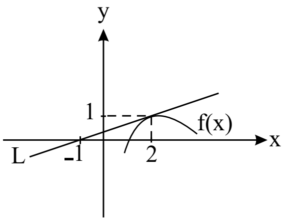
نام آزمون: مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - در شکل مقابل خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به‌طول $x = ۲$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x) = \sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x = ۴$ کدام است؟



① $\frac{۱}{۶}$

② $\frac{۱}{۱۲}$

③ $\frac{۱}{۲۴}$

④ $\frac{۱}{۴۸}$

۲ - اگر $f(۲x+۱) = g(x^۲ + \sqrt{x})$ و $f'(۳) = ۵$ باشد، $g'(۲)$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۳ - اگر $g(x) = \dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

① -۲

② -۱

③ ۲

④ ۳

۴ - اگر $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{f(۳) - f(x)}{x - ۳}$ برابر ۴ باشد، مشتق تابع $g(x) = f(\dfrac{۳}{x})$ در نقطهٔ $x = ۱$ کدام است؟

① ۱۲

② -۱۲

③ ۴

④ -۳

۵- اگر $\frac{f(x)}{۲} = x - |x|$ و $g(x) = ۲x + ۲|x|$ باشند، مشتق تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

① ۱
② صفر
③ -۱
④ وجود ندارد.

۶- اگر مشتق $f(\sqrt[۳]{x-۱})$ در $x = ۲$ برابر -۱ باشد، مقدار مشتق $f(\frac{۲x+۱}{x+۳})$ در $x = ۲$ کدام است؟

① -۳
② -۶
③ $-۰٫۳$
④ $-۰٫۶$

۷- اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{-h} = ۲$، مقدار مشتق تابع $f(x^{۲}+x)$ در $x = ۱$ کدام است؟

① ۲
② $\frac{۱}{۲}$
③ -۲
④ $\frac{۱}{۳}$

۸- اگر $\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{۶-۲x} = ۳$ باشد، مقدار مشتق $f(\frac{۲x+۱}{x-۱})$ به‌ازای $x = ۴$ کدام است؟

① ۱
② ۲
③ -۱
④ -۲

۹ - هرگاه $g'(x)=\frac{1}{x}$ و $g\left(f(x)\right)=2x^{3}+5x^{2}$ باشد، $\frac{f(-1)}{f'(-1)}$ کدام است؟

① -2

② $-\frac{1}{2}$

③ -4

④ $-\frac{1}{4}$

۱۰ - اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $f'(a)=f''(a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

① -1

② -2

③ -3

④ -4

۱۱ - اگر $f(x)=\frac{3x+1}{2x+1}$ و $g(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^{2}}$ باشد، مقدار $\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^{2}}$ به‌ازای $x=9$ کدام است؟

① $\frac{5}{6}$

② $-\frac{5}{6}$

③ $\frac{7}{6}$

④ $-\frac{7}{6}$

۱۲ - اگر $f(x)=\sqrt{2x+3}$ باشد، حاصل $ff''+(f')^{2}$ کدام است؟

① صفر

② 1

③ 2

④ $\frac{1}{2}$

۱۳ - در تابع درجهٔ دوم f داریم: $f'(۱) = ۲$ و $f''(۳) = ۴$. مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

① ۴

② ۶

③ ۸

④ ۲

۱۴ - مشتق مرتبه‌ی سوم تابع $y = \sqrt[۳]{۲x - ۱}$ به ازای $x = ۱$ کدام است؟

① $-\frac{۴۰}{۹}$

② $\frac{۴۰}{۹}$

③ $\frac{۴۰}{۲۷}$

④ $\frac{۸۰}{۲۷}$

۱۵ - در چند نقطه، مماس بر نمودار منحنی $y = \sqrt{۱ - ۴x^۲}$ موازی یکی از محورهای مختصات است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۱۶ - خط‌های $y = k_۱$ و $y = k_۲$ بر نمودار تابع $y = ۹x + \frac{۱}{x}$ مماس هستند. حاصل $|k_۱ - k_۲|$ کدام است؟$(k_۱, k_۲ \in R)$

① ۸

② ۶

③ ۱۲

④ ۱۸

۱۷ - در نقطه‌ای با کدام طول از منحنی $y = x^{۲} - ۶x - ۱$ ، شیب خط مماس برابر ۴ است؟

(۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۸ - معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = x + \frac{۱}{x}$ در $x = ۱$ واقع بر منحنی کدام است؟

(۱) $x = ۱$
(۲) $y = ۲$
(۳) $y = ۰$
(۴) $x + y = ۳$

۱۹ - معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x - \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $(۴, ۲)$ چگونه است؟

(۱) $۴y - ۳x + ۴ = ۰$
(۲) $۴y + ۳x + ۴ = ۰$
(۳) $۳x - ۴y + ۴ = ۰$
(۴) $۳x + ۴y - ۴ = ۰$

۲۰ - معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = \frac{۲x - ۱}{x + ۳}$ در نقطه‌ای به طول -۲ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $y = ۷x + ۹$
(۲) $y = ۶x + ۷$
(۳) $y = -۷x + ۹$
(۴) $y = ۴x + ۳$

۲۱ - شیب خط مماس بر منحنی $y = \dfrac{x - \sqrt{x^{۲} + ۶x}}{۲x - ۱}$ در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ واقع بر آن کدام است؟

① $\dfrac{۱۹}{۳۶}$

② $\dfrac{۱۳}{۳۶}$

③ $\dfrac{۵}{۹}$

④ $\dfrac{۴}{۹}$

۲۲ - اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \dfrac{x^{۳}}{۳} - \dfrac{x^{۲}}{۲} - ۶x$ باشد، خط مماس نمودار تابع gof در چند نقطه موازی محور طول‌ها است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۲۳ - خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x|x|$، در نقطهٔ $(۱, ۱)$، منحنی را در نقطه‌ای دیگر قطع می‌کند. طول این نقطهٔ تقاطع کدام است؟

① $-۱ + \sqrt{۲}$

② $-۱ - \sqrt{۲}$

③ -۱

④ $\dfrac{-۱ - \sqrt{۵}}{۲}$

۲۴ - معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $h(x) = (x^{۲} + ۳x + ۱)^{۷}$ در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ واقع بر آن کدام است؟

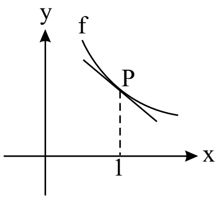
① $y - ۷x = -۶$

② $y + ۶x = ۷$

③ $y + ۶x = -۷$

④ $y - ۷x = ۶$

۲۵ - شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f است. اگر داشته باشیم: $f(1)=2$ و $f'(1)=-\frac{3}{2}$، آنگاه خط مماس بر تابع f در نقطهٔ P، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟



① $\frac{7}{2}$

② $\frac{5}{3}$

③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{5}{2}$

۲۶ - به‌ازای کدام مقدار مثبت a، مماس‌های رسم‌شده در نقاط به طول‌های ۱ و ۳− واقع بر نمودار تابع $y=ax^2-x-1$ برهم عمودند؟

① $\frac{1+\sqrt{7}}{6}$

② $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

③ $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

④ $1+\sqrt{7}$

۲۷ - مساحت ناحیهٔ محصور بین خط مماس بر منحنی $y=\frac{x}{x+4}$ در $x=1$ واقع بر منحنی و محورهای مختصات کدام است؟

① ۰٫۰۰۱

② ۰٫۰۱

③ ۰٫۰۵

④ ۰٫۰۰۵

۲۸ - به‌ازای کدام مقدار b، منحنی $f(x)=ax^2+2x$ بر خط $g(x)=x+b$ در $x=1$ مماس است؟

① $\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ ۱

④ ۱−

۲۹- خط $y=ax+b$ نمودار تابع $f(x)=\log_{2}^{x+1}$ را دو نقطه به طول‌های $-\frac{1}{2}$ و ۳ قطع می‌کند. $(7a)$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۳۰- دو منحنی به معادلات $y=x^2+2x-4a$ و $y=\frac{1}{2}x^2+ax$ با کدام طول بر هم مماس هستند؟

(۱) -2
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) -4

۳۱- خط $y=k$ بر تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ مماس است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

(۱) -4
(۲) -16
(۳) -64
(۴) -1

۳۲- اگر منحنی $f(x)=ax^2-bx+2$ بر خط $g(x)=bx-6$ در $x=2$ مماس باشد، a کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -1
(۴) -2

۳۳- خط به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}(x-b)$ بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x}$ مماس است، b کدام است؟

(۱) -2
(۲) ۲
(۳) -1
(۴) ۱

۳۴- خط به معادله‌ی $y=5x+1$ در نقطه‌ای به طول $x=3$ بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^2(x)-16f(x)}{3-x}$ کدام است؟

① ۸۰

② -80

③ ۱۶۰

④ -160

۳۵- خط $y=mx+2$، منحنی $y=(m+1)x^2+2x-3$ را در دو نقطه قطع می‌کند. به ازای کدام مقدار m مجموع طول نقاط برخورد دو نمودار برابر $-\dfrac{1}{2}$ است؟

① ۵

② ۹

③ ۱

④ -11

۳۶- منحنی $y=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}$ و خط $y=2x+1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۳۷- خطی که از دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}4\\-3\end{vmatrix}$ می‌گذرد، بر منحنی $y=\dfrac{k}{x+3}$ مماس است. مقدار k کدام است؟

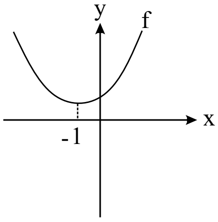
① ۲۵

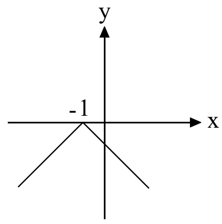
② -25

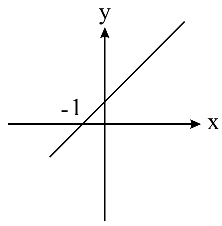
③ ۴

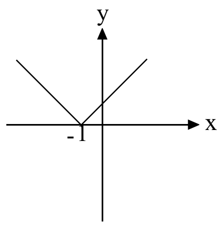
④ -4

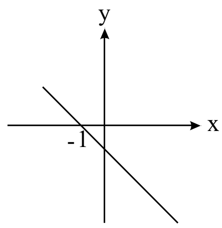
۳۸- اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت سهمی زیر باشد، نمودار $f'(x)$ کدام خواهد بود؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ می‌دانیم اگر $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه $y'=u'\cdot f'(u)$ است.

ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,0)$ را می‌یابیم.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{-1-2}=\frac{1}{3}$$

شیب خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x=2$ یعنی $f'(2)$ برابر $\frac{1}{3}$ است و داریم:

$$f(2)=1\quad,\quad f'(2)=\frac{1}{3}$$

حال برای یافتن شیب خط مماس بر تابع $g(x)=\sqrt{f(\sqrt{x})}$ در نقطهٔ $x=4$ داریم:

$$g'(x)=\frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}\Rightarrow g'(4)=\frac{\frac{1}{4}f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=\frac{f'(2)}{8\sqrt{f(2)}}\Rightarrow g'(4)=\frac{\frac{1}{3}}{8\sqrt{1}}=\frac{1}{24}$$

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر $y=f(u)$ باشد، آن‌گاه $y'=u'\cdot f'(u)$ است.

$$f(2x+1)=g(x^2+\sqrt{x})\xrightarrow{\text{مشتق}}2f'(2x+1)=(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})g'(x^2+\sqrt{x})$$

$$x=1\Rightarrow 2f'(3)=(2+\frac{1}{2})g'(1+1)\Rightarrow 2f'(3)=\frac{5}{2}g'(2)\Rightarrow g'(2)=\frac{4}{5}f'(3)\Rightarrow g'(2)=\frac{4}{5}\times 5=4$$

۳ - گزینه ۱ می‌دانیم $(f(g(x)))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(2)=6\to g'(2)\cdot f'(g(2))=6$$

$$\text{توجه کنید}:\begin{cases} g(x)=\frac{2x+1}{x-1}\to g(2)=\frac{4+1}{2-1}=5\\ g(x)=\frac{2x+1}{x-1}\to g'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+1)}{(x-1)^2}\to g'(2)=-3\end{cases}$$

$$g'(2)\cdot f'(g(2))=6\to -3f'(5)=6\to f'(5)=-2$$

۴ - گزینه ۱ می‌دانیم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ و $(f(u))'=u'\cdot f'(u)$ است.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(3)-f(x)}{x-3}=-\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-f'(3)=4\longrightarrow f'(3)=-4$$

$$g'(x)=(\frac{3}{x})'f'(\frac{3}{x})=-\frac{3}{x^2}f'(\frac{3}{x})$$

$$\Rightarrow g'(1)=\frac{-3}{(1)^2}f'(\frac{3}{1})=(-3)\times(-4)=12\Rightarrow g'(1)=12$$

۵ - گزینه ۲

$$f(x)=2x-2|x|=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ 4x & x<0\end{cases}\quad,\quad g(x)=2x+2|x|=\begin{cases}4x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$x\ge 0\longrightarrow fog(x)=0\longrightarrow \text{مشتق}=0$$

$$x<0\longrightarrow fog(x)=4(0)=0\longrightarrow \text{مشتق}=0$$

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر $y=f(u)$ باشد آن‌گاه $y'=u'f'(u)$ است.

$$y=f(\sqrt[3]{x-1})\to y'=\frac{1(1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}f'(\sqrt[3]{x-1})\xrightarrow{y'(2)=-1}-1=\frac{1}{3}f'(1)\to f'(1)=-3$$

$$y=f\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)\rightarrow y'=\frac{2(x+3)-1(2x+1)}{(x+3)^2}f'\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$$

$$\rightarrow y'(2)=\frac{5}{25}f'(1)=\frac{1}{5}(-3)=-\frac{3}{5}=-0{,}6$$

۷ ـ گزینه ۳ می‌دانیم $(f(u))'=u'\cdot f'(u)$ است.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{-h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{3f'(2+3h)}{-1}=-3f'(2)=2\rightarrow f'(2)=-\frac{2}{3}$$

$$y=f(x^2+x)\rightarrow y'=(2x+1)f'(x^2+x)\rightarrow y'(1)=3f'(2)=3(\frac{-2}{3})=-2$$

۸ ـ گزینه ۲

می‌دانیم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ و $y=f(u)\rightarrow y'=u'f'(u)$ است.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{-2(x-3)}=\frac{1}{-2}\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\frac{1}{2}f'(3)=3\Rightarrow f'(3)=-6$$

$$y=f(\frac{2x+1}{x-1})\Rightarrow y'=(\frac{2x+1}{x-1})'f'(\frac{2x+1}{x-1})=(\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2})f'(\frac{2x+1}{x-1})$$

$$y'=\frac{-3}{(x-1)^2}f'(\frac{2x+1}{x-1})\xrightarrow{x=4}y'(4)=\frac{-3}{9}f'(\frac{9}{3})=-\frac{3}{9}\times(-6)=2$$

۹ ـ گزینه ۴

می‌دانیم $(g(f(x)))'=f'(x)\cdot g'(f(x))$ است.

$$g'(x)=\frac{1}{x}\ ,\ g(f(x))=2x^3+5x^2\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)\cdot g'(f(x))=6x^2+10x$$

$$\xrightarrow{g'(f(x))=\frac{1}{f(x)}}f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=6x^2+10x\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=6x^2+10x$$

$$x=-1\Rightarrow\frac{f'(-1)}{f(-1)}=6(-1)^2+10(-1)=6-10=-4\Rightarrow\frac{f(-1)}{f'(-1)}=-\frac{1}{4}$$

۱۰ ـ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}=3(x+1)^{-2}$$

$$f''(x)=-6(x+1)^{-3}=\frac{-6}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow f'(a)=f''(a)\Rightarrow\frac{3}{(a+1)^2}=\frac{-6}{(a+1)^3}\Rightarrow\frac{-2}{a+1}=1\Rightarrow a+1=-2\Rightarrow a=-3$$

۱۱ ـ گزینه ۳

با توجه به مشتق کسر داریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

حال $\frac{g(x)}{f'(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{3x+1}{2x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$y=\frac{g(x)}{f'(x)}=\frac{\frac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^2}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}=x+\sqrt{x}\Rightarrow y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(9)=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

۱۲ ـ گزینه ۱

عبارت خواسته‌شده مشتق ff' است زیرا:

$$(ff')'=f'f'+f''f=f'^2+ff''$$

بنابراین کافی است از تابع داده‌شده مشتق بگیریم در خود تابع ضرب می‌کنیم و سپس از حاصل، مشتق بگیریم.

$$(f\cdot f')' = \left(\sqrt{۲x+۳}\times\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x+۳}}\right)' = (۱)' = ۰$$

۱۳ - گزینه ۲ با فرض $f(x)=ax^۲+bx+c$ داریم:

$$f'(x)=۲ax+b \Rightarrow f''(x)=۲a \Rightarrow f''(۳)=۲a \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$f'(۱)=۲a+b=۲ \Rightarrow ۴+b=۲ \Rightarrow b=-۲ \Rightarrow f'(x)=۴x-۲$$

$$f'(۲)=۴\times۲-۲=۶$$

۱۴ - گزینه ۴

$$y=(۲x-۱)^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}(۲x-۱)^{\frac{-۲}{۳}} \Rightarrow y''=-\frac{۸}{۹}(۲x-۱)^{-\frac{۵}{۳}}$$
$$\Rightarrow y^{(۳)}=\frac{۸۰}{۲۷}(۲x-۱)^{-\frac{۸}{۳}} \xrightarrow{x=۱} y^{(۳)}=\frac{۸۰}{۲۷}$$

۱۵ - گزینه ۳

می‌دانیم که شیب مماس افقی صفر است (مشتق برابر صفر) و شیب مماس قائم بی‌نهایت است (مشتق برابر بی‌نهایت است)

$$y=\sqrt{۱-۴x^۲} \Rightarrow y'=\frac{-۸x}{۲\sqrt{۱-۴x^۲}} \Rightarrow \begin{cases} \text{مماس افقی} \xrightarrow{\text{صورت}=۰} -۸x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ \text{مماس قائم} \xrightarrow{\text{مخرج}\ =۰} \sqrt{۱-۴x^۲}=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین مجموعاً در ۳ نقطه، مماس بر منحنی موازی محورهای مختصات است.

۱۶ - گزینه ۳ چون خطوط داده شده، خطوطی افقی هستند که بر تابع مماس شده‌اند باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است. (خطوط افقی دارای شیبی برابر صفر هستند و شیب خط مماس بر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول a همان مشتق تابع در $x=a$ است.)

$$y=۹x+\frac{۱}{x} \xrightarrow{y'=۰} ۹-\frac{۱}{x^۲}=۰ \to \frac{۱}{x^۲}=۹ \to x^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$\to \begin{cases} x=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y=۹(\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۶ \to k_۱=۶ \\ x=-\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y=۹(-\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}=-۶ \to k_۲=-۶ \end{cases} \to |k_۱-k_۲|=۱۲$$

۱۷ - گزینه ۴ شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در $x=a$ برابر $m=f'(a)$ است.

با توجه به نکته‌ی فوق باید x ای را بیابیم که به ازای آن ۴ $y'=$ می‌شود.

$$m=y'=۲x-۶=۴ \Rightarrow x=۵$$

۱۸ - گزینه ۲

$$۱)\, x=۱ \to y=۱+۱=۲ \to A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$$
$$۲)\, y'=۱-\frac{۱}{x^۲} \to m_{\text{مماس}}=۱-۱=۰$$
$$۳)\, y-۲=۰(x-۱) \to y=۲$$

توجه کنید که معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ با شیب صفر، برابر $y=b$ است و معادله‌ی خط گذرنده از همین نقطه با شیب تعریف نشده، برابر $x=a$ است.

۱۹ - گزینه ۱

$$y=x-\sqrt{x} \Rightarrow y'=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$
$$m_{\text{مماس}}=y'(۴)=(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{۴}})=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

حال با داشتن شیب و نقطه، معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{۳}{۴}(x-۴) \to ۴y-۸=۳x-۱۲ \to ۴y-۳x+۴=۰$$

۲۰ - گزینه ۱

$$۱)\ x=-۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-۵ \to A\left|\begin{matrix}-۲\\-۵\end{matrix}\right.$$

۲) $y' = \dfrac{2(x+3) - 1\,(2x-1)}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2} \to m_{\text{مماس}} = 7$

۳) $y + 5 = 7(x+2) \to y = 7x + 9$

۲۱ - گزینه ۲ برای پیدا کردن شیب خط مماس، کافی است که از تابع مشتق گرفته و به جای x، عدد ۲ را قرار دهیم.

$$y' = \frac{\left(1 - \dfrac{2(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x}}\right)(2x-1) - 2\left(x - \sqrt{x^2+6x}\right)}{(2x-1)^2}$$

به ازای $x = 2$ مقدار $\sqrt{x^2+6x}$ برابر ۴ می‌شود پس خواهیم داشت:

$$y' = \frac{\left(1 - \frac{5}{4}\right)(3) - 2(2-4)}{9} = \frac{\frac{-3}{4} + 4}{9} = \frac{13}{36}$$

۲۲ - گزینه ۱ می‌دانیم $(gof)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ است.

برای آنکه خط مماس بر منحنی تابع gof موازی محور طول‌ها باشد، باید شیب آن برابر صفر باشد، پس باید معادلهٔ $(gof)'(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = x^2 - x - 6$$

$$(gof)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times g'(\sqrt{x}) = \frac{g'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow g'(\sqrt{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 & \text{غ‌ق‌ق} \\ \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

پس معادلهٔ $(gof)'(x) = 0$ فقط یک جواب دارد.

۲۳ - گزینه ۲

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \longrightarrow f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \longrightarrow m_{\text{مماس}} = f'(1) = 2(1) = 2$$

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \\ m = 2 \end{cases} \longrightarrow y - 1 = 2(x-1) \longrightarrow y = 2x - 1$$

اکنون باید تقاطع این خط با قسمت xهای منفی $f(x)$ یعنی $f(x) = -x^2$ را پیدا کنیم.

$$2x - 1 = -x^2 \longrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8$$

$$\to \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \ (\text{مثبت است}) \ \text{غ‌ق‌ق} \\ x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \ \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۴

۱) $x = -1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -1 \to \left| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right.$

۲) $h'(x) = 7(x^2 + 3x + 1)^6(2x+3) \xrightarrow{x=-1} m_{\text{مماس}} = 7(-1)^6(1) = 7$

۳) $y + 1 = 7(x+1) \to y + 1 = 7x + 7 \to y - 7x = 6$

۲۵ - گزینه ۳ خط مماس بر تابع f را در نقطهٔ $P \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$ به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که شیب خط مماس برابر $f'(1)$ می‌باشد:

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{7}{2} \xrightarrow[\text{یعنی } y=0]{\text{تقاطع با محور } x \text{ ها}} x = \frac{7}{3}$$

مشتق

۲۶ ـ گزینه ۱

$$y=ax^{۲}-x-۱\to y'=۲ax-۱\to\begin{cases}\text{شیب مماس در } x=۱\to y'(۱)=۲a-۱\\ \text{شیب مماس در } x=-۳\to y'(-۳)=-۶a-۱\end{cases}$$

چون دو مماس بر هم عمودند، داریم:

$$(۲a-۱)(-۶a-۱)=-۱\to -۱۲a^{۲}-۲a+۶a+۱=-۱$$

$$\to ۱۲a^{۲}-۴a-۲=۰\to ۶a^{۲}-۲a-۱=۰\to\Delta=۴+۲۴=۲۸\to a=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۷}}{۱۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۷}}{۶}$$

$$\xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱+\sqrt{۷}}{۶}$$

۲۷ ـ گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=\frac{x}{x+۴}$ در $x=۱$ را می‌یابیم.

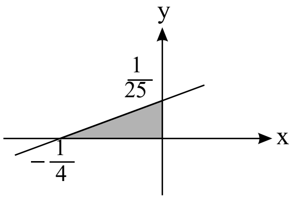
$$۱)\ x=۱\to y=\frac{۱}{۵}\to A(۱,\frac{۱}{۵})$$

$$۲)\ y'=\frac{۱(x+۴)-۱\times x}{(x+۴)^{۲}}=\frac{۴}{(x+۴)^{۲}}\to \text{شیب مماس}\ m=y'(۱)=\frac{۴}{۲۵}$$

$$۳)\ y-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۲۵}(x-۱)\to y=\frac{۴}{۲۵}x-\frac{۴}{۲۵}+\frac{۱}{۵}\to y=\frac{۴}{۲۵}x+\frac{۱}{۲۵}$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x=۰\to y=\frac{۱}{۲۵}\ ,\ y=۰\to\frac{۴}{۲۵}x+\frac{۱}{۲۵}=۰\to x=-\frac{۱}{۴}$$



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۰۰}=۰/۰۰۵$$

۲۸ ـ گزینه ۱ اگر دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است.

$$f(۱)=g(۱)\to a+۲=۱+b\to a-b=-۱\quad\star$$

$$f'(۱)=g'(۱)\to ۲ax+۲=۱\to ۲a+۲=۱\to ۲a=-۱\to a=\frac{-۱}{۲}\xrightarrow{\star} b=\frac{۱}{۲}$$

۲۹ ـ گزینه ۴

$$f(x)=\log_{۲}^{x+۱}\xrightarrow{x=۳} y=\log_{۲}^{۴}=\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\ ,\ A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=ax+b}۲=۳a+b$$

$$f(x)=\log_{۲}^{x+۱}\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} y=\log_{۲}^{\frac{۱}{۲}}=\log_{۲}^{۲^{-۱}}=-۱\ ,\ B\left|\begin{matrix}-\frac{۱}{۲}\\-۱\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=ax+b}-۱=-\frac{۱}{۲}a+b$$

$$\begin{cases}۳a+b=۲\\ -\frac{۱}{۲}a+b=-۱\end{cases}\to a=\frac{۶}{۷}\to ۷a=۶$$

۳۰ ـ گزینه ۴ وقتی دو تابع بر هم مماسند معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases}y=\frac{۱}{۲}x^{۲}+ax\\ y=x^{۲}+۲x-۴a\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}} x^{۲}+۲x-۴a=\frac{۱}{۲}x^{۲}+ax$$

$$\to\boxed{\frac{۱}{۲}x^{۲}+(۲-a)x-۴a=۰}\ :\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}:\ \Delta=۰\to b^{۲}-۴ac=۰\to(۲-a)^{۲}-۴(\frac{۱}{۲})(-۴a)=۰\to ۴-۴a+a^{۲}+۸a=۰$$

$$\to a^{۲}+۴a+۴=۰\to(a+۲)^{۲}=۰\to a=-۲$$

$$x_{\text{تماس}} = \frac{-b}{۲a} \to x_{\text{تماس}} = \frac{-(۲-a)}{۲(\frac{۱}{۲})} \xrightarrow{a=-۲} x_{\text{تماس}} = -۴$$

البته می‌توانستید که $a=-۲$ را در معادله‌ی تلاقی قرار داده و معادله را حل کرده و طول نقطه‌ی تماس را بدست آورید.

۳۱ - گزینه ۲ اگر دو تابع بر هم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف دارد.

$$\left.\begin{matrix} y = x + \frac{۴}{x} \\ y = k \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x + \frac{۴}{x} = k \to x^۲ + ۴ = kx \to \boxed{x^۲ - kx + ۴ = ۰} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} : \Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to k^۲ - ۱۶ = ۰ \to k = \pm ۴$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای k، مساوی -۱۶ می‌باشد.

۳۲ - گزینه ۲ اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند داریم: $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$.

$$f(۲)=g(۲) \to ۴a - ۲b + ۲ = ۲b - ۶ \to ۴a - ۴b = -۸$$

$$f'(۲)=g'(۲) \to ۲ax - b = b \xrightarrow{x=۲} ۴a - ۲b = ۰$$

از حل دستگاه $a=۲$ و $b=۴$ بدست می‌آید.

۳۳ - گزینه ۳ اگر دو تابع f و g برهم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y = \frac{۱}{۲}(x-b) \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{۱}{۲}(x-b) = \sqrt{x} \to x - b = ۲\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } ۲} x^۲ + b^۲ - ۲bx = ۴x$$

$$\to x^۲ - ۲bx - ۴x + b^۲ = ۰ \to x^۲ - ۲(b+۲)x + b^۲ = ۰ \ :\text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} : \Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to ۴(b+۲)^۲ - ۴b^۲ = ۰ \to (b+۲)^۲ - b^۲ = ۰$$

$$\to b^۲ + ۴ + ۴b - b^۲ = ۰ \to ۴b = -۴ \to b = -۱$$

۳۴ - گزینه ۲ اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است. طبق اطلاعات مسأله، $f(۳)=۱۶$ و $f'(۳)=۵$ است.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x) - ۱۶f(x)}{۳-x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۳} \frac{۲f(x)f'(x) - ۱۶f'(x)}{-۱}$$

$$= -(۲f(۳)f'(۳) - ۱۶f'(۳)) = -(۲(۱۶)(۵) - ۱۶(۵)) = -(۱۶۰ - ۸۰) = -۸۰$$

۳۵ - گزینه ۳ دو تابع را تلاقی داده و در معادله‌ی تلاقی، مجموع دو ریشه یعنی $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ را بدست می‌آوریم.

$$\left.\begin{matrix} y = (m+۱)x^۲ + ۲x - ۳ \\ y = mx + ۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تلاقی}} (m+۱)x^۲ + ۲x - ۳ = mx + ۲$$

$$\to \boxed{(m+۱)x^۲ + (۲-m)x - ۵ = ۰} \ : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{مجموع طول نقاط برخورد} = -\frac{b}{a} = -\frac{۱}{۲} \to \frac{-۲+m}{m+۱} = -\frac{۱}{۲} \to -۴ + ۲m = -m - ۱ \to ۳m = ۳ \to m = ۱$$

۳۶ - گزینه ۴ کافی است دو تابع را تلاقی دهیم.

$$\frac{x}{x-۱} + \frac{۱}{x+۱} = ۲x + ۱ \to \frac{x(x+۱) + x - ۱}{(x+۱)(x-۱)} = ۲x + ۱$$

$$\to \frac{x^۲ + x + x - ۱}{x^۲ - ۱} = ۲x + ۱ \to x^۲ + ۲x - ۱ = ۲x^۳ + x^۲ - ۲x - ۱$$

$$\to ۲x^۳ - ۴x = ۰ \to ۲x(x^۲ - ۲) = ۰ \to x = ۰, \ x = \sqrt{۲}, \ x = -\sqrt{۲}$$

بنابراین دو تابع در سه نقطه، متقاطع هستند.

۳۷ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B را می‌نویسیم.

$$AB : \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \to \frac{y-۲}{x+۱} = \frac{۲+۳}{-۱-۴} = -۱ \to y - ۲ = -x - ۱ \to y = -x + ۱$$

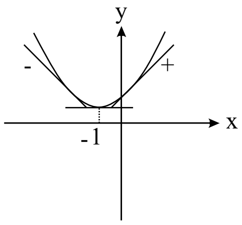
خط را با منحنی تلاقی می‌دهیم و در معادله‌ی تلاقی، شرط ریشه‌ی مضاعف $(\Delta = ۰)$ را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x+۳} \\ y = -x + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{k}{x+۳} = -x + ۱ \Rightarrow k = -x^۲ - ۳x + x + ۳$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + k - ۳ = ۰ \quad : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۱)(k-۳) = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴k + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴k = ۱۶ \Rightarrow k = ۴$$

۳۸ - گزینه ۲ می‌دانیم که مشتق یک تابع همان شیب خط مماس بر آن تابع است. با رسم مماس در نقاط مختلف تابع f و تعیین علامت شیب خط مماس، نمودار f' را به‌دست می‌آوریم.



در نقطهٔ $x=-1$ خط مماس افقی است، پس مشتق f در آن صفر است. برای $x<-1$ خطوط مماس دارای شیب منفی هستند، پس نمودار f' باید زیر محور xها باشد. ضمناً توجه کنید که نمودار سهمی مربوط به یک تابع درجه دوم است که مشتق آن از درجهٔ اول خواهد بود و نمودارش به‌صورت یک خط است.

بنابراین گزینهٔ «۲» درست خواهد بود.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۷ - ۳	۱۳ - ۲	۱۹ - ۱	۲۵ - ۳	۳۱ - ۲	۳۷ - ۳
۲ - ۴	۸ - ۲	۱۴ - ۴	۲۰ - ۱	۲۶ - ۱	۳۲ - ۲	۳۸ - ۲
۳ - ۱	۹ - ۴	۱۵ - ۳	۲۱ - ۲	۲۷ - ۴	۳۳ - ۳	
۴ - ۱	۱۰ - ۳	۱۶ - ۳	۲۲ - ۱	۲۸ - ۱	۳۴ - ۲	
۵ - ۲	۱۱ - ۳	۱۷ - ۴	۲۳ - ۲	۲۹ - ۴	۳۵ - ۳	
۶ - ۴	۱۲ - ۱	۱۸ - ۲	۲۴ - ۴	۳۰ - ۴	۳۶ - ۴	