۲$$

حال، با داشتن شیب و یک نقطه، معادله‌ی خط را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} C\left|\begin{matrix}-۳\\ ۲\end{matrix}\right. \\ m=۲ \end{cases} \rightarrow y-۲=۲(x+۳) \rightarrow y=۲x+۸$$

فقط گزینه اول در معادله‌ی این خط صدق می‌کند.

۲۰ - گزینه ۳



$y_A=y_{A'} \rightarrow$ بیضی افقی و $AA'=۲a \rightarrow ۲a=۱۰ \rightarrow a=۵$

$$W \left|\begin{matrix}\frac{۷-۳}{۲}=۲ \\ \frac{۱+۱}{۲}=۱\end{matrix}\right. \quad \text{وسط } AA'$$

با توجه به شکل، $b=۱$ است.

$$c^۲=a^۲-b^۲=۵^۲-۱^۲=۲۴ \Rightarrow c=۲\sqrt{۶} \Rightarrow FF'=۲c=۴\sqrt{۶}$$

۲۱ - گزینه ۱ طبق تعریف بیضی، مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، مقداری ثابت برابر $۲a$ است.

$$۲a=۹ \rightarrow a=\frac{۹}{۲} \text{ و } F\Big|_{۰}^{۴}, F'\Big|_{۰}^{-۳} \rightarrow FF'=۲c \rightarrow ۲c=۷ \rightarrow c=\frac{۷}{۲}$$

$$c^۲=a^۲-b^۲ \rightarrow \frac{۴۹}{۴}=\frac{۸۱}{۴}-b^۲ \rightarrow b^۲=\frac{۳۲}{۴} \rightarrow b=\frac{\sqrt{۳۲}}{۲} \rightarrow ۲b=\sqrt{۳۲}$$

۲۲ - گزینه ۲

$$x^۲+y^۲-۶x-۴y+۱۱=۰ \rightarrow \begin{cases} f'_x=۰ \rightarrow ۲x-۶=۰ \rightarrow x=۳ \\ f'_y=۰ \rightarrow ۲y-۴=۰ \rightarrow y=۲ \end{cases} \rightarrow C\left|\begin{matrix}۳:\alpha\\ ۲:\beta\end{matrix}\right.$$

$R^2 = \alpha^2 - \beta^2 - c = 9 + 4 - 11 = 2 \to R = \sqrt{2}$

$x^2 + y^2 + 2y + a = 0 \to \begin{cases} f'_x = 0 \to 2x = 0 \to x = 0 \\ f'_y = 0 \to 2y + 2 = 0 \to y = -1 \end{cases} \to C' \Big|\begin{matrix} 0 & :\alpha \\ -1 & :\beta \end{matrix}$

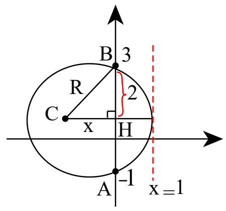
$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 0 + 1 - a \to R' = \sqrt{1-a}$

شرط مماس خارج : $CC' = R + R' \to \sqrt{9+9} = \sqrt{2} + \sqrt{1-a} \to \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{1-a}$

$\to 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{1-a} \to 2\sqrt{2} = \sqrt{1-a} \to 8 = 1 - a \to a = -7$

۲۳ - گزینه ۴

ابتدا نمودار تقریبی دایره را رسم می‌کنیم.



$y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1$ (مرکز دایره روی عمود منصف AB است.)

$B\overset{\Delta}{C}H : R^2 = x^2 + 2^2 \to R^2 = x^2 + 4 \xrightarrow{R=x+1} (x+1)^2 = x^2 + 4$

$\to x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4 \to 2x = 3 \to x = \dfrac{3}{2} \to C\Bigg|\begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \ , \ R = x + 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

معادله‌ی دایره: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \to (x + \dfrac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = \dfrac{25}{4}$

نقطه‌ی $\Bigg|\begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{matrix}$ روی این دایره قرار دارد.

۲۴ - گزینه ۳ برای یافتن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره، کافیست جملات از درجه دوم را بین آنها حذف کنیم.

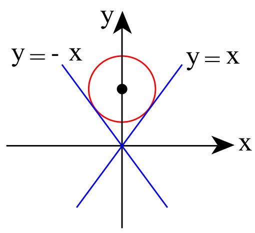
$2x^2 + 2y^2 - 2x - 4 = 0 \ \to \ x^2 + y^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow \ - \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - y - 8 = 0$

فقط گزینه سوم در معادله وتر مشترک صدق می‌کند.

۲۵ - گزینه ۱ چون دایره بالای محور xها بوده و بر نیمسازهای نواحی اول و دوم مختصات مماس است. نتیجه می‌شود که مرکز آن روی محور yها قرار دارد (به شکل توجه کنید.)

$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \ \Rightarrow \ y = 2 \ \Rightarrow$ مرکز دایره : $C(0\ ,\ 2)$



برای محاسبه‌ی شعاع دایره، کافی است فاصله‌ی مرکز دایره از خط $x - y = 0$ (نیمساز ناحیه‌ی اول) را به دست آوریم:

شعاع دایره : $R = \dfrac{|0 - 2|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \to x^2 + (y-2)^2 = 2 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\Big|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ می‌شود: $AH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۲۶ - گزینه ۴

$x^2 + (y-3)^2 = 4 \to (x - 0)^2 + (y-3)^2 = 4 \to \begin{cases} C\Big|\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \\ R = 2 \end{cases}$

$x^2 + y^2 + 8x + m = 0 \to \begin{cases} \left.\begin{matrix} f'_x = 0 \to 2x + 8 = 0 \to x = -4 \\ f'_y = 0 \to 2y = 0 \to y = 0 \end{matrix}\right\} \to C'\Big|\begin{matrix} -4 & : \alpha \\ 0 & : \beta \end{matrix} \\ R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 16 + 0 - m \to R' = \sqrt{16 - m} \end{cases}$

شرط مماس خارج : $CC' = R + R' \to \sqrt{16 + 9} = 2 + \sqrt{16 - m} \to 3 = \sqrt{16 - m}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \ 9 = 16 - m \to m = 7$

۲۷ - گزینه ۲ چون نقطه‌ی A روی دایره قرار دارد بنابراین مختصات آن در معادله‌ی دایره صدق می‌کند.

$A\Big|_{-۱}^{۱} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱+۱+n(۲+۲)=۰ \to ۲+۴n=۰ \to n=-\frac{۱}{۲}$

معادله‌ی دایره: $x^۲+y^۲-\frac{۱}{۲}(۲x-۲y)=۰ \to x^۲+y^۲-x-y=۰$

$$R^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}=\frac{۱+۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۲} \to R=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۸ - گزینه ۲

$$MA=۳MB \to \sqrt{(x-۲)^۲+y^۲}=۳\sqrt{x^۲+(y-۴)^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-۲)^۲+y^۲=۹(x^۲+(y-۴)^۲)$$
$$\to x^۲+۴-۴x+y^۲=۹x^۲+۹y^۲+۱۴۴-۷۲y=۰$$
$$\to ۸x^۲+۸y^۲+۴x-۷۲y+۱۴۰=۰ \xrightarrow{\div ۸} x^۲+y^۲+\frac{۱}{۲}x-۹y+\frac{۳۵}{۲}=۰$$

$f'_x=۰ \to ۲x+\frac{۱}{۲}=۰ \to x=-\frac{۱}{۴}$ و $f'_y=۰ \to ۲y-۹=۰ \to y=\frac{۹}{۲}$

معادله‌ی مکان هندسی، دایره‌ای به مرکز $\left|\begin{matrix}-\frac{۱}{۴}\\ \frac{۹}{۲}\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

۲۹ - گزینه ۴ دقت کنید معادله‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در صورتی نشان دهنده‌ی معادله ی یک دایره است که $R^۲>۰$ باشد و اگر نقطه‌ای خارج دایره باشد وقتی مختصات آن نقطه را در معادله‌ی دایره صدق دهیم، جواب باید مثبت شود.

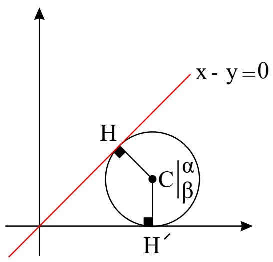
$$R^۲>۰ \to \frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}>۰ \to \frac{۴+۱۶-۴m}{۴}>۰$$
$$\to ۲۰-۴m>۰ \to ۴m<۲۰ \to m<۵ \quad (I)$$

$$A\Big|_{۲}^{۱} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱+۴+۲-۸+m>۰ \to m>۱ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۱<m<۵$ می‌رسیم.

۳۰ - گزینه ۳ مطابق شکل، فاصله‌ی مرکز دایره از خط $x-y=۰$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) باید بافاصله‌ی آن از خط $y=۰$ (محور طول) برابر باشد.

$$\to CH=CH' \to \frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{۱+۱}}=\beta \to |\alpha-\beta|=\sqrt{۲}\beta$$
$$\to \alpha-\beta=\pm\sqrt{۲}\beta \to \alpha=\beta\pm\sqrt{۲}\beta \to \alpha=(۱\pm\sqrt{۲})\beta$$



چون دایره در ربع اول بر نیمساز ربع اول مماس است بنابراین α و β مثبت هستند پس:

$$\alpha=(۱+\sqrt{۲})\beta \to \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}\times\frac{۱-\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۱-۲}=\sqrt{۲}-۱$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۳	۲۵ - ۱	۳۰ - ۳