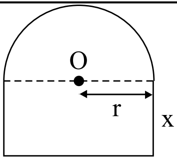
نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ – محیط شکل مقابل، برابر ۱۲ متر می‌باشد. شعاع نیم دایره کدام باشد تا مساحت شکل بیش‌ترین مقدار باشد؟



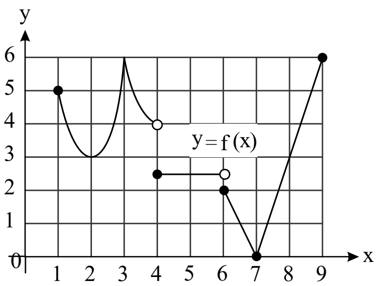
① $\frac{۱۲}{\pi + ۴}$

② $\frac{۶}{\pi + ۴}$

③ $\frac{۱۲}{\pi + ۲}$

④ $\frac{۶}{\pi + ۲}$

۲ – با توجه به نمودار تابع f، کدام‌یک از عبارات زیر در مورد این تابع صحیح است؟



① فقط سه مینیمم نسبی دارد.

② ماکسیمم مطلق ندارد.

③ در $x = ۱$ ماکسیمم نسبی دارد، اما ماکسیمم مطلق ندارد.

④ $x = ۵$ نقطهٔ بحرانی است.

۳ – به‌ازای چه مقادیری از m، تابع $y = ۲x^۳ + ۳mx^۲ + ۲۴x + ۹$ اکیداً یکنواست؟

① $-۴\sqrt{۲} \le m \le ۴\sqrt{۲}$

② $-۸ \le m \le ۸$

③ $۰ < m \le ۸$

④ $-۴ \le m \le ۴$

۴ – اختلاف ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ در بازهٔ $[-۱, ۳]$ کدام است؟

① ۴۵

② ۳۸

③ ۵۲

④ ۳۲

۵- تابع $y=[\sqrt{x}]-x$ در بازهٔ $(۰,۹)$ به‌ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۲، صفر

(۲) ۱، ۱

(۳) صفر، ۲

(۴) ۲، ۱

۶- طول نقطهٔ ماکسیمم تابع $y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۷- اگر $(۱,۴)$ مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $y=\frac{ax^{۲}+b}{x}$ باشد، مختصات نقطهٔ ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

(۱) $(-۱,-۲)$

(۲) $(-۱,۴)$

(۳) $(-۱,-۴)$

(۴) $(-۲,-۱)$

۸- معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم تابع $y=\frac{ax}{x^{۲}+۱}$ را به‌هم وصل می‌کند، $y=۴x+b$ است. b کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۲

(۴) ۳

۹ - تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

① $-\dfrac{3}{5}$

② $\dfrac{3}{5}$

③ -3

④ 3

۱۰ - مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع باضابطهٔ $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

① $\{-1,1\}$

② $\{-4,0,1\}$

③ $\{-2,0,2\}$

④ $\left\{-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right\}$

۱۱ - اگر تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ فقط در بازهٔ $(1,3)$ نزولی باشد، آنگاه طول نقطهٔ بحرانی تابع $g(x)=x^2-(a+b)x+1$ کدام است؟

① $\dfrac{3}{2}$

② $\dfrac{2}{3}$

③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{4}{3}$

۱۲ - به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی است؟

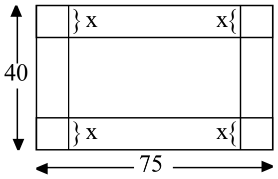
① $(-3,0)$

② $(0,3)$

③ $\mathbb{R}-[-3,0]$

④ $\mathbb{R}-[0,3]$

۱۳ـ مطابق شکل زیر می‌خواهیم با برش زدن مربع‌هایی با اندازه‌های مساوی از چهار گوشهٔ یک قطعه مقوای ۷۵ × ۴۰ سانتی‌متر، یک جعبهٔ درباز بسازیم. طول ضلع مربع‌های جداشده باید چه‌قدر باشد تا حجم جعبه، بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد؟



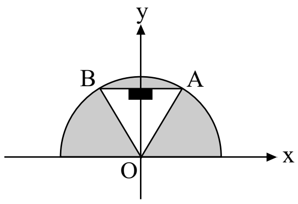
① ۳۰

② $\frac{۲۵}{۳}$

③ $\frac{۲۵}{۶}$

④ $\frac{۵۰}{۳}$

۱۴ـ مثلث OAB مطابق شکل در داخل منحنی $y=\sqrt{۲-x^۲}$ محاط شده است. به‌گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی منحنی قرار دارد. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کمترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع AB کدام است؟



① ۱

② $\sqrt{۲}$

③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

④ $\frac{۱}{۲}$

۱۵ـ اگر $h(x)=f(x)-(f(x))^۲+(f(x))^۳$ برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟ ($f(x)$ تابعی غیرثابت است.)

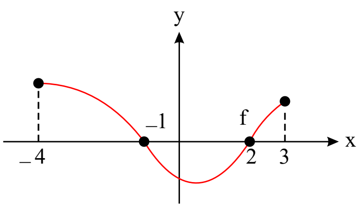
① تابع h صعودی است هرگاه تابع f صعودی باشد.

② تابع h نزولی است هرگاه تابع f صعودی باشد.

③ تابع h صعودی است هرگاه تابع f نزولی باشد.

④ ارتباطی بین صعودی یا نزولی بودن توابع f و h وجود ندارد.

۱۶ـ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ الزاماً در کدام بازه اکیداً صعودی است؟



① $(-۴,-۱)$

② $(-۱,۰)$

③ $(۲,۳)$

④ در هیچ بازه‌ای اکیداً صعودی نیست.

۱۷ - اگر f تابع همانی و تمام نقاط تابع $f-g$ بحرانی باشند، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

(۱) $g(x)=۲$

(۲) $g(x)=x-۱$

(۳) $g(x)=[x]$

(۴) $g(x)=|x|$

۱۸ - مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به معادلهٔ $f(x)=۱+x^۲+\sqrt{۱-x^۲}$ روی دامنه‌اش کدام است؟

(۱) ۲٫۲۵

(۲) ۳٫۲۵

(۳) ۴٫۲۵

(۴) ۵٫۲۵

۱۹ - برای توابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در $\mathbb{R}$ داریم: $f'(x)=(۵-x)g(x)$، اگر $g(۵)=\frac{-۱}{۳}$، نقطه‌ای به‌طول $x=۵$ برای تابع $f(x)$ چگونه است؟

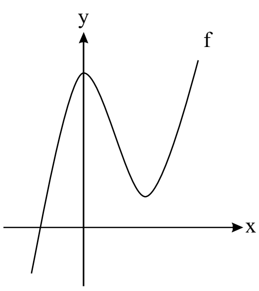
(۱) ماکسیمم نسبی

(۲) مینیمم نسبی

(۳) نقطه‌ای معمولی است.

(۴) قابل تعیین نیست.

۲۰ - اگر $f(x)=x^۳-۳x^۲+۵$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح k، معادلهٔ $f(x)=k$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است؟



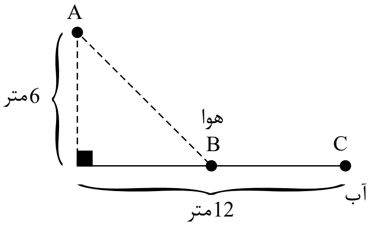
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۱ - مرغ دریایی در نقطهٔ A قرار گرفته و قصد دارد به نقطهٔ C برود. برای این کار، قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب، مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری‌برمتر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری‌برمتر انرژی مصرف کند، فاصلهٔ نقطهٔ B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کم‌ترین انرژی ممکن را مصرف کند؟



① ۳
② ۹
③ ۴
④ ۶

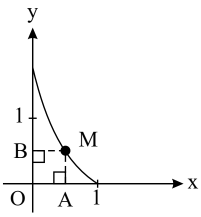
۲۲ - می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته برای تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi \simeq ۳)$

① ۱۰
② ۲۰
③ ۱۵
④ ۸

۲۳ - اگر نقطهٔ $A(۲,۱)$ یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، عرض از مبدأ خط واصل اکسترمم‌های این تابع کدام است؟

① -۳
② صفر
③ ۵
④ ۴

۲۴ - نقطهٔ $M(x,y)$ روی منحنی $۰ < x < ۱$ ، $y = ۲(x-۱)^۲$ در ناحیهٔ اول محورهای مختصات چنان انتخاب شده است که مساحت مستطیل $AMBO$ بیشترین مقدار باشد، اندازهٔ مساحت مستطیل کدام است؟



① $\frac{۵}{۳۲}$
② $\frac{۴}{۳۲}$
③ $\frac{۸}{۲۷}$
④ $\frac{۹}{۲۷}$

۲۵- مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\{0,1\}$

۲) $\{-1,0\}$

۳) $\{-1,1\}$

۴) $\{-1,0,1\}$

۲۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-|x| & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ مینیمم نسبی داشته باشد ولی مینیمم مطلق نداشته باشد، آنگاه محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a<-\frac{1}{2}$

۲) $a>0$

۳) $-\frac{1}{2}\leq a<0$

۴) $-\frac{1}{4}<a<0$

۲۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) $3\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{5}$

۲۸- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$

۲) $8\sqrt{3}$

۳) 16

۴) 18

۲۹ – ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

(۱) 2

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) 4

۳۰ – دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲– نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+ax^2+bx$ هستند. مقدار ab کدام است؟

(۱) 2

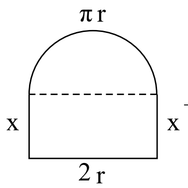
(۲) 1

(۳) -1

(۴) -2

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱



$$\to 2x + 2r + \pi r = 12 \to x = \frac{12 - 2r - \pi r}{2}$$

$$S = \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت نیم‌دایره} = 2xr + \frac{\pi r^2}{2} = 2(\frac{12 - 2r - \pi r}{2})r + \frac{\pi}{2}r^2$$

$$= 12r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 : \text{یک‌متغیره} \xrightarrow{\text{مشتق} = 0} 12 - 4r - 2\pi r + \pi r = 0$$

$$\to 12 - 4r - \pi r = 0 \to 12 = 4r + \pi r \to 12 = r(4 + \pi) \to r = \frac{12}{4 + \pi}$$

۲ ـ گزینه ۴ با توجه به آن‌که در $x = 5$ مشتق برابر با صفر می‌شود، پس نقطهٔ بحرانی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) تابع در $x = 2$، $x = 4$ و $x = 7$ مینیمم نسبی دارد، اما تمام نقاط متعلق به بازهٔ $(4, 6)$ هم ماکسیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند. بنابراین تابع بی‌شمار مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد.

گزینهٔ ۲) تابع f دو نقطهٔ ماکسیمم مطلق در $x = 3$ و $x = 9$ دارد.

گزینهٔ ۳) برای آن‌که یک نقطه اکسترمم نسبی باشد، باید تابع در همسایگی چپ و راست آن نقطه تعریف شود، پس دو سر بازه‌ها را به‌عنوان اکسترمم‌های نسبی درنظر نمی‌گیریم.

۳ ـ گزینه ۴ کافی است مشتق تابع را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهیم.

$$f'(x) = 6x^2 + 6mx + 24 \geq 0 \to x^2 + mx + 4 \geq 0$$

می‌دانیم شرط آن‌که یک عبارت درجهٔ دوم بزرگ‌ترمساوی صفر باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد.

$a > 0 \to 1 > 0$ شرط برقرار است.

$$\Delta \leq 0 \to b^2 - 4ac \leq 0 \to m^2 - 16 \leq 0 \to m^2 \leq 16 \to -4 \leq m \leq 4$$

۴ ـ گزینه ۳ کافی است مقدار تابع را به‌ازای ابتدا و انتهای بازه و نقطه یا نقاط بحرانی به‌دست آوریم.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \to f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = -2 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} f(-1) = -2 + 3 + 12 = 13 \\ f(3) = 54 + 27 - 36 = 45 \to Max\ \text{مطلق} \\ f(1) = 2 + 3 - 12 = -7 \to Min\ \text{مطلق} \end{cases}$$

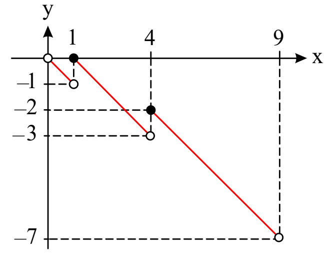
بنابراین، اختلاف Max و Min مطلق، برابر ۵۲ است.

۵ ـ گزینه ۱ تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم و باید آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کنیم.

$$0 < x < 1 \to 0 < \sqrt{x} < 1 \xrightarrow{[\sqrt{x}]=0} y = -x$$

$$1 \leq x < 4 \to 1 \leq \sqrt{x} < 2 \xrightarrow{[\sqrt{x}]=1} y = 1 - x$$

$$4 \leq x < 9 \to 2 \leq \sqrt{x} < 3 \xrightarrow{[\sqrt{x}]=2} y = 2 - x$$



نمودار دارای ۲ ماکسیمم نسبی در $x = 4$ و $x = 1$ بوده و فاقد مینیمم نسبی است.

۶ ـ گزینه ۴

$$y = (\frac{3}{4}x - \frac{1}{7}x^2)\sqrt[3]{x} \to y = (\frac{3}{4}x - \frac{1}{7}x^2)x^{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{3}}\rightarrow y'=x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}\rightarrow y'=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$$

$$\rightarrow y'=\sqrt[3]{x}(1-\frac{1}{3}x)=0\rightarrow x=0\,,\ x=3$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

بنابراین طول Max نسبی تابع برابر ۳ است.

۷ ـ گزینه ۳ اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر در تابع صدق می‌کنند و طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$f(1)=4\rightarrow 4=\frac{a+b}{1}\rightarrow a+b=4$$

$$f'(1)=0\rightarrow f'(x)=\frac{2ax(x)-1(ax^2+b)}{x^2}\rightarrow 0=\frac{2a-(a+b)}{1}\rightarrow a-b=0$$

$$\begin{cases}a+b=4\\ a-b=0\end{cases}\rightarrow a=2\,,\ b=2$$

$$f(x)=\frac{2x^2+2}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{4x(x)-1(2x^2+2)}{x^2}=\frac{4x^2-2x^2-2}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}=0$$

$\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1\rightarrow$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	-4 Max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4 Min	$\nearrow$	

۸ ـ گزینه ۱

$$y=\frac{ax}{x^2+1}\rightarrow y'=\frac{a(x^2+1)-2x(ax)}{(x^2+1)^2}=\frac{ax^2+a-2ax^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\rightarrow y'=\frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2}\rightarrow y'=\frac{a(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow\begin{cases}x=1\xrightarrow{\text{تابع}}y=\dfrac{a}{2}\\[2ex] x=-1\xrightarrow{\text{تابع}}y=\dfrac{-a}{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\begin{array}{l}1\\ \frac{a}{2}\end{array}\right.\xrightarrow[\text{صدق}]{y=4x+b}\frac{a}{2}=4+b\\[3ex] \left|\begin{array}{l}-1\\ -\frac{a}{2}\end{array}\right.\xrightarrow[\text{صدق}]{y=4x+b}-\frac{a}{2}=-4+b\end{array}\right\}\rightarrow a=8\,,\ b=0$$

۹ ـ گزینه ۲ از تابع مشتق می‌گیریم و توجه کنید که مخرج ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$f(x)=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}\rightarrow f'(x)=\frac{(4x-3)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2-3x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{4x^3+4x^2+12x-3x^2-3x-9-4x^3+6x^2-2x^2+3x}{(x^2+x+3)^2}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{5x^2+12x-9}{\underbrace{(x^2+x+3)^2}_{+}}>0\rightarrow 5x^2+12x-9>0$$

$$\rightarrow 5x^2+12x-9=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=144+180=324$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-12+18}{10}=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{-12-18}{10}=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -3 & & \frac{3}{5} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$$

تابع در فواصل $(-\infty,-3)\cup(\frac{3}{5},+\infty)$ صعودی اکید است که با مقایسهٔ آن با $(a,+\infty)$ حداقل مقدار a برابر $\frac{3}{5}$ است.

۱۰ – گزینه ۴ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که به‌ازای آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. توجه کنید که دامنهٔ تعریف داده‌شده $D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x^2} \rightarrow f'(x)=2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}(x^2-1)=2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{2x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{6x\sqrt[3]{x^3}+2x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \rightarrow 8x^2=2 \rightarrow x^2=\frac{1}{4} \rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

به‌ازای $x=0$ مشتق وجود ندارد پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع به‌صورت $\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$ است.

۱۱ – گزینه ۱

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

چون تابع در بازهٔ $(1,3)$ نزولی است با توجه به جدول باید $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های مشتق باشند یعنی:

$$\begin{cases} f'(1)=0 \rightarrow 3+2a+b=0 \\ f'(3)=0 \rightarrow 27+6a+b=0 \end{cases} \rightarrow a=-6\ ,\ b=9$$

پس $g(x)=x^2-3x+1$ است که طول نقطهٔ بحرانی آن برابر است با:

$$g'(x)=2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۱۲ – گزینه ۳ از تابع داده‌شده مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x+a} \rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(x+a)-(x^2-3x)}{(x+a)^2}=\frac{2x^2+2ax-3x-3a-x^2+3x}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{x^2+2ax-3a}{\underbrace{(x+a)^2}_{+}}=0 \rightarrow x^2+2ax-3a=0$$

اگر $\Delta<0$ باشد مشتق ریشهٔ حقیقی ندارد درنتیجه اکسترمم هم ندارد اگر $\Delta=0$ باشد مشتق ریشهٔ مضاعف دارد و درنتیجه اکسترمم هم ندارد ولی اگر $\Delta>0$ باشد مشتق دارای دو ریشهٔ سادهٔ متمایز است و دو اکسترمم دارد.

$$\Delta>0 \rightarrow b^2-4ac>0 \rightarrow 4a^2+12a>0 \rightarrow 4a(a+3)>0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & -3 & & 0 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} >0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \rightarrow a<-3 \ \text{یا}\ a>0 \rightarrow a\in\mathbb{R}-[-3,0]$$

۱۳ – گزینه ۲ با برش زدن و جدا کردن مربع‌های مساوی به‌طول ضلع x حجم جعبهٔ ساخته‌شده برحسب x به‌صورت زیر خواهد بود:

$$V=\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=(75-2x)(40-2x)x=(75-2x)(40x-2x^2)$$

$$\rightarrow V=4x^3-230x^2+3000x : \text{یک‌متغیره}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} 12x^2-460x+3000=0 \rightarrow 3x^2-115x+750=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=13225-9000=4225} \begin{cases} x=\dfrac{115+65}{6}=30 \quad \text{غ‌ق} \\ x=\dfrac{115-65}{6}=\dfrac{25}{3} \quad \text{ق} \end{cases}$$

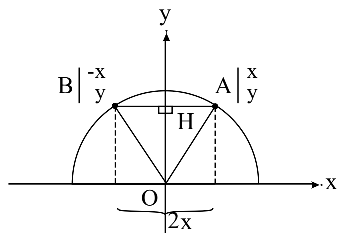
توجه کنید اگر $x=30$ باشد $40-2x$ منفی می‌شود.

۱۴ – گزینه ۱ با توجه به ثابت بودن کل مساحت محصور بین منحنی و محور xها، برای آن‌که مساحت قسمت هاشورخورده، کمترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB، بیشترین

باشد.

اگر مختصات رأس A از مثلث را $\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ درنظر بگیریم، قاعدهٔ مثلث (AB) برابر $2x$ و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AB)(OH) = \frac{1}{2}(2x)(y) = xy$$



پس: $xy = x\sqrt{2 - x^2}$: یک‌متغیره $\xrightarrow{\text{مشتق}=0} \sqrt{2-x^2} + \dfrac{1(-2x)}{2\sqrt{2-x^2}}x = 0 \to \sqrt{2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$

$$\to \frac{2 - x^2 - x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \to 2 = 2x^2 \to x^2 = 1 \xrightarrow{\text{ربع اول}} x = 1 \xrightarrow{y=\sqrt{2-x^2}} y = \sqrt{1} = 1$$

از آنجاکه در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده برهم منطبق هستند پس میانه نیز برابر یک است.

۱۵ - گزینه ۱ از دو طرف تساوی داده‌شده مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 2f(x)\cdot f'(x) + 3f^2(x)\cdot f'(x) \\ &= f'(x)\left(1 - 2f(x) + 3f^2(x)\right) \\ &= f'(x)\left(1 + 3(f^2(x) - \frac{2}{3}f(x))\right) \\ &= f'(x)\left(1 + 3\left((f(x) - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}\right)\right) \\ &= f'(x)\left(1 + 3\left(f(x) - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= f'(x)\underbrace{\left(3(f(x) - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}\right)}_{+} \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x)$ و $h'(x)$ همواره هم‌علامت هستند پس اگر f صعودی باشد $h(x)$ نیز صعودی است.

۱۶ - گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$xf(x) \geq 0 \xrightarrow[\text{را انتخاب می‌کنیم.}]{\text{جاهایی که } x \text{ و } y \text{ هم‌علامتند}} [-1, 0] \cup [2, 3]$$

اکنون از تابع داده‌شده مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = \frac{f(x) + xf'(x)}{\underbrace{2\sqrt{xf(x)}}_{+}} > 0$$

در بازهٔ $(2, 3)$، $f(x)$ مثبت، x مثبت، $f'(x)$ مثبت و درنتیجه $f(x) + xf'(x) > 0$ است.

در بازهٔ $(-1, 0)$، $f(x)$ منفی، x منفی، $f'(x)$ منفی و درنتیجه علامت $f(x) + xf'(x)$ مشخص نیست.

۱۷ - گزینه ۲ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنهٔ تعریف تابع هستند که در آن نقاط مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد و تابع همانی $f(x) = x$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) $(f - g)(x) = x - 2$ نقطهٔ بحرانی ندارد.

گزینهٔ ۲) $(f - g)(x) = x - (x - 1) = 1$ و تمام نقاط نمودار آن بحرانی هستند (تمام نقاط روی خط افقی، بحرانی هستند).

گزینهٔ ۳) در تابع $(f - g)(x) = x - [x]$ نقاط با طول غیرصحیح، بحرانی نیستند.

گزینهٔ ۴) در تابع $(f - g)(x) = x - |x|$ داریم:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$$

پس xهای منفی بحرانی نیستند.

۱۸ – گزینه ۳ می‌دانیم دامنهٔ تابع داده‌شده بازهٔ $[-۱, ۱]$ می‌باشد که در این بازه تابع پیوسته است، درنتیجه داریم:

$$f'(x) = ۲x + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}} = x(۲ - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۲ - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = ۰ \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \Rightarrow \sqrt{۱-x^{۲}} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ - x^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

با توجه به این‌که هر سه جواب به‌دست آمده در دامنهٔ تابع قرار دارند، پس هر سه تا نقطهٔ بحرانی تابع هستند، بر این اساس خواهیم داشت:

$$f(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = f(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲/۲۵ \quad \text{و} \quad f(۰) = ۲ \quad \text{و} \quad f(-۱) = f(۱) = ۲$$

درنتیجه $y = ۲/۲۵$ و $y = ۲$ به ترتیب ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع فوق در بازهٔ $[-۱, ۱]$ هستند که مجموع آن‌ها برابر با $۴/۲۵ = y_{Max} + y_{Min}$ است.

۱۹ – گزینه ۲ تابع g پیوسته است و از طرفی داریم: $g(۵) = -\frac{۱}{۳}$، بنابراین در همسایگی $x = ۵$، $g(x) < ۰$ است. حال جدول تعیین علامت f' را در همسایگی $x = ۵$ رسم می‌کنیم.

x		۵	
$f'(x) = (۵-x)g(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

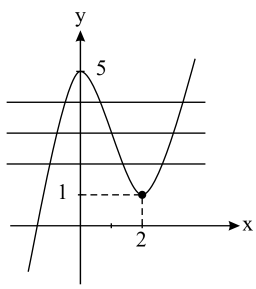
پس $x = ۵$ برای f نقطهٔ مینیمم نسبی است.

۲۰ – گزینه ۳ خط $y = k$ باید در محدودهٔ بین ماکسیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$ را هم به‌دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق‌پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به‌دست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

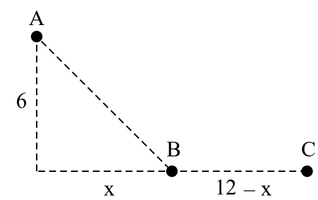
حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادلهٔ اصلی $f(x)$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(۰) = ۵, f(۲) = ۱ \xrightarrow{\text{نمودار}}$$



همانطور که می‌بینیم به‌ازای سه مقدار صحیح $(k = ۲, ۳, ۴)$، معادلهٔ $f(x) = k$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲۱ – گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ انرژی مصرفی را نوشته و سپس نقطهٔ مینیمم نسبی آن را به‌دست می‌آوریم:



$$\text{انرژی صرف‌شده در مسیر } ABC : f(x) = \sqrt{۳۶ + x^{۲}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (۱۲ - x) \times ۱۰$$

$$f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{۳۶ + x^{۲}}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (-۱۰) = ۰$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{۳۶ + x^{۲}}} = ۱ \Rightarrow ۳۶ + x^{۲} = ۵x^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۳$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow x \in [۰, ۱۲] \Rightarrow x = ۳$$

$$\text{پس} : BC = ۱۲ - ۳ = ۹$$

۲۲ – گزینه ۱

با توجه به حجم قوطی، رابطهٔ بین ارتفاع و شعاع استوانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = 3000 \xrightarrow{\pi\simeq 3} r^2 h = 1000 \Rightarrow h=\frac{1000}{r^2}$$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانهٔ مورد نظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$$S = \text{مساحت کل استوانه} = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

با جایگذاری ارتفاع برحسب شعاع، داریم:

$$S=\pi r^2+\pi\left(\frac{2000}{r}\right)=\pi\left(r^2+\frac{2000}{r}\right)$$

اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به‌دست می‌آید:

$$S'=\pi\left(2r-\frac{2000}{r^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow 2r=\frac{2000}{r^2}\Rightarrow r^3=1000\Rightarrow r=10\Rightarrow h=10$$

۲۳ – گزینه ۳ نقطهٔ اکسترمم پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1=8+4b+d \longrightarrow 4b+d=-7$$

$$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش، مشتق را صفر می‌کند.}} f'(x)=3x^2+2bx\longrightarrow 0=12+4b\longrightarrow b=-3\ ,\ d=5$$

$$\text{پس}:\ f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0\longrightarrow \begin{cases} x=0\xrightarrow{\text{تابع}} y=5\to B\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right. \\ x=2\longrightarrow y=1\to A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.\end{cases}$$

واضح است که خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B دارای عرض‌ازمبدأ برابر ۵ است.

۲۴ – گزینه ۳

$$S=xy=x(2(x-1)^2)=2x(x^2+1-2x)=2x^3-4x^2+2x$$

$$\xrightarrow{S'=0} 6x^2-8x+2=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\ (0<x<1)\ \text{غ‌ق‌ق}\\ x=\frac{c}{a}=\frac{2}{6}=\frac13\end{cases}$$

$$\text{پس}:\ S_{Max}=2\left(\frac1{27}\right)-4\left(\frac19\right)+\frac23=\frac2{27}-\frac49+\frac23=\frac{2-12+18}{27}=\frac8{27}$$

۲۵ – گزینه ۴ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که در آنها مشتق تابع برابر صفر است یا وجود ندارد. دامنهٔ تعریف این تابع $D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

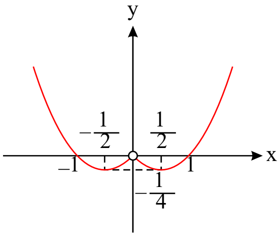
$$f(x)=\frac1{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac12x^{\frac23}\longrightarrow f'(x)=\frac13x^{\frac{11}{3}}-\frac13x^{\frac{-1}{3}}=\frac13\left(\sqrt[3]{x^{11}}-\frac1{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$=\frac13\left(\frac{\sqrt[3]{x^{12}}-1}{\sqrt[3]{x}}\right)=\frac13\left(\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}}\right)\longrightarrow\begin{cases}\text{صورت}=0\to x^4=1\to x=\pm1\\ \text{مخرج}=0\to\sqrt[3]{x}=0\to x=0\end{cases}$$

در $x=\pm1$ مشتق صفر است و در $x=0$ مشتق وجود ندارد.

۲۶ – گزینه ۴ تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x & x>0\\ a & x=0\\ x^2+x & x<0\end{cases}\longrightarrow$$



با توجه به شکل اگر $-\frac14<a<0$ باشد $x=0$ مینیمم نسبی است ولی مینیمم مطلق نیست.

۲۷ – گزینه ۴ روش اول:

$x=4$ ریشهٔ سادهٔ داخل قدر مطلق است (نقطهٔ گوشه) بنابراین در $x=4$ مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x)=\begin{cases}x(x-4)&x\ge4\\-x(x-4)&x<4\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}x^2-4x&x\ge4\\-x^2+4x&x<4\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}2x-4&x>4\\-2x+4&x<4\end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم $x=2$ به دست می‌آید.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	وجود ندارد	$+$	
y		$\nearrow$	4 Max	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$	

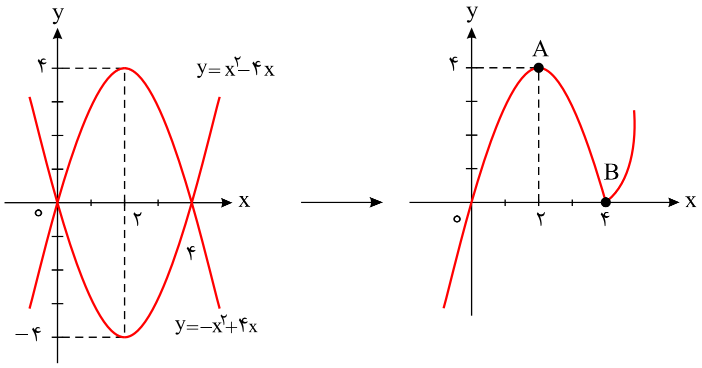
$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \end{cases} \rightarrow AB=\sqrt{(2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

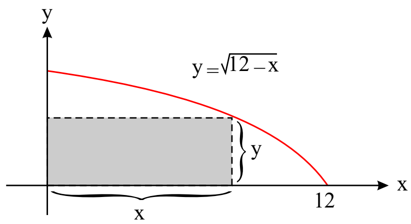
محل برخورد تابع با محور xها : $x=0,4$ و $x\geq 4 \rightarrow y=x^2-4x \rightarrow S\left|\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}\right.$

محل برخورد تابع با محور xها : $x=0,4$ و $x<4 \rightarrow y=-x^2+4x \rightarrow S\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$



$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \end{cases} \rightarrow AB=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۲۸ ـ گزینه ۳



$$S=x\cdot y=x\cdot\sqrt{12-x}\xrightarrow{S'=0}\sqrt{12-x}+\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}x=0$$

$$\rightarrow\sqrt{12-x}=\frac{x}{2\sqrt{12-x}}\rightarrow 2(12-x)=x\rightarrow 24-2x=x$$

$$\rightarrow 3x=24\rightarrow x=8\rightarrow S_{Max}=8\sqrt{12-8}=8\times 2=16$$

۲۹ ـ گزینه ۱ دامنه‌ی تعریف تابع به صورت $D_f=[-2,2]$ است. حال، کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2})=2\ ,\ f(-\sqrt{2})=-2\ ,\ f(2)=f(-2)=0$$

پس ماکسیمم مطلق تابع f برابر ۲ است.

۳۰ - گزینه ۳ چون $x=1$ و $x=-2$ طول نقاط بحرانی هستند پس به ازای $x=1$ و $x=-2$، مشتق برابر صفر است. (ریشه‌های مشتق هستند).

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+ax^2+bx \Rightarrow f'(x)=x^2+2ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \to 1+2a+b=0 \to 2a+b=-1 \\ f'(-2)=0 \to 4-4a+b=0 \to -4a+b=-4 \end{array}\right\} \to a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-2$$

بنابراین $ab=-1$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱ -	۶	۴ -	۱۱	۱ -	۱۶	۳ -	۲۱	۲ -	۲۶	۴ -
۲	۴ -	۷	۳ -	۱۲	۳ -	۱۷	۲ -	۲۲	۱ -	۲۷	۴ -
۳	۴ -	۸	۱ -	۱۳	۲ -	۱۸	۳ -	۲۳	۳ -	۲۸	۳ -
۴	۳ -	۹	۲ -	۱۴	۱ -	۱۹	۲ -	۲۴	۳ -	۲۹	۱ -
۵	۱ -	۱۰	۴ -	۱۵	۱ -	۲۰	۳ -	۲۵	۴ -	۳۰	۳ -