علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & , \quad |x|\le 1 \\ x+b & , \quad |x|>1 \end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $2b-a$ کدام است؟

(۱) -5

(۲) -4

(۳) 5

(۴) 4

۲ - اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt{x^2+x}}{3x-1}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر ۲ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

(۱) 7

(۲) 3

(۳) $\dfrac{8}{3}$

(۴) $\dfrac{7}{3}$

۳ - اگر $f(x+1)=\dfrac{1}{x^2-1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) -1

(۴) صفر

۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲}$ کدام است؟

① صفر

② $\dfrac{۵}{۱۲}$

③ $\dfrac{۱}{۲}$

④ $\dfrac{۷}{۱۲}$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

① $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

③ $\dfrac{۱}{۲}$

④ وجود ندارد.

۶ـ اگر $\dfrac{۴}{۵} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax^۲+\sqrt{۴x^۴-۳x+۱}}{۵x^۲+۲}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^۲-a^۲}$ کدام است؟

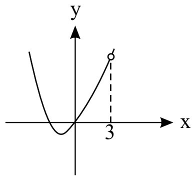
① $\dfrac{\sqrt{۲}}{۱۶}$

② $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳۲}$

③ $\dfrac{\sqrt{۳}}{۱۲}$

④ $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

۲



۷- شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x^3-ax+2b}{x-3}$ می‌باشد. حاصل $a+3b$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۳۰

۸- اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^b+2x^2+5}{3x^2-x+1}=2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-b}{x^3-ax+3}$ کدام است؟

۱) -6
۲) -5
۳) -4
۴) -3

۹- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+2b & ; \quad x>3 \\ ax^2+bx+2 & ; \quad x<3 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) -3
۴) ۴

۱۰- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ax+3\sqrt{x}-1}{2x+\sqrt[3]{x}-2}=3$، حاصل $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a-30}{x^2-7x+a}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) $\dfrac{12}{5}$
۳) $\dfrac{24}{5}$
۴) $\dfrac{36}{5}$

۱۱- اگر در تابع $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2-bx+4}{2x^3-2}$ داشته باشیم، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -1

۲) -4

۳) -2

۴) -8

۱۲- اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^n+3x-1}{5x^2-x+17}=2$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-2n+1}{x^2-ax+a+15}$ کدام است؟

۱) 1

۲) $+\infty$

۳) $-\infty$

۴) صفر

۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 2x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

۲) $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

۳) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۴) وجود ندارد.

۱۴- در تابع $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{x^2+bx}-3}{x-1}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجود باشد، $f(-4)$ کدام است؟

۱) 1

۲) -1

۳) 3

۴) -3

۱۵- حد تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ وقتی $x\to ۰$، کدام است؟

① -۱

② ۲

③ -۲

④ ۱

۱۶- حد تابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^{۲}-\sqrt{۲x^{۲}-x^{۳}}}{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ وقتی $x\to -۲$ کدام است؟

① $-\dfrac{۳}{۴}$

② $\dfrac{۳}{۴}$

③ $\dfrac{۹}{۴}$

④ $-\dfrac{۹}{۴}$

۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{\cot^{۲}x}$ کدام است؟

① ۱

② $-\dfrac{۱}{۲}$

③ $\dfrac{۱}{۲}$

④ -۱

۱۸- اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+a}-۲}{x^{۲}-۱}$، در $x=۱$ عددی حقیقی باشد، حاصل این حد کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۱۶}$

② $\dfrac{۱}{۲}$

③ $\dfrac{۱}{۸}$

④ $\dfrac{۱}{۴}$

۱۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}$ کدام است؟

① ۶

② -۶

③ $-\frac{۱}{۶}$

④ $\frac{۱}{۶}$

۲۰ - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-۲)+۴$ بر $x-۳$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام باشد تا عبارت $g(x)=x^{۱۶}+۵p(x+۲)-m$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد؟

① -۱۶

② -۸

③ ۸

④ ۱۶

۲۱ - در تقسیم عبارت $p(x)=x^{۴}-۳x^{۲}+k$ بر $x+۳$، مقدار k کدام باشد تا باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر باشد؟

① ۲۷

② ۵۴

③ -۲۷

④ -۵۴

۲۲ - اگر $(x-۱)$ یک عامل عبارت $p(x)=x^{۴}-x^{۳}+ax+۸$ باشد، معادلهٔ $p(x)=۰$ چند ریشهٔ دیگر دارد؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۲۳ـ باقی‌ماندۀ تقسیم عبارت $y(x) = x^{۴} - kx^{۲} - ۳x + ۱$ بر $x - ۲$ برابر ۳ شده است. باقی‌ماندۀ تقسیم $y(x)$ بر $x + ۱$ کدام است؟

① ۴
② ۳
③ ۲
④ ۱

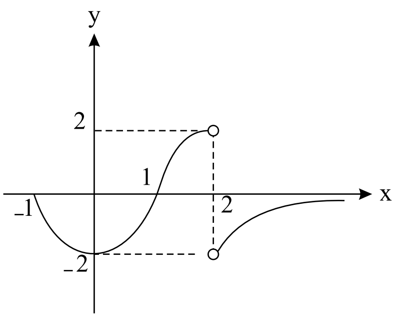
۲۴ـ اگر چندجمله‌ای $x^{۳} - ax^{۲} + bx + ۱۲$ بر $x - ۳$ و $x - ۴$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a \times b$ کدام است؟

① ۱۵
② ۱۸
③ ۳۰
④ ۴۲

۲۵ـ اگر چندجمله‌ای $x^{۳} + ax^{۲} - (b - ۱)x - b$ بر $x + ۳$ و $x - ۲$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندۀ تقسیم آن بر $x + ۴$ کدام است؟

① -۱۴
② ۳۴
③ ۳۸
④ -۱۸

۲۶ـ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟



① $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = ۱$
② $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۰$
③ $\lim\limits_{x \to ۲} |f(x)| = ۲$
④ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

۲

۲۷- حد چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax}{۳x+[-x]}$ در نقطه‌ی $x=۱$، به اندازه‌ی ۲ واحد از حد راست آن در این نقطه بیش‌تر است. مقدار a کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزءصحیح است)

(۱) ۱

(۲) -۲

(۳) ۴

(۴) -۴

۲۸- اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲-\sqrt{ax-۲}}{\sqrt[۳]{۳x-۱}-۲}=b$، حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۵}{۲}$

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) صفر

۲۹- اگر $f(x)=۲x^{۳}+ax^{۲}+۴x-۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۶۱}{۴}$

(۲) $\dfrac{۹}{۲}$

(۳) $\dfrac{۲۵}{۳}$

(۴) $\dfrac{۶۵}{۴}$

۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{۳x^{۲}-۸x+۴}{x^{۲}-۴x+۴}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۳

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳ ابتدا شرط تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-ax+۱ & , \quad -۱\le x\le ۱ \\ x+b & , \quad x>۱ \text{ یا } x<-۱ \end{cases}$$

چون تابع در تمام نقاط حد دارد پس تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ نیز حد دارد.

$$x=۱\to\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x+b)=۱+b \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲-ax+۱)=۱-a+۱=۲-a \end{cases}\to ۱+b=۲-a\to a+b=۱$$

$$x=-۱\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}(x^۲-ax+۱)=۱+a+۱=a+۲ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(x+b)=-۱+b \end{cases}\to a+۲=-۱+b\to a-b=-۳$$

از حل دستگاه $a=-۱$ و $b=۲$ بدست می آید پس $۲b-a=۵$ است.

۲ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^۲+x}}{۳x-۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-|\overbrace{x}^{+}|}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-x}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۱)x}{۳x}=\frac{a-۱}{۳}=۲\to a-۱=۶\to a=۷$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۷x-\sqrt{x^۲+x}}{۳x-۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{۷x-\sqrt{x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۷x-|\overbrace{x}^{-}|}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۷x-(-x)}{۳x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{۳x}=\frac{۸}{۳}$$

۳ ـ گزینه ۲ روش اول:

باید $x+۱\to ۰^+$ میل کند پس $x\to(-۱)^+$ میل می کند.

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}f(x+۱)=\frac{۱}{((-۱)^+)^۲-۱}=\frac{۱}{۱^--۱}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$x+۱=t\to x=t-۱\to f(t)=\frac{۱}{(t-۱)^۲-۱}=\frac{۱}{t^۲+۱-۲t-۱}=\frac{۱}{t^۲-۲t}\to f(x)=\frac{۱}{x^۲-۲x}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x(x-۲)}=\frac{۱}{۰^+(-۲)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

۴ ـ گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}{(x-۲)(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۵(x-۲)}{(x-۲)(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲})+۴}=\frac{۵}{۱\times(۴+۴+۴)}=\frac{۵}{۱۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱(۵)}{۳\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}}}{۲x-۳}=\frac{۵}{۱۲}$$

۵ ـ گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\ ,\ ۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۲}\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

چون داخل قدر مطلق، صفر است باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه نمود.

$$\begin{cases}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۲}\left|\overbrace{\cos\frac{x}{۲}}^{-}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\\[2ex] \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\left|\overbrace{\cos\frac{x}{۲}}^{+}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه کسینوس منفی است

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$ در ناحیه‌ی اول است و در این ناحیه کسینوس مثبت است

چون حد راست و حد چپ تابع در $x=\pi$ با هم برابر نیستند پس در $x=\pi$ حد وجود ندارد.

۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+\sqrt{۴x^۴-۳x+۱}}{۵x^۲+۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+\sqrt{۴x^۴}}{۵x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+۲x^۲}{۵x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲)x^۲}{۵x^۲}$$

$$=\frac{a+۲}{۵}=\frac{۴}{۵}\to a+۲=۴\to a=۲$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^۲-a^۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})}{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})(\sqrt{x}+\sqrt{۲})(x+۲)}=\frac{۱}{۸\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$$

۷ - گزینه ۲ نمودار تابع داده شده از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۰=\frac{۰-۰+۲b}{۰-۳}\Rightarrow b=۰$$

تابع در $x=۳$ مقدار ندارد ولی حد دارد و اولین قدم در مسائل حدی عددگذاری است.

$$x=۳\xrightarrow{\text{تابع}}\frac{۵۴-۳a+۲b}{۰}=\frac{۵۴-۳a}{۰}\xrightarrow[\text{رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{این کسر حتماً } \frac{۰}{۰} \text{ بوده که پس از}}۵۴-۳a=۰\to a=۱۸$$

پس $a+۳b=۱۸+۰=۱۸$ است.

۸ - گزینه ۴ چون جواب حد عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند بنابراین $b=۲$ است. دقت کنید اگر $۰\le b<۲$ باشد نیز بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابر می‌شوند ولی جواب حد $\frac{۲}{۳}$ می‌شود که خلاف فرض است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+۲x^۲+۵}{۳x^۲-x+۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+۲)x^۲}{۳x^۲}=\frac{a+۲}{۳}=۲\to a+۲=۶\to a=۴$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x^۳-۴x+۳}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{۳x^۲-۴}=\frac{۲+۱}{۳-۴}=-۳$$

۹ - گزینه ۴

$$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to ۳^+}f(x)=۶\to\lim_{x\to ۳^+}(ax+۲b)=۶\to ۳a+۲b=۶\\ \lim_{x\to ۳^-}f(x)=۲\to\lim_{x\to ۳^-}(ax^۲+bx+۲)=۲\to ۹a+۳b=۰\end{matrix}\right\}\to b=۶\ ,\ a=-۲$$

پس $a+b=۴$ است.

۱۰ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۳\sqrt{x}-۱}{۲x+\sqrt[۳]{x}-۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{۲x}=\frac{a}{۲}=۳\to a=۶$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^۲-a-۳۰}{x^۲-۷x+a}=\lim_{x\to ۶}\frac{x^۲-۳۶}{x^۲-۷x+۶}=\lim_{x\to ۶}\frac{(x-۶)(x+۶)}{(x-۶)(x-۱)}=\frac{۱۲}{۵}$$

۱۱ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax^۳+bx^۲-bx+۴}{۲x^۳-۲}=\frac{a+b-b+۴}{۰}=\frac{a+۴}{۰}$$

چون جواب حد، برابر عدد شده است پس حتماً صورت نیز صفر بوده است که پس از رفع ابهام جواب حد، عدد شده است.

یعنی $a+۴=۰ \to a=-۴$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۳}{۲x^۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۳}{۲x^۳}=-۲$$

۱۲ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+۳x-۱}{۵x^۲-x+۱۷}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{۵x^۲}\overset{n=۲}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲}{۵x^۲}=\frac{a}{۵}=۲\to a=۱۰$$

$$\lim_{x\to۵}\frac{-۲n+۱}{x^۲-ax+a+۱۵}=\lim_{x\to۵}\frac{-۳}{x^۲-۱۰x+۲۵}=\lim_{x\to۵}\frac{-۳}{(x-۵)^۲}=\frac{-۳}{۰^+}=-\infty$$

توجه کنید: $(۵^\pm-۵)^۲=(۰^\pm)^۲=۰^+$.

۱۳ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}\ ,\ \sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin ۲x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\overbrace{|\cos\frac{x}{۲}|}^{+}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲(۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}}{۴\sin\frac{x}{۲}\cos x}=\frac{\sqrt{۲}}{۴(۱)(-۱)}=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

توجه کنید وقتی $x\to\pi^-$ آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^-$ و $(\frac{\pi}{۲})^-$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است و در این ناحیه، کسینوس، مثبت است.

۱۴ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{x^۲+bx}-۳}{x-۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{x^۲}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|\overbrace{x}^{+}|}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۱)x}{x}=a+۱=۲\to a=۱$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=\lim_{x\to۱}\frac{x+\sqrt{x^۲+bx}-۳}{x-۱}\overset{\text{عددگذاری}}{=\!=}\frac{۱+\sqrt{۱+b}-۳}{۰}=\frac{\sqrt{۱+b}-۲}{۰}$$

چون گفته شده مقدار این حد موجود است پس صورت این کسر نیز صفر می‌باشد یعنی: $\sqrt{۱+b}-۲=۰\to b=۳$

پس: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲+۳x}-۳}{x-۱}\to f(-۴)=\frac{-۴+\sqrt{۱۶-۱۲}-۳}{-۴-۱}=\frac{-۴+۲-۳}{-۵}=\frac{-۵}{-۵}=۱$

۱۵ - گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to۰}\frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{(\sqrt{x+۱}-۱)(\sqrt{x+۱}+۱)}=\lim_{x\to۰}\frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{x}=۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۰}\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=۲$$

۱۶ - گزینه ۴ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

۲

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳}}{۳-\sqrt{۱-۴x}}=\lim_{x\to-۲}\frac{(x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳})(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})(۳+\sqrt{۱-۴x})}{(۳-\sqrt{۱-۴x})(۳+\sqrt{۱-۴x})(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to-۲}\frac{(x^۴-۲x^۲+x^۳)(۳+\sqrt{۱-۴x})}{(۹-۱+۴x)(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}=\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲(x+۲)(x-۱)(۳+\sqrt{۱-۴x})}{۴(x+۲)(x^۲+\sqrt{۲x^۲-x^۳})}$$

$$=\frac{۴\times(-۳)(۳+۳)}{۴(۴+۴)}=\frac{-۹}{۴}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-\sqrt{۲x^۲-x^۳}}{۳-\sqrt{۱-۴x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۲}\frac{۲x-\dfrac{۱(۴x-۳x^۲)}{۲\sqrt{۲x^۲-x^۳}}}{-\dfrac{۱(-۴)}{۲\sqrt{۱-۴x}}}=\frac{-۴+\dfrac{۲۰}{۸}}{\dfrac{۴}{۶}}=\frac{\dfrac{-۱۲}{۸}}{\dfrac{۴}{۶}}=\frac{-۷۲}{۳۲}=\frac{-۹}{۴}$$

۱۷ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cot^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^۲ x(۱-\sin x)}{۱-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^۲ x(۱-\sin x)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۸ ـ گزینه ۳ چون مخرج در $x=۱$ برابر صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است باید حد صورت نیز در $x=۱$ برابر صفر باشد:

$$\lim_{x\to۱}(\sqrt{x+a}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{۱+a}=۲\Rightarrow ۱+a=۴\Rightarrow a=۳$$

پس ضابطه ی تابع به صورت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}$ است، در نتیجه حد تابع در $x=۱$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x+۳-۴)}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}=\lim_{x\to۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}=\frac{۱}{۸}$$

۱۹ ـ گزینه ۱

حد داده شده را به دو حد $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۳]{x}-۱)}\right)=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\sqrt[۳]{x}-۱}=۲\times۳=۶$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۳]{x}-۱)}\right)=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۲\times۳=۶$$

۲۰ ـ گزینه ۴

$$x-۳=۰\Rightarrow x=۳\quad;\quad r=p(۳-۲)+۴=۷\Rightarrow p(۱)=۳$$
$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$
$$\Rightarrow g(-۱)=(-۱)^{۱۶}+۵p(۱)-m=۱+۱۵-m=۰\Rightarrow m=۱۶$$

۲۱ ـ گزینه ۴

$$p(x)=x^۴-۳x^۲+k\quad,\quad x+۳=۰\Rightarrow x=-۳$$
$$\text{باقی‌مانده}=p(-۳)=۰\Rightarrow(-۳)^۴-۳(-۳)^۲+k=۰\Rightarrow ۸۱-۲۷+k=۰\Rightarrow k=-۵۴$$

۲۲ ـ گزینه ۲

$$p(x)=x^۴-x^۳+ax+۸$$ ۲

چون $x-۱$ یک عامل $p(x)$ است، پس $p(x)$ بر $x-۱$ بخش پذیر است و داریم:

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow p(۱) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۱ + a + ۸ = ۰ \Rightarrow a = -۸$

$p(x) = x^۴ - x^۳ - ۸x + ۸ = ۰ \Rightarrow x^۳(x - ۱) - ۸(x - ۱) = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x^۳ - ۸) = ۰$

$\Rightarrow x - ۱ = ۰ \text{ یا } x^۳ - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = ۲$

پس $f(x) = ۰$ یک ریشهٔ دیگر دارد.

۲۳ - گزینه ۲

$y(x) = x^۴ - kx^۲ - ۳x + ۱ \ , \ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$\text{باقی‌مانده} = y(۲) = ۳ \Rightarrow ۱۶ - ۴k - ۶ + ۱ = ۳ \Rightarrow ۱۱ - ۴k = ۳ \Rightarrow k = ۲$

$y(x) = x^۴ - ۲x^۲ - ۳x + ۱ \ , \ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$\text{باقی‌مانده} = y(-۱) = ۱ - ۲ + ۳ + ۱ = ۳$

۲۴ - گزینه ۳ با فرض $f(x) = x^۳ - ax^۲ + bx + ۱۲$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۹a + ۳b + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۳a - b = ۱۳ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۱۶a + ۴b + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴a - b = ۱۹ \end{array}\right\} \rightarrow a = ۶, b = ۵$$

پس $a \times b = ۳۰$ است.

۲۵ - گزینه ۴ با فرض $f(x) = x^۳ + ax^۲ - (b - ۱)x - b$ داریم:

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۰ \Rightarrow -۲۷ + ۹a + ۳b - ۳ - b = ۰ \Rightarrow ۹a + ۲b = ۳۰$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۰ \Rightarrow ۸ + ۴a - ۲b + ۲ - b = ۰ \Rightarrow ۴a - ۳b = -۱۰$

$$\begin{cases} ۹a + ۲b = ۳۰ \\ ۴a - ۳b = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۶ \Rightarrow f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶$$

$x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴ \Rightarrow \quad \text{باقی‌مانده} = f(-۴) = -۶۴ + ۳۲ + ۲۰ - ۶ = -۱۸$

۲۶ - گزینه ۳ با توجه به شکل در صورت سوال، حاصل حدها به‌صورت زیر است:

$\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = ۰ \ \lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = ۰ \quad , \quad \lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = \text{تعریف‌نشده} \rightarrow \lim\limits_{x \to -۱} f(x) : \text{وجود ندارد}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ۰$

در مورد حد گزینه‌ی (۳)، چون حد چپ تابع در $x = ۲$ برابر ۲ و حد راست تابع برابر (-۲) است، بنابراین:

$\lim\limits_{x \to ۲} |f(x)| = ۲$

۲۷ - گزینه ۴ ابتدا حد راست و حد چپ تابع را در $x = ۱$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{ax}{۳x + [-x]} = \frac{a}{۳ + [(-۱)^-]} = \frac{a}{۳ - ۲} = a$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{ax}{۳x + [-x]} = \frac{a}{۳ + [(-۱)^+]} = \frac{a}{۳ - ۱} = \frac{a}{۲}$$

$$\text{طبق فرض} : \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۲ + \lim_{x \to ۱^+} f(x) \rightarrow \frac{a}{۲} = ۲ + a \rightarrow a = ۴ + ۲a \rightarrow a = -۴$$

۲۸ - گزینه ۴ چون مخرج کسر، به ازای $x = ۳$، صفر می‌باشد و حاصل حد نیز متناهی است، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = ۳$ صفر شود.

$$۲ - \sqrt{۳a - ۲} = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳a - ۲} = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

روش اول: $a = ۲$ را جایگذاری کرده، حد تابع را می‌گیریم.

$$\lim_{x \to ۳} \frac{۲ - \sqrt{۲ - ۲}}{\sqrt[۳]{۳x - ۱} - ۲} - \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \to ۳} \frac{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x - ۲}}}{\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x - ۱)^۲}}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}} = -۲ \Rightarrow b = -۲ \Rightarrow a + b = ۰$$

روش دوم:

$$b = \lim_{x \to ۳} \frac{۲ - \sqrt{۲x - ۲}}{\sqrt[۳]{۳x - ۱} - ۲} = \lim_{x \to ۳} \frac{(۲ - \sqrt{۲x - ۲})(۲ + \sqrt{۲x - ۲})(\sqrt[۳]{(۳x - ۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x - ۱} + ۴)}{(\sqrt[۳]{۳x - ۱} - ۲)(\sqrt[۳]{(۳x - ۱)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x - ۱} + ۴)(۲ + \sqrt{۲x - ۲})}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{(۴ - ۲x + ۲)(۴ + ۴ + ۴)}{(۳x - ۹)(۲ + ۲)} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۲(x - ۳)(۱۲)}{۳(x - ۳)(۴)} = \frac{-۲۴}{۱۲} = -۲ \Rightarrow a + b = ۰$$

۲۹ - گزینه ۴

$f(x) = ۲x^۳ + ax^۲ + ۴x - ۳$

چون $f(x)$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر است، داریم:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow -2+a-4-3=0 \Rightarrow a=9$

$f(x)=2x^3+9x^2+4x-3$

با تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+9x^2+4x-3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 \pm 2x^2} & 2x^2+7x-3 \\ 7x^2+4x-3 & \\ \underline{-7x^2 \pm 7x} & \\ -3x-3 & \\ \underline{\mp 3x \mp 3} & \\ 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+7x-3)=0 \Rightarrow x=-1 \ , \ 2x^2+7x-3=0 \Rightarrow \Delta>0$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x-3=0$ را x_1 و x_2 بنامیم، داریم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-\frac{b}{a})^2-2(\frac{c}{a})=\frac{49}{4}-2(-\frac{3}{2})=\frac{61}{4}$$

$$f(x) \text{ مجموع مجذورات صفرهای } =(-1)^2+x_1^2+x_2^2=1+\frac{61}{4}=\frac{65}{4}$$

۳۰ - گزینه ۱ حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. صورت کسر را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-2}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۱	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱