نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+b$ در $(۱,۲)$ اکسترمم دارد. عدد a و نوع اکسترمم کدام است؟

(۱) $\frac{۳}{۲}$ و ماکسیمم

(۲) $-\frac{۳}{۲}$ و ماکسیمم

(۳) $\frac{۳}{۲}$ و می‌نیمم

(۴) $-\frac{۳}{۲}$ و می‌نیمم

۲ - بیشترین مقدار تابع $y=x^{۳}-x^{۲}-x$ در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{۵}{۲۷}$

(۳) $\frac{۱۳}{۲۷}$

(۴) ۲

۳ - حداقل مقدار تابع $y=\cos ۲x-\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۹}{۸}$

(۲) $-\frac{۷}{۸}$

(۳) -۱

(۴) $-\frac{۱۱}{۸}$

۴- اگر تابع $f(x)=2x+\dfrac{a}{x+1}$ در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\beta\\ 6\end{matrix}\right.$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقدار β کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۱−

(۳) ۲

(۴) ۲−

۵- تعداد نقاط بحرانی تابع $y=x\sqrt{x^2-4}$ بر روی دامنه‌ی خود کدام است؟

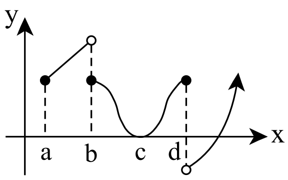
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۰

۶- نمودار تابع f به صورت زیر است. با توجه به نمودار، تابع به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟



(۱) یک- یک

(۲) دو- یک

(۳) یک- دو

(۴) یک- صفر

۷- تابع $f(x)=|x^2-1|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۸- تابع $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3}$ در بازه‌ی $(-1,2)$ چگونه است؟

(۱) فقط یک ماکسیمم نسبی دارد.

(۲) فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.

(۳) یک ماکسیمم و یک می‌نیمم نسبی دارد.

(۴) ماکسیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۹ – بیش‌ترین مقدار تابع $y = x + \dfrac{4}{x+1}$ روی بازه‌ی $[0,2]$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) $\dfrac{10}{3}$

(۴) ۴

۱۰ – تابع $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \sqrt{2}$ در بازه‌ی $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۱ – مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{12-2x}$ کدام است؟

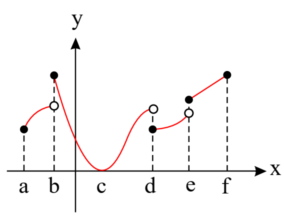
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{2}$

۱۲ – شکل زیر نمودار تابع f است. تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب کدام است؟



(۱) یک – یک

(۲) یک – دو

(۳) دو – یک

(۴) دو – دو

۱۳- اگر $(1,-2)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درجه‌ی سوم $f(x)=ax^3+bx$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۴- ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=-x^3+3x^2-2$ در بازه‌ی $[1,4]$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۶

۱۵- مینیمم نسبی تابع $y=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(۲) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

(۴) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

۱۶- اگر $f(x)=[x]$ باشد، مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $y=f(x+f(-x))$ کدام است؟ ($[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

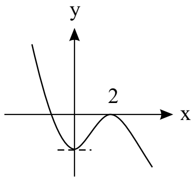
(۱) $\mathbb{Z}$

(۲) $\mathbb{R}$

(۳) $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Z}$

(۴) $\mathbb{Z}-\{0\}$

۱۷ – شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=mx^{۳}-nx^{۲}-۸$ می‌باشد. مقدار m کدام است؟



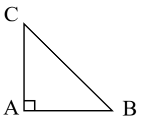
① -۲

② ۲

③ -۶

④ ۶

۱۸ – مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که وتر آن $۵\sqrt{۳}$ است، حول ضلع AB دوران می‌دهیم. بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم شکل حاصل کدام است؟



① $\frac{۵۰\pi}{۳}$

② ۵۰π

③ $\frac{۲۵۰\pi}{۳}$

④ $\frac{۲۰۰\pi}{۳}$

۱۹ – طول پاره‌خط واصل بین نقاط ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}(x-۲)$ چقدر است؟

① $\frac{۲}{۹}\sqrt{۸۵}$

② $\frac{۲}{۲۷}\sqrt{۸۵}$

③ $\frac{۲}{۹}\sqrt{۸۵}$

④ $\frac{۲}{۸۱}\sqrt{۱۷۵}$

۲۰ – در یک مخروط قائم با سطح جانبی π، شعاع قاعده کدام باشد تا حجم مخروط بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟

① $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}$

② $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

③ $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}$

④ $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$

۲۱ - ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{5}{16}$

۲۲ - مجموع قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۵ است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم این استوانه چقدر است؟

① 250π

② $\frac{125}{3}\pi$

③ 125π

④ 75π

۲۳ - مقدار ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 - 8x^2$ روی بازه‌ی $[-1, 3]$، چقدر از مقدار می‌نیمم مطلق آن روی این بازه بیش‌تر است؟

① ۲۵

② ۲۳

③ ۲۱

④ ۱۶

۲۴ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3 + a$، مقدار می‌نیمم نسبی -21 است. نقطه‌ی ماکسیمم نسبی در کدام ناحیه قرار دارد؟

① اول

② دوم

③ سوم

④ چهارم

۲۵ـ تابع $g(x) = -۶x^{۵} + ۵۰x^{۳} - ۱۲۰x + ۱$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

① ۴
② ۳
③ ۲
④ ۱

۲۶ـ مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۱$ در بازه‌ی $[۱,۴]$ کدام است؟

① -۱
② -۳
③ -۵
④ -۷

۲۷ـ تابع $f(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۷}{۵}}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

① صفر
② ۱
③ ۲
④ ۳

۲۸ـ در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانهٔ قائم با حجم π ، با کدام ارتفاع کم‌ترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

① ۱
② $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
③ $\frac{۱}{۲}$
④ $\sqrt[۳]{۲}$

۲۹- اگر $f(x)=1+2\sin(\frac{3\pi}{2}-x)$، آنگاه مقدار $f(\frac{2\pi}{3})+f(-\frac{\pi}{3})$، چند برابر مقدار ماکسیمم تابع است؟

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{4}$

۳۰- تابع $f(x)=3x^5-25x^3+60x-1$ چند مینیمم نسبی دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۴ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$f(۱)=۲ \to ۱+a+b=۲ \Rightarrow a+b=۱$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax \to f'(۱)=۰ \to ۳(۱)^۲+۲a(۱)=۰ \Rightarrow ۳+۲a=۰ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\ ,\ b=\frac{۵}{۲}$$

برای تشخیص نوع اکسترمم، از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

$$y=x^۳+ax^۲+b \to y'=۳x^۲+۲ax=۳x^۲-۳x=۳x(x-۱)=۰ \to x=۰\ ,\ x=۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{۵}{۲}$	$\searrow$	۲	$\nearrow$	
					Min		

۲ – گزینه ۴

$$y=x^۳-x^۲-x \Rightarrow y'=۳x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x=۱\quad ,\quad x=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$$

حال، مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} y(۱)=۱-۱-۱=-۱ \\ y(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۹}-(-\frac{۱}{۳})=\frac{-۱-۳+۹}{۲۷}=\frac{۵}{۲۷} \\ y(-۲)=-۸-۴-(-۲)=-۱۰ \\ y(۲)=۸-۴-۲=۲ \end{array}\right\} \to y_{Max}=۲$$

۳ – گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=۲\cos^۲ a-۱}$

$$y=\cos ۲x-\cos x \Rightarrow y=۲\cos^۲ x-۱-\cos x \xrightarrow{\cos x=A} y=۲A^۲-۱-A\ ,\ A\in[-۱\ ,\ ۱]$$

(چون وقتی $۰\le x\le ۲\pi$ است آنگاه $-۱\le \cos x\le ۱$ است)

$$y'=۴A-۱=۰ \to A=\frac{۱}{۴}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(-۱)=۲-۱+۱=۲ \\ y(۱)=۲-۱-۱=۰ \\ y(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۸}-۱-\frac{۱}{۴}=-\frac{۹}{۸} \end{array}\right\} \to y_{Min}=-\frac{۹}{۸}$$

۴ – گزینه ۱ در توابع مشتق پذیر اگر $y=k$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد آنگاه خط افقی $y=k$ بر منحنی مماس بوده و معادله تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.

چون عرض نقطه‌ی مینیمم تابع برابر ۶ است یعنی خط $y=۶$ بر تابع مماس است. پس معادله تلاقی این دو باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادله تلاقی: $\begin{cases} y=۲x+\frac{a}{x+۱} \\ y=۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x+\frac{a}{x+۱}=۶ \xrightarrow{\times(x+۱)} ۲x^۲+۲x+a=۶x+۶ \Rightarrow ۲x^۲-۴x+a-۶=۰$

شرط ریشه مضاعف: $\Delta=۰ \Rightarrow ۱۶-۴(۲)(a-۶)=۰ \Rightarrow ۱۶-۸a+۴۸=۰ \Rightarrow a=۸$

طول اکسترمم نسبی: $a=۸ \xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} ۲x^۲-۴x+۲=۰ \to x^۲-۲x+۱=۰ \to (x-۱)^۲=۰ \to x=۱$

۵ – گزینه ۲ نقاط بحرانی، نقاطی هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

می‌دانیم که ابتدا و انتهای دامنه نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$D_f : x^۲-۴\ge ۰ \to D_f : x\ge ۲$ یا $x\le -۲$ یا $x\in[۲,+\infty)\cup(-\infty,-۲]$

$y'=\sqrt{x^۲-۴}+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۴}}(x)=\frac{x^۲-۴+x^۲}{\sqrt{x^۲-۴}}=\frac{۲x^۲-۴}{\sqrt{x^۲-۴}}=۰ \Rightarrow x=\sqrt{۲}\ ,\ x=-\sqrt{۲}$ بحرانی نمی‌باشند

فقط ابتدا و انتهای بازه بحرانی هستند.

۶ – گزینه ۱ تابع در $x=c$ دارای Min نسبی و در $x=d$ دارای Max نسبی است. (ابتدای بازه، اکسترمم نسبی نمی‌باشد و در نقاط b و d مقدار تابع از یکی از همسایه‌های راست و چپ بالاتر و از دیگری پایین تر است بنابراین اکسترمم نسبی نمی‌باشند)

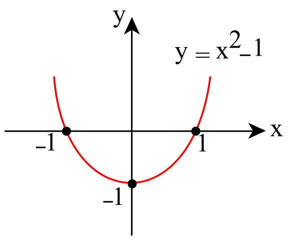
۷ – گزینه ۳ روش اول :

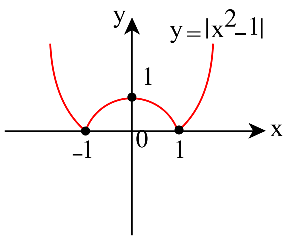
در تابع $y=|u|$ از حل معادلات $u=۰\ ,\ u'=۰$ می‌توان طول نقاط بحرانی تابع را بدست آورد.

$\left.\begin{array}{l} u=۰ \to x^۲-۱=۰ \to x=۱, x=-۱ \\ u'=۰ \to ۲x=۰ \to x=۰ \end{array}\right\} \to$ ۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.

روش دوم :

به کمک رسم شکل، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.





همانطور که مشاهده می‌کنید در $x=-۱, x=۱$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x=۰$، مشتق برابر صفر است.

۸ - گزینه ۲ برای راحتی در مشتق گرفتن، ابتدا تابع را تفکیک می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۳}{x^۳}-\frac{x^۲}{x^۳}+\frac{۱}{x^۳}\to f(x)=۱-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۳}\to f'(x)=\frac{۱}{x^۲}-\frac{۳x^۲}{x^۶}$$

$=\frac{۱}{x^۲}-\frac{۳}{x^۴}=\frac{x^۲-۳}{x^۴}=۰\to x=\pm\sqrt{۳}$ و در $x=۰$، مشتق وجود ندارد

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y′		+	0	–	‖	–	0	+	
y		↗	Max	↘	‖	↘	Min	↗	

$\Rightarrow$ واضح است در $(-۱,۲)$ یک Min نسبی وجود دارد.

۹ - گزینه ۴

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$y=x+\frac{۴}{x+۱}\to y'=۱-\frac{۴}{(x+۱)^۲}=۰\to ۱=\frac{۴}{(x+۱)^۲}\to (x+۱)^۲=۴$$

$$\to\begin{cases}x+۱=۲\to x=۱\\ x+۱=-۲\to x=-۳\end{cases}$$ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق

$f(۰)=۴,\ f(۱)=۳,\ f(۲)=\frac{۱۰}{۳}\to$ مطلق $Max=۴$

۱۰ - گزینه ۴ در فاصله‌ای که $f'(x)\le ۰$ است تابع نزولی می‌باشد.

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}-x^۲-۳x+\sqrt{۲}\to f'(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)=۰\to x=۳, x=-۱$$

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		↗		↘		↗	

بنابراین تابع در $[-۱,۳]$ نزولی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر $۳-(-۱)=۴$ است.

۱۱ - گزینه ۲ چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف تابع را به عنوان بازه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{matrix}x-۲\ge ۰\to x\ge ۲\\ ۱۲-۲x\ge ۰\to x\le ۶\end{matrix}\quad\to\ D_f=[۲,۶]$$

کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقطه‌ی بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}-\frac{۱(-۲)}{۲\sqrt{۱۲-x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۲-x}}$$

مشتق صفر نمی‌شود به ازای $x=۲$ و $x=۱۲$ مشتق وجود ندارد که هیچ کدام بحرانی نمی‌باشند زیرا یکی ابتدای بازه است و دیگری در بازه قرار ندارد.

$f(۲)=۰-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲},\ f(۶)=\sqrt{۴}-۰=۲$

پس Max مطلق تابع برابر ۲ است.

۱۲ - گزینه ۲ نقاط f,a به دلیل آنکه دو سر بازه هستند و یک طرفشان همسایه وجود ندارد اکسترمم نسبی نمی‌باشند. نقطه‌ی b از دو همسایه‌ی راست و چپش بالاتر است پس نقطه‌ی Max نسبی است. نقاط c و d چون از همسایه‌های راست و چپشان پایین‌تر هستند نقطه‌ی Min نسبی می‌باشند. نقطه‌ی e از همسایه‌ی راستش پایین‌تر و از همسایه‌ی راستش بالاتر است بنابراین اکسترمم نسبی نمی‌باشد. پس این تابع دارای یک ماکسیمم و دو مینیمم نسبی است.

۱۳ - گزینه ۳ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:
۱) در تابع صدق می‌کنند.
۲) طولشان، y' را صفر می‌کنند.

$$A\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-۲=a+b$$

$$A\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می‌کند}}y'=۳ax^۲+b\to ۰=۳a+b$$

$$\begin{cases} a+b=-۲ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \to a=۱, b=-۳ \to f(x)=x^۳-۳x \to f(۲)=۸-۶=۲$$

۱۴ - گزینه ۲ کافی است که مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم در بین این اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است.

$$f(x)=-x^۳+۳x^۲-۲ \to f'(x)=-۳x^۲+۶x=-۳x(x-۲)=۰ \to x=۰, x=۲$$

$$\xrightarrow{x\in[۱,۴]} x=۲$$

$$f(۱)=-۱+۳-۲=۰ \quad , \quad f(۴)=-۶۴+۴۸-۲=-۱۸ \quad , \quad f(۲)=-۸+۱۲-۲=۲$$

بنابراین Max مطلق تابع برابر ۲ می‌باشد.

۱۵ - گزینه ۴ کافی است از تابع، مشتق گرفته و سپس آن را تعیین علامت کنیم.

$$y=\frac{x^۲-۱}{x^۳} \to y'=\frac{۲x(x^۳)-۳x^۲(x^۲-۱)}{x^۶}=\frac{۲x^۴-۳x^۴+۳x^۲}{x^۶}=\frac{-x^۴+۳x^۲}{x^۶}$$

$$=\frac{x^۲(-x^۲+۳)}{x^۶}=\frac{۳-x^۲}{x^۴}=۰ \to ۳-x^۲=۰ \to x=\pm\sqrt{۳}$$

و به ازای $x=۰$, y' وجود ندارد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y′		−	0	+	‖	+	0	−	
y		↘	Min	↗		↗		↘	

برای پیدا کردن عرض Min کافی است که $x=-\sqrt{۳}$ را در تابع قرار دهیم.

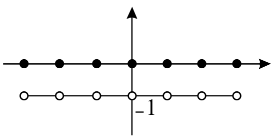
$$x=-\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y_{Min}=\frac{(-\sqrt{۳})^۲-۱}{(-\sqrt{۳})^۳}=\frac{۳-۱}{-۳\sqrt{۳}}=\frac{۲}{-۳\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$f(x)=[x] \to y=f(x+f(-x))=f(x+[-x])=[x+\underbrace{[-x]}_{\text{صحیح}}]$$

$$=[x]+[-x] \to \begin{cases} x\in\mathbb{Z} \to [x]+[-x]=۰ \\ x\notin\mathbb{Z} \to [x]+[-x]=-۱ \end{cases}$$

حال، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نقاط صحیح، نقاط بحرانی از نوع مشتق ناپذیر هستند و در سایر نقاط (خط افقی) مشتق برابر صفر است پس این تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

۱۷ - گزینه ۱ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$، Max نسبی تابع است بنابراین در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۰=۸m-۴n-۸ \to ۸m-۴n=۸ \to ۲m-n=۲$$

$$\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش، مشتق را صفر می‌کند}} y'=۳mx^۲-۲nx \to ۰=۱۲m-۴n \to ۳m-n=۰$$

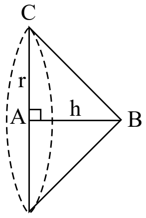
$$\begin{cases} ۲m-n=۲ \\ ۳m-n=۰ \end{cases} \to m=-۲ \ , \ n=-۶$$

۱۸ - گزینه ۳ حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

شکل حاصل از دوران $\overset{\Delta}{ABC}$ حول ضلع AB، مخروطی با شعاع قاعده‌ی $AC=r$ و ارتفاع $AB=h$ است.

$$BC=۵\sqrt{۳} \to r^۲+h^۲=۷۵ \to r^۲=۷۵-h^۲$$

بنابراین حجم این مخروط برابر است با:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۷۵ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۷۵h - h^۳)$$

$$V' = ۰ \rightarrow \frac{\pi}{۳}(۷۵ - ۳h^۲) = ۰ \rightarrow ۳h^۲ = ۷۵ \rightarrow h^۲ = ۲۵ \xrightarrow{h>۰} h = ۵$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم برابر است با:

$$V_{Max} = \frac{۱}{۳}\pi(۷۵ - ۲۵) \times ۵ = \frac{۲۵۰\pi}{۳}$$

۱۹ - گزینه ۲ کافی است از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده و مختصات اکسترمم‌های تابع را بدست آوریم.

$$y = (x-۱)^۲(x-۲) \rightarrow y' = ۲(x-۱)(x-۲) + (x-۱)^۲ = \underbrace{(x-۱)}_{\text{فاکتور}}(۲x - ۴ + x - ۱)$$

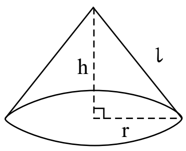
$$= (x-۱)(۳x-۵) = ۰ \rightarrow x = ۱ \,,\, x = \frac{۵}{۳}$$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	۰	$\searrow$	$\frac{-۴}{۲۷}$	$\nearrow$	
			Max		Min		

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right. \,,\, B\left|\begin{matrix}\frac{۵}{۳}\\-\frac{۴}{۲۷}\end{matrix}\right. \rightarrow AB = \sqrt{(۱-\frac{۵}{۳})^۲ + (۰ + \frac{۴}{۲۷})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹} + \frac{۱۶}{۲۷ \times ۲۷}}$$

$$= \sqrt{\frac{۴}{۹}(۱ + \frac{۴}{۳ \times ۲۷})} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۱ + \frac{۴}{۸۱}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۸۵}{۸۱}} = \frac{۲}{۲۷}\sqrt{۸۵}$$

۲۰ - گزینه ۳ مساحت جانبی مخروطی با مولد ℓ برابر است با: $S = \pi r \ell$



$$S = \pi r \ell \xlongequal{\text{طبق فرض}} \pi \rightarrow r\ell = ۱ \rightarrow \ell = \frac{۱}{r}$$

$$r^۲ + h^۲ = \ell^۲ \rightarrow r^۲ + h^۲ = \frac{۱}{r^۲} \rightarrow h = \sqrt{\frac{۱}{r^۲} - r^۲} = \frac{\sqrt{۱ - r^۴}}{r}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi r\sqrt{۱ - r^۴}$$

$$V'(r) = ۰ \rightarrow \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۱-r^۴} - \frac{۴r^۳ \times r}{۲\sqrt{۱-r^۴}}) = ۰ \rightarrow \sqrt{۱-r^۴} - \frac{۲r^۴}{\sqrt{۱-r^۴}} = ۰ \rightarrow \frac{۱ - r^۴ - ۲r^۴}{\sqrt{۱-r^۴}} = ۰$$

$$\rightarrow ۱ - ۳r^۴ = ۰ \rightarrow r^۴ = \frac{۱}{۳} \rightarrow r = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}$$

بنابراین به‌ازای $r = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}$، حجم مخروط ماکسیمم می‌شود.

۲۱ - گزینه ۱

$$f(x) = x(۱ - x^۲)^{\frac{۱}{۲}} = x\sqrt{۱ - x^۲}$$

چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف را به عنوان بازه در نظر می گیریم.

$$D_f : ۱ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x^۲ \leq ۱ \rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \rightarrow x \in [-۱, ۱]$$

کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم.

$$f'(x) = \sqrt{۱-x^۲} + \frac{۱(-۲x)}{۲\sqrt{۱-x^۲}}x = \sqrt{۱-x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱ - ۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

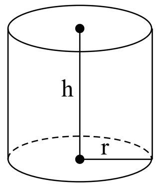
$$\rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \rightarrow ۱ - ۲x^۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \,,\, x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \text{مخرج} = ۰ \rightarrow ۱ - x^۲ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱ : \text{بحرانی نیستند زیرا ابتدا و انتهای بازه هستند} \end{cases}$$

$f(-۱)=۰\ ,\ f(۱)=۰\ ,\ f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۲}$

بنابراین ماکسیمم مطلق تابع در بازه‌ی داده شده برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۲ - گزینه ۳ حجم استوانه‌ای به‌شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $V=\pi r^۲ h$

$$۲r+h=۱۵\Rightarrow V=\pi r^۲ h=\pi r^۲(۱۵-۲r)\Rightarrow V(r)=\pi(۱۵r^۲-۲r^۳)$$
$$V'(r)=۰\Rightarrow ۳۰r-۶r^۲=۰\Rightarrow ۶r(۵-r)=۰\Rightarrow r=۵$$



بنابراین بیش‌ترین مقدار ممکن است حجم استوانه برابر است با:

$$V_{Max}=\pi\times ۲۵\times ۵=۱۲۵\pi$$

۲۳ - گزینه ۱

$$f(x)=x^۴-۸x^۲\to f'(x)=۴x^۳-۱۶x=۴x(x^۲-۴)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۲\\x=-۲\ \text{(در بازه قرار ندارد)}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

حال باید مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول‌های نقاط بحرانی بدست آورید.

$$\begin{cases}f(۰)=۰\\f(۲)=-۱۶\to Min\ \text{مطلق}\\f(-۱)=-۷\\f(۳)=۹\to Max\ \text{مطلق}\end{cases}\to ۹-(-۱۶)=۲۵$$

۲۴ - گزینه ۲ در ابتدا، ریشه‌های مشتق را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=x^۵-\frac{۲۰}{۳}x^۳+a\to f'(x)=۵x^۴-۲۰x^۲=۵x^۲(x^۲-۴)=۰\to x=۰,x=۲,x=-۲$$

$\to$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

از روی جدول، مشخص می‌شود که طول نقطه‌ی Min تابع برابر ۲ می‌باشد.

$$Min\to\Big|^{۲}_{۲۱}\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۲۱=۳۲-\frac{۱۶۰}{۳}+a\to a=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی طول نقطه‌ی Max تابع برابر -۲ می‌باشد. این طول را در تابع قرار داده تا عرض Max بدست آید.

$$y_{Max}=(-۲)^۵-\frac{۲۰}{۳}(-۲)^۳+\frac{۱}{۳}=-۳۲+\frac{۱۶۰}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{۶۵}{۳}\to Max\Big|^{-۲}_{\frac{۶۵}{۳}}$$

واضح است که نقطه‌ی Max در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

۲۵ - گزینه ۱ با استفاده از آزمون مشتق اول، اکسترمم‌های نسبی تابع را بدست می‌آوریم.

$$g(x)=-۶x^۵+۵۰x^۳-۱۲۰x+۱\to g'(x)=-۳۰x^۴+۱۵۰x^۲-۱۲۰$$
$$=-۳۰(x^۴-۵x^۲+۴)=-۳۰(x^۲-۱)(x^۲-۴)=۰\to x=\pm۱,x=\pm۲$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۲	
$g'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$
$g(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

بنابراین تابع، دارای ۴ اکسترمم نسبی است.

۲۶ - گزینه ۳

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)=۰\to\begin{cases}x=۰\ \text{(در بازه قرار ندارد)}\ \text{غ ق ق}\\x=۲\end{cases}$$
$$f(۱)=-۳\ ,\ f(۴)=۱۵,\ f(۲)=-۵$$

بنابراین کمترین مقدار تابع در این بازه برابر (-۵) است.

۲۷ - گزینه ۳ کافی است از تابع، مشتق گرفته و آن را تعیین علامت کنیم.

$$f(x)=x^{\frac{۶}{۵}}-۱۲x^{\frac{۷}{۵}}\to f'(x)=\frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}}-\frac{۸۴}{۵}x^{\frac{۲}{۵}}=\frac{۶}{۵}(x^{\frac{۱}{۵}}-۱۴x^{\frac{۲}{۵}})=\frac{۶}{۵}(\sqrt[۵]{x}-۱۴\sqrt[۵]{x^۲})$$
$$=۰\to\sqrt[۵]{x}=۱۴\sqrt[۵]{x^۲}\xrightarrow{\text{توان ۵}}x=۱۴^۵x^۲\to x(۱۴^۵x-۱)=۰\to x=۰,x=(\frac{۱}{۱۴})^۵$$

x	$-\infty$		$\circ$		$(\frac{۱}{۱۴})^{۵}$		$+\infty$
y'		$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

$\rightarrow$ تابع، ۲ اکسترمم نسبی دارد.

۲۸ - گزینه ۱ حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^{۲} h$. پس:

$$\pi = \pi r^{۲} h \Rightarrow r^{۲} h = ۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{r^{۲}}$$

اگر مساحت لیوان کمترین شود مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن کم‌ترین می‌شود. چون لیوان استوانه‌ای در باز است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^{۲}}_{\text{مساحت قاعده}} + \underbrace{۲\pi r h}_{\text{مساحت جانبی}} = \pi r^{۲} + ۲\pi r \frac{۱}{r^{۲}} = \pi r^{۲} + \frac{۲\pi}{r}$$

مقدار h برای کمترین مقدار S را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم.

$$S' = \pi(۲r - \frac{۲}{r^{۲}}) = \frac{۲\pi(r^{۳} - ۱)}{r^{۲}} = \circ \Rightarrow r = ۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{۱^{۲}} = ۱$$

۲۹ - گزینه ۱

$$f(x) = ۱ + ۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ - ۲\cos x$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(-\frac{\pi}{۳}) = ۱ - ۲\cos(-\frac{\pi}{۳}) = ۱ - ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}) = \circ \\ f(\frac{۲\pi}{۳}) = ۱ - ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = ۱ - ۲\cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = ۱ + ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲ \end{cases}$$

پس $f(\frac{-\pi}{۳}) + f(\frac{۲\pi}{۳}) = ۲$ است.

از طرفی: $-۱ \leq \cos x \leq ۱ \rightarrow -۲ \leq -۲\cos x \leq ۲ \rightarrow -۱ \leq ۱ - ۲\cos x \leq ۳ \rightarrow -۱ \leq f(x) \leq ۳$

بنابراین Max تابع برابر ۳ است. پس مورد خواسته شده‌ی سوال برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۳۰ - گزینه ۲ کافی است از تابع مشتق گرفته و سپس مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f(x) = ۳x^{۵} - ۲۵x^{۳} + ۶۰x - ۱ \rightarrow f'(x) = ۱۵x^{۴} - ۷۵x^{۲} + ۶۰ = ۱۵(x^{۴} - ۵x^{۲} + ۴)$$

$$= ۱۵(x^{۲} - ۱)(x^{۲} - ۴) = \circ \rightarrow x = \pm ۱, x = \pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۲		$+\infty$
y'		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

$\rightarrow$ تابع دارای ۲ مینیمم نسبی است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۱	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۱
۴ - ۱	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲