علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x^{۲}+k$ در بازه‌ی $[۱,۳]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۲ - تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=|\sin x|$ در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ ۵

۳ - در منحنی $y=x\sqrt[۳]{x}-۲\sqrt[۳]{x}$، چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

① هیچ
② ۱
③ ۲
④ ۳

۴ - تعداد نقاط بحرانی کدام‌یک از توابع زیر از دیگر توابع بیشتر است؟

① $f(x)=۳x+|x|$
② $f(x)=x|x|$
③ $f(x)=x+|x|$
④ $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$

۵- نمودار تابع $y=\dfrac{x-۱}{x^{۲}+۱}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر نزولی است؟

① $(-۲,-۱)$

② $(-۱,۰)$

③ $(۱,۲)$

④ $(۲,۳)$

۶- اگر $x>۳$، کمترین مقدار تابع $f(x)=x-۳+\dfrac{۱}{x-۳}$ کدام است؟

① ۳

② ۲

③ ۱

④ صفر

۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & -۲\le x<۱ \\ x-۲ & ۱\le x\le ۳\end{cases}$ ....

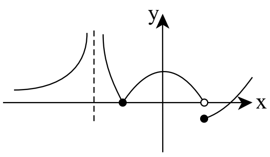
① یک Max و یک Min نسبی دارد.

② دو Min نسبی دارد.

③ دو Max نسبی دارد.

④ فقط یک Max نسبی دارد.

۸- تابع f با نمودار زیر مفروض است، این تابع چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟



① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۹- مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^{۲}-۲۸)\cdot\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

① $\{-۲,۲\}$

② $\left\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\right\}$

③ $\{-۲,۰,۲\}$

④ $\{-۷,۰,۱\}$

۱۰ – مستطیل محاط در دایره به قطر ۶ واحد را حول طول آن دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

① ۴

② $۲\sqrt{۳}$

③ $۲\sqrt{۶}$

④ $۳\sqrt{۲}$

۱۱ – نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{x^۴} - \sqrt[۳]{x^۲}$ در بازهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟

① $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}, \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

③ $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

④ $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲ – بیش‌ترین مقدار عبارت $y = \cos^۲ x + \sin x$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۴}$

② $\frac{۴}{۵}$

③ $\frac{۵}{۴}$

④ $\frac{۴}{۳}$

۱۳ – به ازای کدام مقادیر x، نمودار تابع $y = ۱ - ۴x^۲$ صعودی است؟

① $x < ۰$

② $x > ۰$

③ $-۲ < x < ۲$

④ $-۴ < x < ۴$

۱۴ - نمودار $y=(x-۱)^۳(x+۱)$ در کدام فاصله نزولی است؟

① $x<۱$

② $x<-\frac{۱}{۲}$

③ $x>۱$

④ $x>-\frac{۱}{۲}$

۱۵ - اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟

① $f'(c)=۰$

② در c پیوسته

③ در همسایگی، تعریف شده

④ در c مشتق پذیر

۱۶ - کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x$ در بازه‌ی $[-۱,۴]$ کدام است؟

① -۲۷

② -۲۴

③ -۲۰

④ -۱۱

۱۷ - ماکسیمم تابع $y=-|x|$ در فاصله‌ی $[-۱,۱]$ چقدر است؟

① -۱

② ۰

③ $\frac{۱}{۲}$

④ ۱

۱۸ - بیش‌ترین مقدار تابع $y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵$، در بازه‌ی $[-۲,۲]$، کدام است؟

① ۹

② ۱۰

③ ۱۲

④ ۱۷

۱۹ – نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}۱\\۵\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۷\\-۲\end{vmatrix}$، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

① ۸

② ۹

③ ۱۰

④ ۱۱

۲۰ – بیشترین مقدار تابع $y=\sin^۲ x-\sin x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

① ۱

② $\frac{۱}{۲}$

③ ۲

④ $-\frac{۱}{۴}$

۲۱ – تابع $y=\frac{x^۴}{۴}-۲x^۲+۷$ در کدام یک از بازه‌های زیر نزولی است؟

① $(-\infty,۰)$

② $(-۲,۲)$

③ $(۰,۲)$

④ $(۲,+\infty)$

۲۲ – در تابع $y=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x$ شیب خطی که نقاط ماکسیمم و مینیمم را به هم وصل می‌کند، چقدر است؟

① ۱

② ۳

③ -۲

④ -۱

۲۳ – مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt[3]{x}(x-2)$ کدام است؟

① $\left\{\frac{1}{2},0\right\}$

② $\{1,0\}$

③ $\{2,0\}$

④ $\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

۲۴ – تابع $f(x)=|\cos x|$ در $(0,4\pi)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

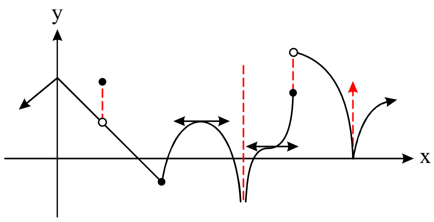
① ۴

② ۶

③ ۷

④ ۵

۲۵ – شکل زیر نمودار تابع $y=f(x+2)$ است. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ کدام است؟



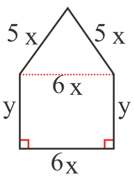
① ۶

② ۷

③ ۸

④ ۱۰

۲۶ – محیط شکل مقابل ۲۴ است. اگر مساحت آن ماکسیمم باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ برابر کدام است؟



① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ ۲

④ ۴

۲۷- در ساخت یک قیف به‌شکل مخروط قائم به‌حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

② ۱

③ $\sqrt[۳]{۲}$

④ $\sqrt{۲}$

۲۸- تابع $f(x)=|x^{۲}-x|$، دارای .... مینیمم نسبی و .... ماکسیمم نسبی می‌باشد. (به ترتیب از راست به چپ)

① ۱ و ۱

② ۱ و ۲

③ ۲ و ۱

④ ۲ و ۲

۲۹- در بین همهٔ مخروط‌های قائم که طول مولد آنها ثابت است، آن که بیش‌ترین حجم را دارد در نظر می‌گیریم. نسبت ارتفاع به شعاع قاعدهٔ آن کدام است؟

① $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

② $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

③ ۱

④ $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$

۳۰- محیط مستطیلی P است. ماکسیمم مساحت آن کدام است؟

① $\frac{P^{۲}}{۲}$

② $\frac{P^{۲}}{۴}$

③ $\frac{P^{۲}}{۸}$

④ $\frac{P^{۲}}{۱۶}$

پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۲ برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته باید عرض‌های نقاط بحرانی را محاسبه نموده و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه نمود.

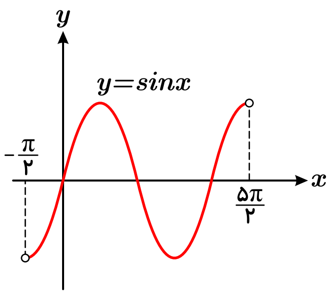
نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $[1,3]$ می‌یابیم. لذا داریم:

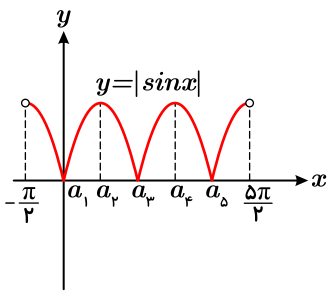
$$f'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)}\\ x=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(2)=k-4\to Min\\ f(1)=k-2\\ f(3)=k\to Max\end{cases}\Rightarrow f(2)+f(3)=k+k-4=2k-4=0\Rightarrow k=2$$

۲ – گزینه ۴ راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 نقاط بحرانی می‌باشند.

در نقاط a_1, a_3, a_5 مشتق ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط a_2, a_4 برابر صفر می‌باشد.





۳ – گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است $(D_f:(-\infty,+\infty))$.

$$y=x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}=x\cdot x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}$$

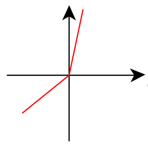
$$\to y=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}\to y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}\to y'=\frac{2}{3}(2\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})=\frac{2}{3}(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2}})$$

$\text{صورت}=0\to 2x-1=0\to x=\frac{1}{2}$ و $\text{مخرج}=0\to x=0$

پس تابع دو نقطه‌ی بحرانی دارد.

۴ – گزینه ۳ هر ۴ گزینه‌ی داده شده را رسم می‌کنیم.

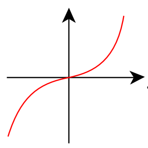
$$1)\ y=3x+|x|=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$$



یک نقطه‌ی بحرانی در $x=0$ دارد.

($x=0$ نقطه‌ی گوشه و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است)

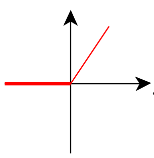
$$2)\ y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$



یک نقطه‌ی بحرانی در $x=0$ دارد.

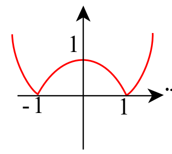
(در $x=0$ مشتق برابر صفر است)

$$3)\ y=x+|x|=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



به علت وجود خط افقی، بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

۴) $y=|x^۲-۱|$



سه نقطه‌ی بحرانی در ۰ و ۱ و -۱ دارد.

($x=۱$ و $x=-۱$ نقاط گوشه و در نتیجه مشتق ناپذیرند و در $x=۰$ مشتق برابر صفر است.)

۵ - گزینه ۱

دقت کنید مخرج این کسر صفر نمی‌شود و همواره تعریف شده است. از عبارت مشتق گرفته و کوچکتر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y'=\frac{۱(x^۲+۱)-۲x(x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-x^۲+۲x+۱}{\underbrace{(x^۲+۱)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}<۰\Rightarrow -x^۲+۲x+۱<۰\Rightarrow x^۲-۲x-۱>۰$$

$$\rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۴+۴=۸\rightarrow x_۱,x_۲=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<۱-\sqrt{۲} \text{ یا } x>۱+\sqrt{۲}$$

پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که شامل xهای بین $۱-\sqrt{۲}$ (تقریباً $-۰٫۴$) و $۱+\sqrt{۲}$ (تقریباً $۲٫۴$) نباشد.

۶ - گزینه ۲ چون $x>۳$ است $x-۳>۰$ می‌باشد و می‌دانیم: $a\geq ۰\ ,\ b\geq ۰\ \rightarrow\ a+b\geq ۲\sqrt{ab}$

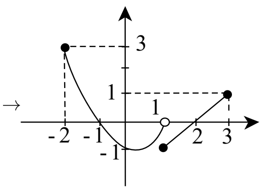
پس: $x-۳+\dfrac{۱}{x-۳}\geq ۲\sqrt{(x-۳)(\dfrac{۱}{x-۳})}\ \rightarrow\ x-۳+\dfrac{۱}{x-۳}\geq ۲$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر ۲ می‌باشد.

۷ - گزینه ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$y=x^۲-۱\rightarrow$ نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به پائین منتقل می‌کنیم

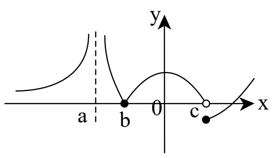
$y=x-۲\rightarrow$ نمودار تابع $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم



با توجه به نمودار تابع واضح است که این تابع دو Min نسبی در نقاطی به طول‌های صفر و یک دارد.

۸ - گزینه ۳

باتوجه به نمودار، تابع f در نقاط $x=b$ (به دلیل نابرابری مشتق‌های راست و چپ و در نتیجه مشتق ناپذیری) و در $x=۰$ (مشتق صفر است) و $x=c$ (ناپیوستگی و در نتیجه مشتق ناپذیری) بحرانی است. دقت کنید در $x=a$، تابع f تعریف نمی‌شود در نتیجه بحرانی نمی‌باشد.



۹ - گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، یعنی $D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

$$f(x)=(x^۲-۲۸)\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'(x)=۲x\cdot\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲-۲۸)$$

$$=\frac{۶x\sqrt[۳]{x^۳}+x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۶x^۲+x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۷x^۲-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

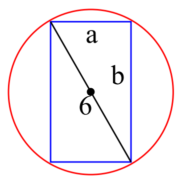
$\text{صورت}=۰\ \Rightarrow\ ۷x^۲-۲۸=۰\ \Rightarrow\ x^۲=۴\ \Rightarrow\ x=\pm ۲$

$\text{مخرج}=۰\ \Rightarrow\ x^۲=۰\ \Rightarrow\ x=۰$

پس طول‌های نقاط بحرانی این تابع ۲ و -۲ و ۰ می‌باشند.

۱۰ - گزینه ۲ مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره را حول ضلع به طول b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با ارتفاع b و شعاع قاعدهٔ a حاصل شود. بنابراین می‌خواهیم $V=\pi a^۲b$ ماکسیمم شود. از آنجا که $a^۲+b^۲=۳۶$ درنتیجه داریم:

$$a^۲=۳۶-b^۲\Rightarrow V=\pi a^۲b=\pi(۳۶-b^۲)b=\pi(۳۶b-b^۳)$$
$$\Rightarrow V'(b)=\pi(۳۶-۳b^۲)=۰\Rightarrow b^۲=۱۲\Rightarrow b=۲\sqrt{۳}$$



۱۱ - گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

$f(x)=\sqrt[۳]{x^۴}-\sqrt[۳]{x^۲}=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}(۲x^{\frac{۱}{۳}}-x^{-\frac{۱}{۳}})=\frac{۲}{۳}(۲\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})=\frac{۲}{۳}(\frac{۲\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}})$

صورت $=۰ \Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x^۲}-۱=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۲=\frac{۱}{۸} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}\in(-۱,۱)$

مخرج $=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x}=۰ \Rightarrow x=۰\in(-۱,۱)$

پس $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و ۰ طول نقاط بحرانی تابع هستند.

۱۲ – گزینه ۳

$y=\cos^۲ x+\sin x \Rightarrow y=۱-\sin^۲ x+\sin x \xrightarrow{\sin x=A} y=۱-A^۲+A\ ,\ A\in[-۱,۱]$

(چون وقتی $۰\le x\le ۲\pi$ است آنگاه $-۱\le \sin x\le ۱$ است)

$y'=-۲A+۱=۰ \Rightarrow A=\frac{۱}{۲}$

حال مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$f(-۱)=۱-۱-۱=-۱\ ,\ f(۱)=۱-۱+۱=۱\ ,\ f(\frac{۱}{۲})=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow$ مطلق Max

۱۳ – گزینه ۱

برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق اول را بررسی می کنیم ضمناً برای آنکه تابع، صعودی باشد باید $y'>۰$ باشد.

$y'=-۸x \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & ۰ & & +\infty \\ \hline y' & & + & ۰ & - & \end{array} \rightarrow x<۰$

۱۴ – گزینه ۲

تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. از تابع، مشتق گرفته و کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$y'=۳(x-۱)^۲(x+۱)+(x-۱)^۳=(x-۱)^۲(۳(x+۱)+x-۱)=\underbrace{(x-۱)^۲}_{+}(۴x+۲)<۰$

$\rightarrow ۴x+۲<۰ \rightarrow ۴x<-۲ \rightarrow x<-\frac{۱}{۲}$

۱۵ – گزینه ۳ اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً f در یک همسایگی، تعریف می‌شود اگر c طول Max نسبی تابع باشد $f(c)$ از مقادیر تابع در یک همسایگی c بزرگ‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست و اگر c طول Min نسبی تابع باشد، $f(c)$ از مقادیر تابع در یک همسایگی c کوچک‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست.

۱۶ – گزینه ۱

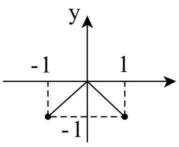
$f'(x)=۳x^۲-۶x-۹=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۱$

حال، مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$f(۳)=-۲۷\ ,\ f(-۱)=۵\ ,\ f(۴)=-۲۰$

پس $f(۳)=-۲۷$ کم‌ترین مقدار تابع است.

۱۷ – گزینه ۲ بهترین روش برای حل این مسأله رسم نمودار است.



$\Rightarrow y_{Max}=۰$

۱۸ – گزینه ۲

$y'=۳x^۲-۶x-۹=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{c}{a}=۳ \end{cases}$ غ ق ق (در بازه قرار ندارد)

حال مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

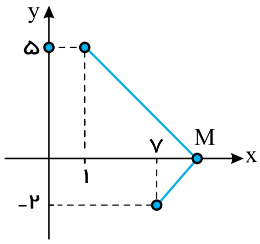
$f(-۲)=-۸-۱۲+۱۸+۵=۳$
$f(-۱)=-۱-۳+۹+۵=۱۰$
$f(۲)=۸-۱۲-۱۸+۵=-۱۷$

بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر ۱۰ می‌باشد.

۱۹ – گزینه ۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ $(x_۱\ ,y_۱)$ و $(x_۲\ ,y_۲)$ از هم برابر $\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$ است.

نقطهٔ $M(x,y)$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم: $d=AM-BM=\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}$

می‌خواهیم d ماکسیمم شود، بنابراین:



$$d' = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+25}} - \frac{2(x-7)}{2\sqrt{(x-7)^2+4}} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+25}} = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+4}} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+25} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2+4}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-7)^2 + 4(x-1)^2 = (x-7)^2(x-1)^2 + 25(x-7)^2 \to 4(x-1)^2 = 25(x-7)^2$$

$$\Rightarrow 2|x-1| = 5|x-7| \xrightarrow{x>7} 2x-2 = 5x-35 \Rightarrow x = 11$$

توجه کنید اگر $1 \le x \le 7$ باشد، معادلهٔ (1) جواب ندارد و اگر $x < 1$ باشد، معادلهٔ $2|x-1| = 5|x-7|$ جواب ندارد.

۲۰ - گزینه ۳

$$y = \sin^2 x - \sin x \xrightarrow{\sin x = A} y = A^2 - A, A \in [-1, 1]$$

دقت کنید وقتی $0 \le x \le 2\pi$ است آنگاه $-1 \le \sin x \le 1$ می‌باشد.

$$y' = 2A - 1 = 0 \to A = \frac{1}{2} : \text{ طول نقطه‌ی بحرانی}$$

$$y(-1) = 1+1 = 2 \,,\; y(1) = 1-1 = 0 \,,\; y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر ۲ می‌باشد.

۲۱ - گزینه ۳

$$y' = 4\frac{x^3}{4} - 4x = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، بازه‌هایی را که تابع نزولی است $(y' < 0)$ مشخص می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\to x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

۲۲ - گزینه ۴

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 2 \to \begin{cases} x = 1 \to y = 5 \to A\begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \\ x = 2 \to y = 4 \to B\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

برای بدست آوردن شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B از این فرمول استفاده می‌کنیم:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-4}{1-2} = -1$$

۲۳ - گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

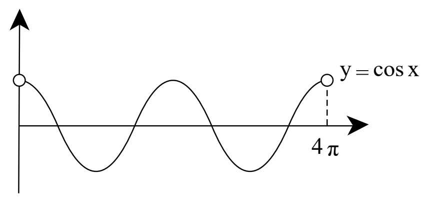
دقت کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $D_f = (-\infty, +\infty)$ است.

$$y = \sqrt[3]{x}(x-2) \to y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-2) + \sqrt[3]{x} \to y' = \frac{x-2+3x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

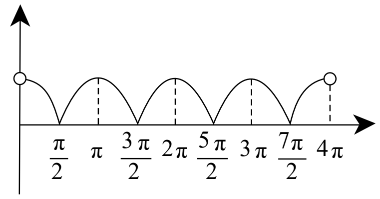
$$\text{صورت} = 0 \to 4x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \text{مخرج} = 0 \to 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \to x = 0$$

۲۴ - گزینه ۳

نمودار $y = \cos x$ در $(0, 4\pi)$ به صورت روبه‌رو است:



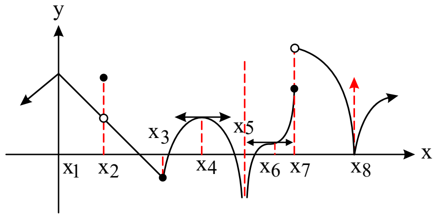
نمودار تابع $f(x) = |\cos x|$ در $(0, 4\pi)$ به صورت روبه‌رو است.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع f در این بازه، در چهار نقطه مشتق ناپذیر $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ و در سه نقطه مشتقی برابر صفر دارد $(\pi, 2\pi, 3\pi)$، پس ۷ نقطه‌ی بحرانی دارد.

۲۵ - گزینه ۲ می دانیم نقاط بحرانی یک تابع، یعنی نقاطی از دامنهٔ تابع که مشتق تابع در آن‌ها صفر است یا موجود نیست. بنابراین:

درست است که در اینجا با تابع $f(x+2)$ مواجهایم، اما دقت کنید که اعمال قوانین انتقال از جنس جمع و تفریق بر روی x، صرفاً نمودار آن را در جهت افقی حرکت می‌دهد و تأثیری برروی تعداد نقاط بحرانی مورد بررسی ما ندارد، پس کافی است نقاط بحرانی همین نمودار داده شده را بیابیم:



$x_۱ , x_۳ \rightarrow$ نقطهٔ گوشه $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

$x_۲ , x_۷ \rightarrow$ ناپیوسته $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

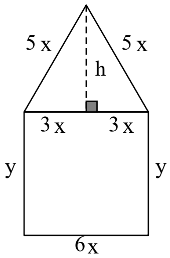
$x_۴ , x_۶ \rightarrow$ دارای خط مماس افقی $\Rightarrow$ f' در آن‌ها برابر صفر است.

$x_۸ \rightarrow$ دارای خط مماس قائم $\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

ضمناً دقت کنید که $x_۵$ متعلق به دامنه نیست و بحرانی نمی‌باشد. پس تعداد نقاط بحرانی همان ۷ نقطه است:

$x_۸ , x_۷ , x_۶ , x_۴ , x_۳ , x_۲ , x_۱$

۲۶ – گزینه ۱



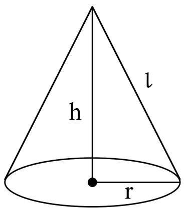
$\rightarrow \text{محیط} = ۱۶x + ۲y = ۲۴ \rightarrow ۲y = ۲۴ - ۱۶x \rightarrow y = ۱۲ - ۸x$

$$\text{مساحت} = \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مستطیل} = \frac{h(۶x)}{۲} + ۶xy = ۳hx + ۶xy$$

یک‌متغیره: $\xrightarrow[h^۲=۱۶x^۲ \rightarrow h=۴x]{(۵x)^۲=(۳x)^۲+h^۲} ۱۲x^۲ + ۶x(۱۲ - ۸x) = ۱۲x^۲ + ۷۲x - ۴۸x^۲ = -۳۶x^۲ + ۷۲x$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} -۷۲x + ۷۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \xrightarrow{y=۱۲-۸x} y = ۱۲ - ۸ = ۴ \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۱}{۴}$$

۲۷ – گزینه ۳



$$\text{حجم استوانه} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \rightarrow \frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \rightarrow r^۲ h = ۱ \rightarrow r^۲ = \frac{۱}{h}$$

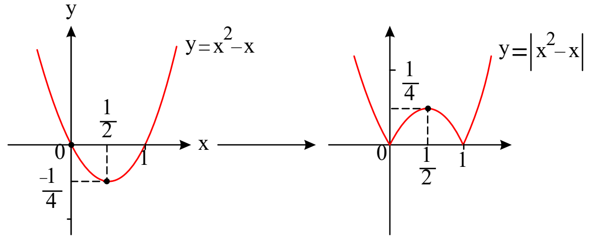
مساحت جانبی: $S = \pi r \ell = \pi r \sqrt{r^۲ + h^۲} = \pi \sqrt{\frac{۱}{h}} \sqrt{\frac{۱}{h} + h^۲} \rightarrow S = \pi \sqrt{h + \frac{۱}{h^۲}}$:یک‌متغیره

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} \pi \times \frac{۱ - \frac{۲h}{h^۴}}{۲\sqrt{h + \frac{۱}{h^۲}}} = ۰ \rightarrow ۱ = \frac{۲}{h^۳} \rightarrow h^۳ = ۲ \rightarrow h = \sqrt[۳]{۲}$$

۲۸ – گزینه ۳ مسئله را به کمک رسم شکل حل می‌کنیم.

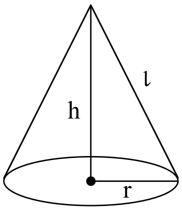
$$y = x^۲ - x \rightarrow S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲} \\ \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۰ - ۱}{۴} \end{array} \right. \rightarrow S \left| \begin{array}{l} \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۴} \end{array} \right.$$

$y = ۰ \rightarrow x(x - ۱) = ۰ \rightarrow x = ۰ , x = ۱$



تابع f در $x=0$ و $x=1$ دارای مینیمم نسبی و در $x=\frac{1}{2}$ دارای ماکسیمم نسبی است.

۲۹ – گزینه ۲ بنابر فرض مسئله، ℓ (طول مولد مخروط‌ها) ثابت است.

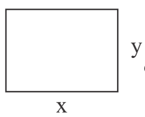


$$\rightarrow \ell^2 = h^2 + r^2 \rightarrow r^2 = \ell^2 - h^2$$

یک‌متغیره: $V = \frac{1}{3} \times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 h - h^3)$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} \frac{1}{3}\pi(\ell^2 - 3h^2) = 0 \rightarrow \ell^2 = 3h^2 \rightarrow h^2 = \frac{\ell^2}{3}$$

$$\xrightarrow{r^2=\ell^2-h^2} r^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{3} = \frac{2\ell^2}{3} \rightarrow \frac{h}{r} = \frac{\frac{\ell}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}\ell}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳۰ – گزینه ۴ محیط مستطیل 

برابر $P = 2(x+y)$ است.

$$P = 2(x+y) \Rightarrow y = \frac{P}{2} - x \xrightarrow{S=xy} S' = x \cdot (\frac{P}{2} - x) = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} -2x + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{P}{4} \xrightarrow{y=\frac{P}{2}-x} y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

پس: $Max\ xy = (\frac{P}{4})(\frac{P}{4}) = \frac{P^2}{16}$

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۲	(۶) - ۲	(۱۱) - ۳	(۱۶) - ۱	(۲۱) - ۳	(۲۶) - ۱
(۲) - ۴	(۷) - ۲	(۱۲) - ۳	(۱۷) - ۲	(۲۲) - ۴	(۲۷) - ۳
(۳) - ۳	(۸) - ۳	(۱۳) - ۱	(۱۸) - ۲	(۲۳) - ۱	(۲۸) - ۳
(۴) - ۳	(۹) - ۳	(۱۴) - ۲	(۱۹) - ۴	(۲۴) - ۳	(۲۹) - ۲
(۵) - ۱	(۱۰) - ۲	(۱۵) - ۳	(۲۰) - ۳	(۲۵) - ۲	(۳۰) - ۴