



علی هاشمی

نام آزمون: آهنگ تغییر

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 4$ تا $x_2 = 7$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x = a$ است. مقدار مثبت

a کدام است؟

- ① $\sqrt{5} + 2$
- ② $2\sqrt{10} - 1$
- ③ $1 + 2\sqrt{10}$
- ④ $5\sqrt{2} - 1$

۲- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است، h کدام است؟

- ① ۱٫۵
- ② ۲
- ③ ۲٫۵
- ④ ۳

۳- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (6x+2)^{\frac{2}{3}}$ در بازه‌ی $[1, \frac{25}{6}]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در شروع این بازه کمتر است؟

- ① $\frac{5}{17}$
- ② $\frac{3}{8}$
- ③ $\frac{8}{19}$
- ④ $\frac{5}{14}$



۴- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 17}$ نسبت به متغیر x ، از $x = 1$ تا $x = 1 + h$ برابر $\frac{1}{3}$ است. h کدام است؟ ($h > 0$)

- ۱) ۲
- ۲) ۲٫۵
- ۳) ۳
- ۴) ۳٫۵

۵- در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[۲٫۲۵, ۲٫۵۶]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چه قدر کمتر است؟

- ۱) $\frac{1}{93}$
- ۲) $\frac{2}{93}$
- ۳) $\frac{1}{62}$
- ۴) $\frac{1}{31}$

۶- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

- ۱) ۰
- ۲) $\frac{1}{18}$
- ۳) $\frac{1}{12}$
- ۴) $\frac{1}{9}$

۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

- ۱) ۲٫۵
- ۲) ۱٫۵
- ۳) ۲
- ۴) ۱



۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر $0,21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

① $\frac{1}{42}$

② $\frac{1}{21}$

③ $\frac{3}{42}$

④ $\frac{2}{21}$

۹- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x_1 = 5$ تا $x_2 = 9$ کدام است؟

① $0,4$

② $0,5$

③ $0,6$

④ $0,7$

۱۰- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول $x = a$ است، a کدام می‌باشد؟

① $11,75$

② $12,25$

③ $12,5$

④ $13,5$

۱۱- در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر f در $t = 4$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه‌ی $t = 3$ تا $t = 5$ بیش تر است؟

① ۱

② $\frac{1}{2}$

③ ۲

④ $\frac{3}{2}$



۱۲- آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r در $r = 10$ کدام است؟

- ① 10π
- ② 15π
- ③ 25π
- ④ 20π

۱۳- اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر f در واحد تغییر x در $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه حد عبارت $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر کدام است؟

- ① -3
- ② $-\frac{3}{2}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 3

۱۴- در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1 = 4$ تا $x_2 = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟

- ① $\frac{7}{540}$
- ② $\frac{11}{540}$
- ③ $\frac{7}{270}$
- ④ $\frac{11}{270}$

۱۵- در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x در $x = 2$ به ازای $\Delta x = -0.1$ کدام است؟

- ① $\frac{5}{38}$
- ② $\frac{5}{19}$
- ③ $-\frac{5}{38}$
- ④ $-\frac{5}{19}$



۱۶- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - g(1)}{h} = 5$ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^3 + x$ در $[1, 2]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع g در $x = 1$ بیشتر است؟

۱) ۵

۲) ۵٫۵

۳) ۶

۴) ۶٫۵

۱۷- در تابعی با ضابطه $f(x) = (3x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[1, 5]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \frac{8}{3}$ چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{72}$

۲) $\frac{1}{144}$

۳) $\frac{1}{48}$

۴) $\frac{1}{288}$

۱۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط در بازه $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ چه قدر از آهنگ لحظه‌ای در ابتدای بازه بیش تر است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۹- اختلاف آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ در بازه $[1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای این تابع در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چقدر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر



۲۰- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x+1}$ نسبت به تغییر x در بازه‌ی $[0, 8]$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- $\frac{1}{4}$ (۲)
- $\frac{1}{3}$ (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۴)

۲۱- اگر آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^2 + 6x - 1$ در $[3, 7]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x = a$ برابر باشد، a کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۲ (۲)
- $\frac{9}{2}$ (۳)
- $\frac{11}{2}$ (۴)

۲۲- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{24}{x^3} + 1$ در بازه‌ی $[1, 2]$ ، چقدر از آهنگ لحظه‌ای این تابع در $x = 1$ بیش‌تر است؟

- ۴۹ (۱)
- ۵۰ (۲)
- ۵۱ (۳)
- ۵۲ (۴)

۲۳- معادله‌ی حرکت یک متغیر روی یک خط مستقیم $x = f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان در لحظه‌ی $t = 2,5$ کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۸ (۳)
- ۷ (۴)



۲۴- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ از $x_1 = -1$ تا $x_2 = 8$ ، چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = -1$ است؟

- ① $\frac{1}{2}$
- ② ۲
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ -۲

۲۵- در تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر در فاصله‌ی $[1, 4]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟

- ① $\sqrt{27}$
- ② $\sqrt[3]{3}$
- ③ $\sqrt[3]{9}$
- ④ $\sqrt{6}$

۲۶- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ در بازه‌ی $[1, 25, 3]$ چقدر است؟

- ① $\frac{6}{7}$
- ② $\frac{2}{7}$
- ③ $\frac{2}{11}$
- ④ ۱

۲۷- آهنگ متوسط تابع $f(x) = 3x^2 - x + 5$ در $[2, 4]$ با آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = a$ برابر است. مقدار a کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ ۳
- ④ $\frac{7}{2}$



۲۸- متحرکی روی یک خط افقی حرکت می‌کند و معادله‌ی حرکت آن $x = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 27t + 3$ است. در کدام زمان‌ها، متحرک در جهت مثبت

خط حرکت می‌کند؟

① $t \geq 7$

② $t \geq 9$

③ $t \leq 6$

④ $2 \leq t \leq 10$

۲۹- به ازای کدام مقدار a ، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = ax^2 + 3x$ در $x = 0$ دو واحد از آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله‌ی $[-1, 2]$ کم‌تر است؟

① -1

② -2

③ 1

④ 2

۳۰- آهنگ متوسط تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع وقتی شعاع از $r = 1$ به $r = 3$ تغییر می‌کند، چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت در

$r = 1.5$ بیشتر است؟

① π

② 0

③ $\frac{3\pi}{2}$

④ $\frac{\pi}{2}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط از } ۷ \text{ تا } ۴ = \frac{f(۷) - f(۴)}{۷ - ۴} = \frac{\frac{۴۹}{۸} - \frac{۱۶}{۵}}{۳} = \frac{۱۱۷}{۱۲۰} = \frac{۳۹}{۴۰}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای (مشقی)} = \frac{۲x(x+1) - 1(x^۲)}{(x+1)^۲} = \frac{x^۲ + ۲x}{(x+1)^۲} \stackrel{x=a}{=} \frac{a^۲ + ۲a}{(a+1)^۲}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{a^۲ + ۲a}{(a+1)^۲} = \frac{۳۹}{۴۰} \Rightarrow \frac{a^۲ + ۲a + 1 - 1}{(a+1)^۲} = \frac{۳۹}{۴۰} \Rightarrow 1 - \frac{1}{(a+1)^۲} = 1 - \frac{1}{۴۰}$$

$$\rightarrow (a+1)^۲ = ۴۰ \rightarrow a+1 = \pm\sqrt{۴۰} \rightarrow a+1 = \pm ۲\sqrt{۱۰} \rightarrow a = -1 + ۲\sqrt{۱۰}, a = -1 - ۲\sqrt{۱۰}$$

۲ - گزینه ۳

$$\frac{f(۲+h) - f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \frac{۲+h + \frac{1}{۲+h} - ۲ - \frac{1}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow ۸h = ۹h + \frac{۹}{۲+h} - \frac{۹}{۲}$$

$$h = \frac{۹}{۲} - \frac{۹}{۲+h} \Rightarrow h = \frac{۱۸ + ۹h - ۱۸}{۲(۲+h)} \Rightarrow 1 = \frac{۹}{۲(۲+h)} \Rightarrow ۲ + ۲h = ۹ \Rightarrow h = \frac{۵}{۲} = ۲,۵$$

۳ - گزینه ۳

$$f(x) = (۶x + ۲)^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{(۶x + ۲)^۲}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(\frac{۲۵}{۶}) - f(1)}{\frac{۲۵}{۶} - 1} = \frac{\sqrt[۳]{۲۷^۲} - \sqrt[۳]{۶۴}}{\frac{۱۹}{۶}} = \frac{۹ - ۴}{\frac{۱۹}{۶}} = \frac{۳۰}{۱۹} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای (مشقی)} &= \frac{۲(۶)}{۳\sqrt[۳]{۶x+۲}} \rightarrow f'(1) = \frac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \end{aligned} \right\} \rightarrow ۲ - \frac{۳۰}{۱۹} = \frac{۸}{۱۹}$$

۴ - گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{1}{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{(1+h)^۲ - ۲(1+h)} + 1\sqrt{16} - \sqrt{16}}{h} = \frac{1}{۳}$$

$$= \frac{\sqrt{h^۲ + ۲h + 1 - ۲ - ۲h + 16} - 4}{h} = \frac{1}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h^۲ + 16} - 4}{h} = \frac{1}{۳} \Rightarrow ۳\sqrt{h^۲ + 16} - 12 = h$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{h^۲ + 16} = 12 + h \xrightarrow{\text{توان}} ۹(h^۲ + 16) = 144 + h^۲ + ۲۴h$$

$$\Rightarrow ۹h^۲ + 144 = 144 + h^۲ + ۲۴h \xrightarrow{h \neq 0} ۸h^۲ = ۲۴h \rightarrow ۸h = ۲۴ \Rightarrow h = ۳$$

۵ - گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲,۵۶) - f(۲,۲۵)}{۲,۵۶ - ۲,۲۵} = \frac{\sqrt{۲,۵۶} - \sqrt{۲,۲۵}}{۲,۵۶ - ۲,۲۵} = \frac{۱,۶ - ۱,۵}{۰,۳۱} = \frac{۰,۱}{۰,۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$\text{آهنگ آنی (لحظه‌ای)} = f'(x) = \frac{1}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۲,۲۵) = \frac{1}{۲ \times ۱,۵} = \frac{1}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{1}{۹۳}$$

۶ - گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳) - f(۰)}{۳ - ۰} = \frac{۵ - ۴}{۳} = \frac{1}{۳}$$



$$\text{بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و لحظه‌ای، برابر صفر است.}$$

$$7 - \text{گزینه ۴}$$

$$\text{پس آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ آنی بیشتر است.}$$

$$8 - \text{گزینه ۱ وقتی } x \text{ اولیه، یک می‌باشد و نمو متغیر } ۲۱ \text{ است پس } x \text{ ثانویه } ۱,۲۱ \text{ است.}$$

$$f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-72x}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \stackrel{x=\sqrt[3]{12}}{=} \frac{-72}{12} = -6$$

$$\text{آهنگ متوسط} [1, 1,21] = \frac{f(1,21) - f(1)}{1,21 - 1} = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{1}}{0,21} = \frac{1,1 - 1}{0,21} = \frac{0,1}{0,21} = \frac{10}{21} = \frac{10}{21}$$

$$x = 1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای در } x = 1 \text{ } f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین تفاضل آنها} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42} \text{ است.}$$

۹ - گزینه ۲

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{9 - 5} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۰ - گزینه ۲

آهنگ لحظه‌ای تابع $y = f(x)$ در $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7} \text{ و آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{49} \Rightarrow 4a = 49 \Rightarrow a = 12,25$$

۱۱ - گزینه ۱ همانگونه که می‌دانیم آهنگ آنی تغییر تابع f در نقطه‌ی $t = 4$ برابر با مشتق تابع در این نقطه است. پس داریم:

$$f'(t) = -\frac{240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{240}{5} - \frac{240}{3}}{2} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

پس آهنگ آنی یک واحد از آهنگ متوسط بیشتر است.

۱۲ - گزینه ۴ از آن‌جا که مساحت دایره برابر $S = \pi r^2$ است و آهنگ آنی تغییر S نسبت به شعاع برابر مشتق S نسبت به r است، لذا داریم:

$$S = \pi r^2 \rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi r \stackrel{r=10}{=} 20\pi$$

۱۳ - گزینه ۳ با توجه به اینکه آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ است، در نتیجه $f'(2) = -\frac{3}{2}$ می‌باشد.

$$\text{پس: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط از } ۴ \text{ تا } ۱۲ &= \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60} \\ \text{مشتق آهنگ لحظه‌ای} &= \frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{2x+1}} \stackrel{x=4}{=} \frac{-\frac{1}{2}}{6} = -\frac{1}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{60} - (-\frac{1}{12}) = \frac{11}{60}$$



$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1,9) - f(2)}{-0,1} = \frac{\frac{1}{1,9} - \frac{1}{2}}{-0,1} = \frac{\frac{2-1,9}{2 \times 1,9}}{-0,1} = \frac{1}{3,8} = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$$

۱۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1 + 2h) - g(1)}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2g'(1 + 2h)}{1} = 2g'(1) = 5 \rightarrow g'(1) = \frac{5}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع} &= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(1 + 2) - (1 + 1)}{1} = 1 \\ \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } g \text{ در } x = 1 &= g'(1) = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

۱۷ - گزینه ۲

ابتدا تابع داده شده را به صورت $f(x) = (3x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(3x + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}$ می‌نویسیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{4} = \frac{-1}{16}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{3x + 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{پس داریم: } -\frac{1}{16} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-1}{16} + \frac{12}{16} = \frac{11}{16}$$

۱۸ - گزینه ۴

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \text{ در } \text{آهنگ متوسط} = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{2 - 3}{\frac{1}{6}} = -6$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{9}} = -9$$

واضح است که آهنگ متوسط ۳ واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

۱۹ - گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(27 - 9 + 5) - (1 - 1 + 5)}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x = 2 \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(2) = 3x^2 - 2x = 3(4) - 2(2) = 8$$

اختلاف این دو مقدار برابر یک است.

۲۰ - گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{1}}{8} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۲۱ - گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{(49 + 42 - 1) - (9 + 18 - 1)}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{مشتق} = 2x + 6 \rightarrow f'(a) = 2a + 6$$

$$\text{پس: } 2a + 6 = 16 \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$$

۲۲ - گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(3 + 1) - (24 + 1)}{1} = -21$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{مشتق} = \frac{-3x^2(24)}{x^3} = \frac{-72}{x} \rightarrow f'(1) = -72$$

بنابراین اختلاف این دو برابر ۵۱ است.

۲۳ - گزینه ۴ اگر $x = f(t)$ معادله‌ی حرکت یک متحرک باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان در لحظه‌ی $t = t_0$ ، همان سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = t_0$ است، یعنی $V(t_0) = f'(t_0)$

$$V = f'(t) = 4t - 3 \xrightarrow{t=2,5} V = 10 - 3 = 7$$



۲۴ - گزینه ۳

اگر $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^2}$ است.

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(8) - f(-1)}{8 + 1} = \frac{\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{(-1)^2}}{9} = \frac{4 - 1}{9} = \frac{1}{3} \\ \text{آهنگ متوسط} &= f'(x) = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{1}{3} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

۲۵ - گزینه ۳

اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ باشد داریم: $f(1) = 1$, $f(4) = \frac{1}{2}$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{3} = -\frac{1}{6}$$

دقت کنید $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ می‌باشد $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ آهنگ لحظه‌ای

دو طرف را به توان $-\frac{2}{3}$ می‌رسانیم

$$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} \rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \rightarrow (x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow x = (3^{-1})^{-\frac{2}{3}} \rightarrow x = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

۲۶ - گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(1,25)}{3 - 1,25} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1,25}}{1,75} = \frac{2 - 1,25}{1,75} = \frac{0,75}{1,75} = \frac{2}{7}$$

۲۷ - گزینه ۳

آهنگ لحظه‌ای تابع $y = f(x)$ در $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{49 - 15}{2} = \frac{34}{2} = 17 \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= f'(x) = 6x - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6x - 1 = 17 \Rightarrow x = 3$$

۲۸ - گزینه ۲ در مکان‌هایی که سرعت مثبت است، جهت حرکت متحرک مثبت است. از طرفی برای تعیین سرعت باید از معادله‌ی حرکت مشتق بگیریم:

$$V = \frac{dx}{dt} = t^2 - 12t + 27 = (t - 9)(t - 3) = 0 \rightarrow t = 3, t = 9$$

t	0	3	9
V	+	0	+

همان‌طور که از جدول تعیین علامت می‌توان دریافت در لحظات $0 \leq t \leq 3$ و $t \geq 9$ سرعت متحرک مثبت است، پس متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند.

۲۹ - گزینه ۴ ابتدا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع را در $x = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 2ax + 3 \Rightarrow f'(0) = 3$$

هم‌چنین آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله‌ی $[-1, 2]$ برابر است با:

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(4a + 6) - (a - 3)}{3} = a + 3$$

چون آهنگ لحظه‌ای دو واحد از آهنگ متوسط کم‌تر است، بنابراین:

$$(a + 3) - 3 = 2 \Rightarrow a = 2$$

۳۰ - گزینه ۱

آهنگ متوسط تغییر مساحت دایره $(S(r) = \pi r^2)$ می‌شود:

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} = \frac{S(3) - S(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi$$

$$S(r) = \pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 2\pi r \xrightarrow{r=1,5} S'(1,5) = 3\pi$$

بنابراین آهنگ متوسط از آهنگ لحظه‌ای π تا بیشتر است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۴	۱۲ - ۴	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۴
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۳	۳۰ - ۱