نام آزمون: مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر $f(x)=(x^{۴}+۱)(x^{۸}+۱)(x^{۱۶}+۱)$ ، حاصل عبارت $(x^{۴}-۱)f'(x)+۴x^{۳}f(x)$ کدام است؟

① $۳۲x^{۳۱}$

② $۵۴x^{۳۱}$

③ $۶۴x^{۶۳}$

④ $۶۴x^{۳۱}$

۲- اگر $g(x)=\sqrt{۲x}$ و $f(x)=x^{۲}-x$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x)-f(۲)g(۲)}{\Delta x}$ برابر با کدام گزینه است؟

① ۳

② ۴

③ ۶

④ ۷

۳- اگر $f(x)=(x^{۲}+۱)(x^{۴}+۱)$ و $g(x)=x^{۸}-۱$ مقدار $g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)$ کدام است؟

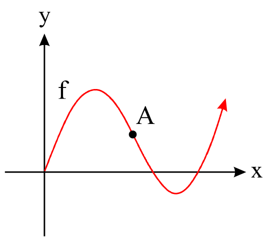
① ۴

② ۸

③ ۱۶

④ ۳۲

۴- نمودار تابع f به‌شکل زیر مفروض است. کدام‌یک از خطوط داده‌شده می‌تواند معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A باشد؟

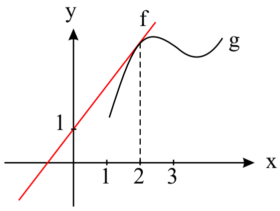


① $۲x+۳y+۱=۰$

② $-۳x+۴y+۲=۰$

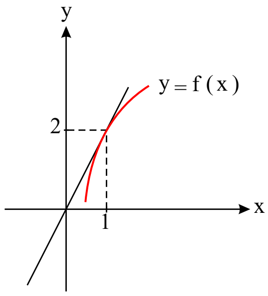
③ $x+y-۵=۰$

④ $x-۲y-۳=۰$



۵- در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱}=۴$، آنگاه حاصل $f(۱)+g'(۲)$ چقدر است؟

① ۴
② ۵
③ ۶
④ ۷



۶- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۱$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱-h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

① ۱
② -۱
③ ۲
④ -۲

۷- مشتق تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f'(۱)=-۴, f(۱)=۰$ و $g'(۱)$ موجود باشد مقدار $g(۱)$ کدام است؟

① $-\dfrac{۴}{۳}$
② $-\dfrac{۳}{۴}$
③ $\dfrac{۳}{۴}$
④ $\dfrac{۴}{۳}$

۸- مشتق تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}$ در $x=-\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

① -۸
② ۴
③ -۲
④ ۲

۹ - مشتق عبارت $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ به ازای $x=\frac{3}{4}$ کدام است؟

(۱) ۱۶٫۸

(۲) ۱۸٫۴

(۳) ۱۹٫۲

(۴) ۱۹٫۶

۱۰ - مشتق تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ در $x=\sqrt{3}$ چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۴) $4\sqrt{3}$

۱۱ - اگر $f(x)=\frac{x}{x^3-x-2}$ باشد، حاصل $\left(\frac{f'}{f^2}\right)(2)$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{2}$

(۲) $-\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۴) $\frac{9}{2}$

۱۲ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ، کدام است؟

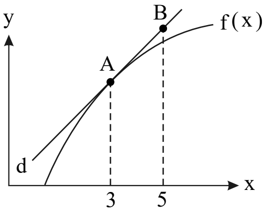
(۱) -21

(۲) -18

(۳) 12

(۴) 15

۱۳ – مطابق شکل زیر، خط d در نقطه‌ای به‌طول $x=۳$ بر تابع $f(x)$ مماس است. اگر $f'(۳)=f(۳)=۳$ باشد، آنگاه عرض نقطهٔ B کدام است؟



① ۶

② ۸

③ ۹

④ ۱۲

۱۴ – در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^۲+x}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

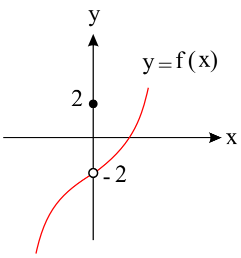
① $\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

② $\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

③ $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳}$

④ $\dfrac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۱۵ – شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. مقدار مشتق تابع $g(x)=۳xf(x)$ در $x=۰$ چقدر است؟



① وجود ندارد.

② -۶

③ ۶

④ ۱۲

۱۶ – اگر مقدار مشتق و مقدار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$، به‌ترتیب برابر ۳ و (-۲) باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f^۲(x)-f^۲(۱)}{x-۱}$ کدام است؟

① -۶

② ۶

③ -۱۲

④ ۱۲

۱۷ - کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \ x \geq ۰ \\ \sqrt{-x} & ; \ x < ۰ \end{cases}$ **صحیح نیست؟**

① $f'(-۱) < ۰$

② $f'(-۱) = -f'(۱)$

③ $f'(-۱) > f'(-۲)$

④ $f'(-۱) + f'(۲) < ۰$

۱۸ - اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x) - f(۲)}{۲ - x} = ۱$**، مشتق تابع** $g(x) = ۲f(x) + x$ **در نقطه‌ی** $x = ۲$ **کدام است؟**

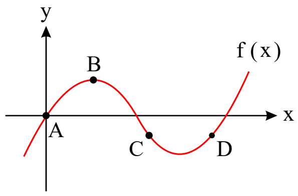
① ۱

② ۲

③ -۱

④ -۲

۱۹ - در کدام نقطه روی نمودار، $f(x)f'(x) < ۰$ **است؟**



① A

② B

③ C

④ D

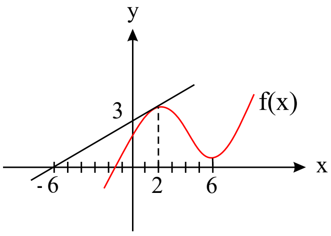
۲۰ - در تابع $y = f(x)$**، با افزایش** x **از ۲ به** $۲ + h$ **مقدار تابع به‌اندازۀ** $۳h - h^۲$ **زیاد می‌شود. شیب خط مماس بر منحنی** $y = f(x)$ **در** $x = ۲$ **کدام است؟**

① ۳

② ۴

③ ۲

④ ۱



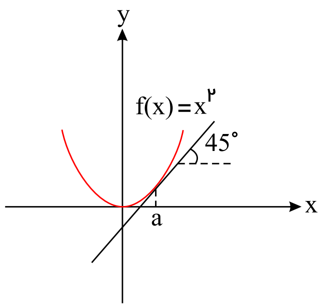
۲۱ – با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\dfrac{۱}{۲}$

(۳) صفر

(۴) ۲



۲۲ – با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f(a)+f'(a)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\dfrac{۱}{۲}$

(۳) $\dfrac{۱}{۴}$

(۴) $\dfrac{۵}{۴}$

۲۳ – خط $y-۴x-۳=۰$ بر نمودار تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای به طول $x=۱$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲f^{۲}(x)-۱۱f(x)-۲۱}{۲(x-۱)}$ کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) ۳۴

(۳) ۵۱

(۴) ۶۸

۲۴ – اگر $f(x)=\dfrac{۳x-۳}{\sqrt{۲x+۱}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۳}{۴}$

(۲) $\dfrac{۲}{۳}$

(۳) $\dfrac{۴}{۵}$

(۴) $\dfrac{۵}{۲}$

۲۵- اگر $f(x)=(۱+x)(۱+x^{۲})(۱+x^{۴})\cdots(۱+x^{۲^n})$ باشد، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

① -۱
② صفر
③ ۱
④ ۲^n

۲۶- اگر $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{x\cos x}$ و $g(x)=\dfrac{\sin x+\cos x-۱}{x\cos x}$ باشد، مقدار عبارت $f'(x)+g'(x)$ به‌ازای $x=\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

① -۲
② ۲
③ -۴
④ ۴

۲۷- اگر $f(a)=۲f'(a)=۸$ باشد، مشتق تابع $y=\sqrt[۳]{f(x)}$ در $x=a$ کدام است؟

① $\dfrac{۲}{۳}$
② $\dfrac{۱}{۲}$
③ $\dfrac{۱}{۳}$
④ $\dfrac{۳}{۲}$

۲۸- مشتق تابع $f(x)=(\sqrt{۵x+۱})(۳x-۲)^{۳}$ در نقطه‌ای به‌طول صفر کدام است؟

① ۲۰
② ۱۶
③ ۸
④ صفر

۲۹- اگر $f(x)=(x^{۲}+۲)(x^{۴}+۴)$ و $g(x)=x^{۸}-۱۶$ باشد، حاصل $g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)$ کدام است؟

(۱) ۲۲۵

(۲) ۲۵۰

(۳) ۴۵۰

(۴) ۵۰۰

۳۰- مقدار مشتق تابع $f(x)=\left(\frac{x^{۲}+۱}{\sqrt{۳x+۱}}\right)^{۳}$ در $x=۱$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱۵}{۸}$

(۲) $\frac{۱۵}{۴}$

(۳) $\frac{۹}{۸}$

(۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$

$$(x^4-1)f'(x)+4x^3f(x)=\Big((x^4-1)f(x)\Big)'$$
$$=\big(\underbrace{(x^4-1)(x^4+1)}_{x^8-1}(x^8+1)(x^{16}+1)\big)'=\big(\underbrace{(x^8-1)(x^8+1)}_{x^{16}-1}(x^{16}+1)\big)'=\Big((x^{16}-1)(x^{16}+1)\Big)'$$
$$=(x^{32}-1)'=32x^{31}$$

۲ - گزینه ۴

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x)-f(2)g(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f\times g)(2+\Delta x)-(f\times g)(2)}{\Delta x}=(f\times g)'(2)$$

حاصل عبارت، تعریف مشتق $f(x)\times g(x)$ در نقطه‌ی $x_0=2$ است. یعنی مشتق اولی در دومی به اضافه‌ی مشتق دومی در اولی.

$$y'=(2x-1)\sqrt{2x}+\frac{2}{2\sqrt{2x}}(x^2-x)\Rightarrow y'(2)=(2(2)-1)\sqrt{4}+\frac{2}{2\sqrt{4}}(4-2)=6+1=7$$

۳ - گزینه ۴ از عبارت $g'(x)f(x)-f'(x)g(x)$ باید متوجه شویم که این عبارت، صورت کسر مشتق $\frac{g(x)}{f(x)}$ است زیرا:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(g(x))^2}$$

پس عبارت $g(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^8-1}{(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)}=x^2-1$$

حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^2}=2x$$

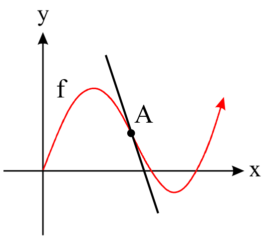
و در نهایت x را مساوی یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{g'(1)f(1)-f'(1)g(1)}{(f(1))^2}=2\xrightarrow{f(1)=4}g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=2\times 4^2=32$$

۴ - گزینه ۳

خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم.

شیب این خط منفی و عرض از مبدأ آن مثبت است.



حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ ۱) $2x+3y+1=0\Rightarrow 3y=-2x-1\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\Rightarrow$ شیب $=-\frac{2}{3}$, عرض از مبدأ $=-\frac{1}{3}$

گزینهٔ ۲) $-3x+4y+2=0\Rightarrow 4y=3x-2\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4}\Rightarrow$ شیب $=\frac{3}{4}$, عرض از مبدأ $=-\frac{2}{4}$

گزینهٔ ۳) $x+y-5=0\Rightarrow y=-x+5\Rightarrow$ شیب $=-1$, عرض از مبدأ $=5$

گزینهٔ ۴) $x-2y-3=0\Rightarrow 2y=x-3\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow$ شیب $=\frac{1}{2}$, عرض از مبدأ $=-\frac{3}{2}$

در گزینهٔ ۳ شیب خط منفی و عرض از مبدأ آن مثبت است.

۵ - گزینه ۲ تابع f یک تابع خطی است و می‌توان آن را به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داد.

$$f(x)=ax+b\to\begin{cases}f(2x)=2ax+b\\ f(2)=2a+b\end{cases}$$

مشتق

$$\lim_{x\to1}\frac{f(2x)-f(2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2ax+b-2a-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2a(x-1)}{(x-1)}=2a=4\to a=2$$

دقت کنید چون تابع f از نقطهٔ $\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ می‌گذرد بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت $f(x)=2x+1$ است پس $f(1)=3$ است و چون دو تابع f و g در $x=2$ برهم مماس هستند پس $f'(2)=g'(2)$ است و از طرفی $f'(x)=2$ پس $f'(2)=2$ است درنتیجه $f(1)+g'(2)=3+2=5$ است.

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ است پس:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=-f'(1)$$

$f'(1)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است با توجه به شکل از آنجاکه خط مماس از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ می‌گذرد شیب خط مماس می‌شود:

$$m_{\text{مماس}}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0-2}{0-1}=2\to f'(1)=2\to -f'(1)=-2$$

۷ - گزینه ۱

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}=3\Rightarrow\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{(g(1))^2}=3$$

$$\Rightarrow\frac{-4g(1)-0}{(g(1))^2}=3\Rightarrow 3g(1)=-4\Rightarrow g(1)=-\frac{4}{3}$$

۸ - گزینه ۲ می دانیم: $\boxed{(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ ,\ (\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}}$

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac1x}\to f'(x)=\frac{0(1+\frac1x)-(\frac{-1}{x^2})(1)}{(1+\frac1x)^2}\to f'(-\frac12)=\frac{0-(-4)(1)}{(-1)^2}=\frac41=4$$

۹ - گزینه ۳

$$y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3\Rightarrow y'=3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2(1+\frac{1\,(2x)}{2\sqrt{x^2+1}})$$

$$\xrightarrow{x=\frac34} y'=3\left(\frac34+\frac54\right)^2(1+\frac{\frac32}{\frac52})\to y'=3\,(4)\,(\frac85)=\frac{96}{5}=19.2$$

۱۰ - گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)'}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}=\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt3)=\frac{\sqrt3}{2(2)\sqrt{2-1}}=\frac{\sqrt3}{4}$$

۱۱ - گزینه ۲ دقت کنید که $\frac{f'}{f^2}$، مشتق تابع $\frac{-1}{f}$ می‌باشد زیرا:

$$(\frac{-1}{f})'=\frac{0(f)-(-1)f'}{f^2}=\frac{f'}{f^2}$$

پس کافی است $\frac{-1}{f(x)}$ را تشکیل داده و از آن مشتق بگیریم.

$$-\frac{1}{f(x)}=-\frac{x^3-x-2}{x}=-x^2+1+\frac2x$$

$$(-\frac1f)'(x)=-2x-\frac{2}{x^2}\Rightarrow(\frac{f'}{f^2})(x)=-2x-\frac{2}{x^2}\Rightarrow(\frac{f'}{f^2})(2)=-(4+\frac24)=-\frac92$$

۱۲ - گزینه ۱

مشخص است که $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3\to f'(x)=3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2\left(\frac{\frac{1(2x-3)-2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\right)$$

$$=\frac32\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)\left(\frac{-7}{(2x-3)^2}\right)\to f'(2)=\frac32(2)(-7)=-21$$

۱۳ - گزینه ۳ مشتق تابع در یک نقطه، شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه را می‌دهد پس شیب پاره‌خط AB برابر ۳ است.

$$m_{AB}=۳\longrightarrow \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=۳\longrightarrow \frac{۳-y_B}{۳-۵}=۳\longrightarrow ۳-y_B=-۶\longrightarrow y_B=۹$$

۱۴ - گزینه ۲ روش اول:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x^۲+x}-\sqrt{۲}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{(x-۱)(\sqrt{x^۲+x}+\sqrt{۲})}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x^۲+x}+\sqrt{۲})}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

روش دوم:

عبارت $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ تعریف مشتق در $x=۱$ است، یعنی $f'(۱)$.

$$f(x)=\sqrt{x^۲+x}\to f'(x)=\frac{۱(۲x+۱)}{۲\sqrt{x^۲+x}}\to f'(۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$

از روی شکل مشخص است که $f(۰)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=-۲$ است.

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳xf(x)-۰}{x}=\lim_{x\to ۰}۳f(x)=۳(-۲)=-۶$$

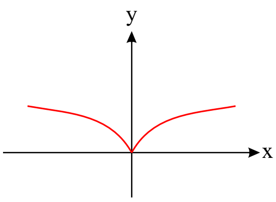
۱۶ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)-f^۲(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}(f(x)+f(۱))$$

$$=(f'(۱)(۲f(۱)))=(۳)(۲(-۲))=-۱۲$$

۱۷ - گزینه ۳

از نمودار مشخص است که شیب خطوط مماس بر نمودار در سمت راست محور yها مثبت و در سمت چپ محور yها منفی است. (صحیح بودن گزینهٔ «۱»)



این نمودار نسبت به محور y متقارن است، پس $f'(-a)=-f'(a)$ (صحیح بودن گزینهٔ «۲»)

از شکل نمودار مشخص است که برای xهای مثبت، با افزایش x شیب خط مماس و در نتیجه مشتق کاهش می‌یابد. همچنین برای xهای منفی، با افزایش x شیب خط مماس و در نتیجه مشتق منفی‌تر می‌شود (ناصحیح بودن گزینهٔ «۳»).

برای بررسی صحیح بودن گزینهٔ «۴» داریم:

$$f'(۲)<f'(۱)\Rightarrow -f'(۱)+f'(۲)<۰\Rightarrow f'(-۱)+f'(۲)<۰$$

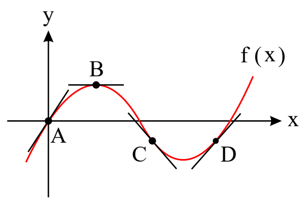
۱۸ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{-(x-۲)}=-\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-f'(۲)=۱\to f'(۲)=-۱$$

$$g(x)=۲f(x)+x\to g'(x)=۲f'(x)+۱\to g'(۲)=۲f'(۲)+۱=۲(-۱)+۱=-۱$$

۱۹ - گزینه ۴ می‌دانیم $f'(x)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به‌طول x است. به جدول توجه کنید:

نقطه	f	f'	$f(x)f'(x)$
A	۰	+	۰
B	+	۰	۰
C	−	−	+
D	−	+	−



پس در نقطهٔ D، $f(x)f'(x)<۰$ است.

۲۰ - گزینه ۱ طبق صورت سؤال $f(۲+h)-f(۲)=۳h-h^۲$ است پس:

مشتق

$$f(۲+h)-f(۲)=h(۳-h)\rightarrow \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۳-h$$

شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در $x=۲$ برابر $f'(۲)$ است و می‌دانیم که $f'(x)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ است.

پس: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)=\lim\limits_{h\to ۰}(۳-h)=۳$

۲۱ - گزینه ۱ شیب خط مماس بر منحنی در $x=۲$ همان شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(-۶,۰)$ است.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۳}{-۶-۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲ \text{ شیب مماس در } =\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)+f(۲)-f(۲-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)-(f(۲-h)-f(۲))}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}$$

$$=f'(۲)+\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+(-h))-f(۲)}{-h}=f'(۲)+f'(۲)=۲f'(۲)=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

البته حد داده شده را به کمک هوپیتال می‌توان محاسبه کرد:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۲+h)+f'(۲-h)}{۱}=۲f'(۲)=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

۲۲ - گزینه ۴ شیب خط مماس بر $f(x)=x^۲$ در نقطهٔ $x=a$ همان مشتق تابع در این نقطه است و داریم:

$$f'(x)=۲x\Rightarrow f'(a)=۲a$$

از طرفی شیب خط مماس در $x=a$ برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها تشکیل می‌دهد و چون این زاویه برابر ۴۵° است، داریم:

$$\text{شیب مماس}=\tan ۴۵^\circ=۱\Rightarrow ۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'(a)=f'(\frac{۱}{۲})=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

$$f(a)=f(\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(a)+f'(a)=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

۲۳ - گزینه ۲ چون خط $y-۴x-۳=۰$ بر نمودار تابع f در $x=۱$ مماس است پس شیب این خط همان $f'(۱)$ است.

$$y-۴x-۳=۰\Rightarrow y=۴x+۳\Rightarrow \text{شیب خط}=۴\Rightarrow f'(۱)=۴\ ,\ \ x=۱\Rightarrow y=۷\Rightarrow f(۱)=۷$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f^۲(x)-۱۱f(x)-۲۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲f(x)+۳)(f(x)-۷)}{۲(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۷}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)+۳}{۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)+۳}{۲}$$

$$=f'(۱)\times(\frac{۲f(۱)+۳}{۲})=۴\times(\frac{۲\times ۷+۳}{۲})=۳۴$$

البته حد داده شده را می توان به کمک هوپیتال محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f^۲(x)-۱۱f(x)-۲۱}{۲(x-۱)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۴f(x)f'(x)-۱۱f'(x)}{۲}=\frac{۴(۷)(۴)-۱۱(۴)}{۲}=\frac{۶۸}{۲}=۳۴$$

۲۴ - گزینه ۲

حاصل حد داده شده برابر با $f'(۴)$ است.

$$f'(x)=\frac{۳\sqrt{۲x+۱}-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}(۳x-۳)}{۲x+۱}=\frac{۳(۲x+۱)-(۳x-۳)}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}=\frac{۳x+۶}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}$$

$$f'(۴)=\frac{۱۲+۶}{۹\times ۳}=\frac{۱۸}{۲۷}=\frac{۲}{۳}$$

۲۵ - گزینه ۳

عبارت داده شده را در $x-۱$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$f(x)=\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

با ادامهٔ این روند داریم:

$$f(x)=\frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x}=\frac{1-x^{2^n\times 2}}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$f'(x)=\frac{-2^{n+1}\times x^{2^{n+1}-1}(1-x)-(-1)(1-x^{2^{n+1}})}{(1-x)^2}$$

$$f'(0)=\frac{0+(1-0)}{1}=1$$

۲۶ – گزینه ۳ $f'(x)+g'(x)$ برابر با مشتق $f(x)+g(x)$ است یعنی داریم:

$$f'(x)+g'(x)=(f(x)+g(x))'=\left(\frac{1-\sin x}{x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x-1}{x\cos x}\right)'$$

$$=\left(\frac{\cos x}{x\cos x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}f'(x)+g'(x)=-4$$

۲۷ – گزینه ۳

$$f(a)=2f'(a)=8\Rightarrow f(a)=8\ ,\ f'(a)=4$$

$$y=\sqrt[3]{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}\xrightarrow{x=a}y'(a)=\frac{f'(a)}{3\sqrt[3]{f^2(a)}}=\frac{4}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{4}{3\times 4}=\frac{1}{3}$$

۲۸ – گزینه ۲ از مشتق حاصل‌ضرب کمک می گیریم.

$$f(x)=(\sqrt{5x+1})(3x-2)^3\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}(3x-2)^3+9(3x-2)^2(\sqrt{5x+1})$$

$$f'(0)=\frac{5}{2}\times(-8)+9(-2)^2(1)=-20+36=16$$

۲۹ – گزینه ۳ عبارت خواسته شده شبیه صورت مشتق $\frac{g}{f}$ است.

ابتدا حاصل $\frac{g(x)}{f(x)}$ را می‌یابیم:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^8-16}{(x^2+2)(x^4+4)}=\frac{(x^4-4)(x^4+4)}{(x^2+2)(x^4+4)}=\frac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2+2}=x^2-2$$

حال از دو طرف رابطهٔ بالا مشتق می‌گیریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=2x\Rightarrow\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=2x$$

$$\Rightarrow g'(x)f(x)-f'(x)g(x)=2xf^2(x)\xrightarrow{x=1}g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=2f^2(1)$$

$$\Rightarrow g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=2\left((1+2)(1+4)\right)^2=2\times 15^2=450$$

۳۰ – گزینه ۱

$$f(x)=\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right)^3\Rightarrow f'(x)=3\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right)^2\left(\frac{2x(\sqrt{3x+1})-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2+1)}{(\sqrt{3x+1})^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1)=3\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{2(2)-\frac{3}{4}(2)}{4}\right)=3\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{8}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۴	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۱	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۴	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۲	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۱	۲۵ - ۳	۳۰ - ۱