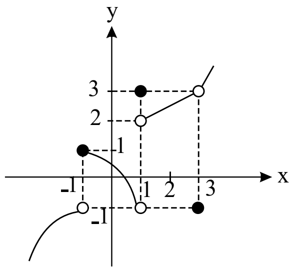
نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-1)$ است. حاصل عبارت $A=-(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x))+(\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x))-f(2)$ کدام است؟



① ۱
② ۳
③ -1
④ ۲

۲ - دو تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+b & ,x\geq 1 \\ x+a & ,x<1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 1-3x^2 & ,x\geq 1 \\ -2 & ,x<1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر حد تابع $f+g$ در نقطهٔ $x=1$ برابر ۳ باشد، مقدار a کدام است؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۳ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} & ,x>1 \\ ax-a+b & ,x<1 \end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد، مقدار b کدام است؟

① ۱
② -1
③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$

۴ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{۲x}-۲}{x^۲-۳x+۲}$ کدام است؟

① ۱

② $\dfrac{۱}{۲}$

③ ۲

④ $\dfrac{۱}{۴}$

۵ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{\sqrt{x+۱}-x+۱}{۹-x^۲}$ کدام است؟

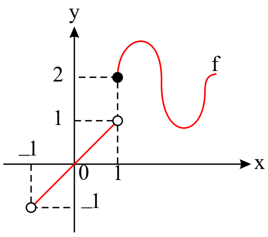
① $\dfrac{۱}{۸}$

② $-\dfrac{۱}{۸}$

③ $\dfrac{۱}{۲۴}$

④ $-\dfrac{۱}{۲۴}$

۶ - با توجه به نمودار تابع f که در زیر رسم شده است، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{|f(x)|}{f(x)} + \lim\limits_{x\to (-۱)^+} [f(x)] + \lim\limits_{x\to ۱^+} [f(x)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



① صفر

② ۱

③ -۱

④ ۲

۷ - کدام‌یک از توابع زیر در همسایگی چپ $x=۰$ تعریف می‌شود، اما در همسایگی راست این نقطه تعریف نمی‌شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=\sqrt{x-[x]}$

② $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x-[x]}}$

③ $y=\dfrac{۱}{[x]}$

④ $y=\dfrac{۱}{[-x]}$

۸- در تابع $f(x)=\begin{cases} x+[x] & |x|<1 \\ 2x^2+3 & |x|\geq 1 \end{cases}$، حاصل $A=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)-2\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۹- اگر $f(x)=[x]^2+\frac{k}{2}[x]$ بوده و تابع در $x=4$ حد داشته باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① -7

② 8

③ 7

④ 6

۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{1-x^2}{[-x]-|x|}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① 2

② -2

③ 1

④ -1

۱۱- اگر $L=\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+a}-2}{9-x^2}$ باشد، حاصل $a+12L$ کدام است؟ $(L\in\mathbb{R})$

① $\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $-\frac{3}{2}$

۱۲ – حاصل حد عبارت $\dfrac{۳x-۲\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$ وقتی $x \to ۱$ کدام است؟

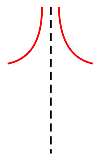
① $\dfrac{۱}{۳}$

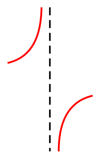
② ۱

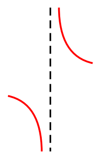
③ $\dfrac{۱}{۲}$

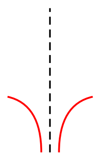
④ $\dfrac{۴}{۳}$

۱۳ – نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x^۳-x}$ در اطراف $x=۰$ به کدام صورت است؟

① 

② 

③ 

④ 

۱۴ – اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲x-\sqrt{x^۲+a}}{x-۳}=b$، حاصل $\dfrac{a}{b}$ کدام است؟ (b عدد حقیقی و مخالف صفر است.)

① ۱۸

② ۲۷

③ ۹

④ -۶

۱۵- در تابع $f(x)=\dfrac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{ax^n+b}$ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=c$ باشند، آنگاه عدد حقیقی c کدام است؟ $(c\neq 0)$

۱) $\dfrac{2}{3}$

۲) $\dfrac{3}{2}$

۳) $\dfrac{3}{4}$

۴) $\dfrac{4}{3}$

۱۶- حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{[x]\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin 2x}$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\dfrac{3}{2}$

۲) $-\dfrac{3}{2}$

۳) 2

۴) -2

۱۷- اگر $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ و $g(x)=\dfrac{|x^2+x-2|}{x^2-4}$ باشد، حاصل عبارت $A=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)+\lim\limits_{x\to (-2)^+} g(x)$ کدام است؟

۱) 1

۲) $-\dfrac{1}{4}$

۳) $-\dfrac{1}{2}$

۴) -2

۱۸ - تابع f اکیداً نزولی و تابع g اکیداً صعودی است. اگر f و g در $x=1$ پیوسته باشند و داشته باشیم: $f(1)=2g(1)=6$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[f(x)]}{[g(x)]}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۲/۵

۱۹ - اگر $\lim\limits_{x\to k^+}\dfrac{1-x}{x^2+x-12}=+\infty$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) فقط ۳

۲) فقط -4

۳) ۳ یا -4

۴) وجود ندارد.

۲۰ - حد عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟

۱) -24

۲) -18

۳) -12

۴) -6

۲۱ - در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

۲۲ - اگر $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ، کدام است؟

① -۱

② $-\frac{۱}{۲}$

③ $-\frac{۱}{۴}$

④ صفر

۲۳ - حد راست $f(x)=\dfrac{x}{۲x+[x]}$ چه‌قدر از حد چپ آن در $x=۰$ بیش‌تر است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

① $-\frac{۱}{۲}$

② صفر

③ $\frac{۱}{۲}$

④ ۱

۲۴ - در تابع $f(x)=\dfrac{ax^m-۳x+۲}{۳x-۵x^۳+x^۲}$ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\frac{۲}{۵}$ باشد، $f(۲)$ کدام است؟

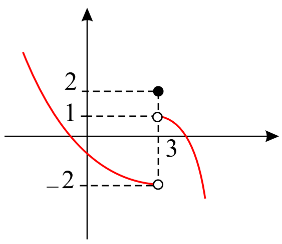
① $\frac{۴}{۳}$

② $\frac{۳}{۴}$

③ $\frac{۳}{۲}$

④ $\frac{۲}{۳}$

۲۵ - شکل مقابل نمودار تابع f است حاصل $f(۳)+\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$ کدام است؟



① -۱

② ۱

③ ۲

④ صفر

۲۶- در تابع $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^{۲}-x-۲\right|}{x^{۲}-۴}$ قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست آن در $x=۲$ کدام است؟

(۱) ۰٫۷۵

(۲) ۱

(۳) ۱٫۵

(۴) ۲

۲۷- اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{ax^{۲}+۳x-b}{۵x^{۲}+x-۶}=۲$، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۱۷}{۲}$

(۲) ۲۲

(۳) ۱۰

(۴) $\dfrac{۲۱}{۲}$

۲۸- در تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-x-۲}{ax^{۲}-۶x}$ اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{۱}{۳}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۱}{۳}$

(۲) $\dfrac{۱}{۲}$

(۳) ۳

(۴) ۲

۲۹- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{x^{۳}-۷x+۶}{۲x^{۳}-۳x^{۲}+۱}$ کدام است؟

(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) $\dfrac{-۱}{۶}$

(۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۳۰- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^n + ۲x^۳ + ۱}{۲x^m + x + ۵} = ۳$ ، مقدار $a + n$ کدام گزینه نمی تواند باشد؟ ($(m, n \in \mathbb{N})$)

۱) ۱۱

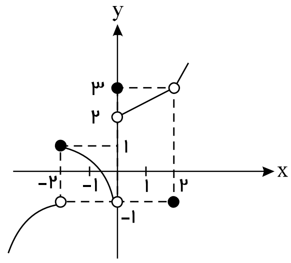
۲) ۱۰

۳) ۷

۴) ۸

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱\\ f(۲)=-۱\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=۱\end{cases} \to A=-(-۱)+۱-(-۱)=۳$$

۲ ـ گزینه ۴ ابتدا تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}۲x+b+۱-۳x^۲ & ,\ x\ge ۱\\ x+a-۲ & ,\ x<۱\end{cases}\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}-۳x^۲+۲x+b+۱ & ,\ x\ge۱\\ x+a-۲ & ,\ x<۱\end{cases}$$

حد راست $=\lim\limits_{x\to۱^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-۳x^۲+۲x+b+۱)=-۳+۲+b+۱=b$

حد چپ $=\lim\limits_{x\to۱^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(x+a-۲)=۱+a-۲=a-۱$

چون حد تابع $f+g$ در $x=۱$ برابر ۳ است، داریم:

$$a-۱=b=۳\Rightarrow b=۳\ ,\ a=۴$$

۳ ـ گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x=۱$ موجود و باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to۱^-} ax-a+b=a-a+b=b\\ \text{حد راست}=\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-۱}=\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{\sqrt x}{\sqrt x+۱}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

۴ ـ گزینه ۲ روش اول: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{۲x}-۲}{x^۲-۳x+۲}\times\frac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim_{x\to۲}\frac{۲x-۴}{(x-۲)(x-۱)(\sqrt{۲x}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{۲(x-۲)}{(x-۲)(x-۱)(\sqrt{۲x}+۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{۲}{(x-۱)(\sqrt{۲x}+۲)}=\frac{۲}{۱\times۴}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{۲x}-۲}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to۲}\frac{\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{۲x-۳}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}$$

۵ ـ گزینه ۱ روش اول: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۳}\frac{\sqrt{x+۱}-(x-۱)}{۹-x^۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+(x-۱)}{\sqrt{x+۱}+(x-۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{x+۱-(x-۱)^۲}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{x+۱-x^۲+۲x-۱}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{۳x-x^۲}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{x(۳-x)}{(۳-x)(۳+x)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{x}{(۳+x)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\frac{۳}{۶\times۴}=\frac{۱}{۸}$$

روش دوم: برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-x+1}{9-x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1}{-2x}=\frac{\frac{1}{4}-1}{-6}=\frac{-\frac{3}{4}}{-6}=\frac{1}{8}$$

۶ ـ گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}[f(x)]=[2^+]=2\ ,\ \lim_{x\to(-1)^+}[f(x)]=[(-1)^+]=-1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)}{f(x)}=-1$$

پس: $\lim_{x\to 1^+}[f(x)]+\lim_{x\to(-1)^+}[f(x)]+\lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{f(x)}=2-1-1=0$

۷ ـ گزینه ۳ دامنهٔ تابع مربوط به هر گزینه را می‌یابیم.

گزینهٔ ۱) $y=\sqrt{x-[x]}$: می‌دانیم: $0\le x-[x]<1\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}$

گزینهٔ ۲) $y=\frac{1}{\sqrt{x-[x]}}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-[x]>0\\ \text{می‌دانیم: } 0\le x-[x]<1\end{array}\right\}\Rightarrow x-[x]\ne 0\Rightarrow[x]\ne x\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ دامنهٔ تابع $=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

گزینهٔ ۳) $y=\frac{1}{[x]}\ ,\ [x]=0\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}-[0,1)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ $x=0$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.

گزینهٔ ۴) $y=\frac{1}{[-x]}\ ,\ [-x]=0\Rightarrow 0\le -x<1\Rightarrow -1<x\le 0$

دامنه $=\mathbb{R}-(-1,0]=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

۸ ـ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}x+[x] & ,\ |x|<1\Rightarrow -1<x<1\\ 2x^2+3 & ,\ |x|\ge 1\Rightarrow x\le -1 \text{ یا } x\ge 1\end{cases}$$

$$A=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)-2\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x^2+3)-2\lim_{x\to 1^-}(x+[x])=2+3-2(1+0)=3$$

۹ ـ گزینه ۲

حد چپ و حد راست تابع f را در $x=4$ حساب کرده و با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$f(x)=[x]^2+\frac{k}{2}[x]$$

$$\begin{cases}\text{حد چپ}=\lim_{x\to 4^-}[x]^2+\frac{k}{2}[x]=[4^-]^2+\frac{k}{2}[4^-]=3^2+\frac{k}{2}\times 3=9+\frac{3k}{2}\\ \text{حد راست}=\lim_{x\to 4^+}[x]^2+\frac{k}{2}[x]=[4^+]^2+\frac{k}{2}[4^+]=4^2+\frac{k}{2}\times 4=16+2k\end{cases}$$

$$\Rightarrow 9+\frac{3k}{2}=16+2k\Rightarrow\frac{3k}{2}-2k=16-9\Rightarrow-\frac{k}{2}=7\Rightarrow k=-14$$

$$f(x)=[x]^2-7[x]\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}[x]^2-7[x]=(-1)^2-7(-1)=1+7=8$$

۱۰ ـ گزینه ۱

$$x\to(-1)^-: x<-1\to -x>1\to[-x]=1$$

وقتی $x\to(-1)^-$ داخل قدر مطلق، منفی است و قرینهٔ آن از داخل قدر مطلق بیرون می‌آید.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1-x^2}{1-(-x)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(1-x)(1+x)}{1+x}=1-(-1)=2$$

۱۱ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+a}-2}{9-x^2}=L$$

حد مخرج صفر است و با توجه به اینکه کسر داده‌شده وقتی $x \to ۳$ حد دارد، پس باید حد صورت هم صفر باشد تا پس از رفع ابهام صفرصفرم، حاصل حد عدد L شود.

$$\lim_{x\to ۳}(\sqrt{x+a}-۲)=۰ \Rightarrow \sqrt{۳+a}-۲=۰ \Rightarrow \sqrt{۳+a}=۲ \Rightarrow ۳+a=۴ \Rightarrow a=۱$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{۹-x^۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۱-۴}{-(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{-(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\frac{۱}{-۶\times ۴}=-\frac{۱}{۲۴}\Rightarrow L=-\frac{۱}{۲۴}$$

پس: $a+۱۲L=۱+۱۲(-\frac{۱}{۲۴})=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

البته حد را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{۹-x^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{-۲x}=\frac{\frac{۱}{۴}}{-۶}=-\frac{۱}{۲۴}$$

۱۲ - گزینهٔ ۲ روش اول:

ابتدا صورت کسر را تجزیه می‌کنیم.

$$۳x-۲\sqrt{x}-۱=۳x-۳\sqrt{x}+\sqrt{x}-۱=۳\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)+(\sqrt{x}-۱)=(\sqrt{x}-۱)(۳\sqrt{x}+۱)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x-۲\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۳\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۳\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۳\sqrt{x}+۱}{(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}=\frac{۳+۱}{۲\times ۲}=\frac{۴}{۴}=۱$$

روش دوم:

حد داده‌شده را می‌توان به کمک قاعدهٔ هوپیتال محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x-۲\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to ۱}\frac{۳-۲\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{۲x}=\frac{۳-۱}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۳ - گزینهٔ ۳ ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم، که داریم:

$$y=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x^۳-x}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x^۲-۱)}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\end{cases}$$

شکل نمودار گزینهٔ «۳» این ویژگی را دارد.

۱۴ - گزینهٔ ۱ در محاسبهٔ حد داده‌شده وقتی x به ۳ میل می‌کند، مخرج به صفر میل می‌کند؛ باید صورت هم به صفر میل کند تا جواب حد نامتناهی نشود.

$$۶-\sqrt{۹+a}=۰\Rightarrow ۶=\sqrt{۹+a}\Rightarrow ۳۶=۹+a\Rightarrow a=۲۷$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}{x-۳}\times\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲۷}}{۲x+\sqrt{x^۲+۲۷}}=\lim_{x\to ۳}\frac{\overbrace{۴x^۲-(x^۲+۲۷)}^{۳(x^۲-۹)}}{(x-۳)(۲x+\sqrt{x^۲+۲۷})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۳(x-۳)(x+۳)}{۱۲(x-۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۳(x+۳)}{۱۲}=\frac{۱۸}{۱۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

پس : $\frac{a}{b}=\frac{۲۷}{\frac{۳}{۲}}=۱۸$

البته حد را می توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}{x-۳}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{۲-\dfrac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۲۷}}}{۱}=۲-\frac{۶}{۱۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۵ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to -\infty}\frac{۳x-\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۳x-\overbrace{|x|}^{-}}{ax^n}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۴x}{ax^n}\overset{n=۱}{=\!=}\frac{۴}{a}=۲$$

$$\longrightarrow a=۲$$

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۲x+b}=c\xrightarrow[\text{نیز باید صفر باشد تا جواب}]{\text{چون صورت صفر است مخرج}}۲x+b=۰\to ۴+b=۰\to b=-۴$$

حد، صفر نشود.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۲x-۴}\times\frac{۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۹x^۲-x^۲-۱۶x}{(۲x-۴)(۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x})}=\lim_{x\to ۲}\frac{۸x(x-۲)}{۲(x-۲)(۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x})}$$

$$=\frac{۱۶}{۲(۱۲)}=\frac{۲}{۳}=c$$

البته توجه کنید حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز می توان محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۲x-۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۳-\dfrac{۱(۲x+۱۶)}{۲\sqrt{x^۲+۱۶x}}}{۲}=\frac{۳-\dfrac{۲۰}{۱۲}}{۲}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$$

۱۶ ـ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin ۲a=۲\sin a\cos a$ است.

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{[x]\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{[۳{,}۱۴^+]\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{۳\sqrt{\sin^۲ x}}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to \pi^+}\frac{۳|\sin x|}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{۳(-\sin x)}{۲\sin x\cos x}=\frac{-۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید وقتی $x\to\pi^+$ آن‌گاه x در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی است و در این ناحیه سینوس منفی است.

۱۷ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cos^۲ x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{۱-\sin^۲ x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to (-۲)^+}g(x)=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{\overbrace{|(x+۲)(x-۱)|}^{-}}{(x+۲)(x-۲)}=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{-(-۳)}{-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

پس: $A=\frac{۱}{۲}+(-\frac{۳}{۴})=-\frac{۱}{۴}$

۱۸ ـ گزینه ۲ تابع f اکیداً نزولی است، پس با کاهش x، مقدار آن افزایش می‌یابد. با توجه به آنکه f در $x=۱$ پیوسته است و مقدار تابع f در $x=۱$ برابر با ۶ می‌شود، پس وقتی $x\to ۱^-$، $۶<f(x)<۷$ است:

$$\lim_{x\to ۱^-}[f(x)]=[۶^+]=۶$$

همچنین تابع g اکیداً صعودی است، پس با کاهش x، مقدار نیز کاهش می‌یابد. تابع g در $x=۱$ پیوسته است و مقدار آن در $x=۱$ برابر با ۳ است، پس وقتی $x\to ۱^-$، $۲<g(x)<۳$ است:

$$\lim_{x\to ۱^-}[g(x)]=[۳^-]=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}\frac{[f(x)]}{[g(x)]}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۱۹ ـ گزینه ۴ چون حاصل حد نامتناهی شده است، پس k می تواند یکی از ریشه های مخرج باشد. پس:

$$x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow x=۳,-۴$$

در هر دو حالت حد را حساب می‌کنیم:

$$۱)\ x=۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

$$۲)\ k=-۴ \Rightarrow \lim_{x\to (-۴)^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x\to (-۴)^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty$$

پس برای k مقداری وجود ندارد.

۲۰ - گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $\Big((a+b)(a^۲+b^۲-ab)=a^۳+b^۳\Big)$

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})} \times \frac{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}}{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}} = \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶(۸+x)}$$

$$= \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۲)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶} = \frac{-۶(۱۲)}{۶} = -۱۲$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to -۸} \frac{۲x+۱۰}{۶(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})} = \frac{-۶}{۶(\frac{۱}{۱۲})} = -۱۲$$

۲۱ - گزینه ۴ گزینهٔ چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲-۱}{x+|\underbrace{x}_{+}|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲-۱}{x+x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲-۱}{۲x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به‌صورت $x-x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

۲۲ - گزینه ۳ حد داده‌شده دارای ابهام $\infty - \infty +$ است که از کتاب حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده‌اند، برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x\to -\infty} (۲x+\sqrt{۴x^۲+x}) \times \frac{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۴x^۲-۴x^۲-x}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{۲x-۲|\underbrace{x}_{-}|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{۴x} = -\frac{۱}{۴}$$

۲۳ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{۲x-۱} = \frac{۰}{۰-۱} = ۰$$

بنابراین حد راست از حد چپ $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است.

۲۴ - گزینه ۴ چون جواب حد، عدد شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باهم برابر هستند پس $m=۳$ است.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{ax^۳-۳x+۲}{۳x-۵x^۳+x^۲} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to -\infty} \frac{ax^۳}{-۵x^۳} = -\frac{a}{۵} = \frac{۲}{۵} \to a=-۲$$

$$\text{پس}: f(x) = \frac{-۲x^۳-۳x+۲}{۳x-۵x^۳+x^۲} \to f(۲) = \frac{-۱۶-۶+۲}{۶-۴۰+۴} = \frac{-۲۰}{-۳۰} = \frac{۲}{۳}$$

۲۵ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱\ ,\ \lim_{x\to ۳^-} f(x) = -۲\ ,\ f(۳) = ۲$$

جمع این سه مقدار برابر یک می‌شود.

۲۶ - گزینه ۳

تابع داده‌شده به صورت $f(x) = \frac{|(x-۲)(x+۱)|}{x^۲-۴}$ است.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{\overbrace{|(x-۲)(x+۱)|}^{+}}{x^۲-۴} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۱)}{(x+۲)(x-۲)} = \frac{۲+۱}{۲+۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{|(x-2)(x+1)|}^{-}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{-(2+1)}{2+2}=-\frac{3}{4}$$

پس قدر مطلق تفاضل این دو حد برابر $\frac{6}{4}$ یا ۱٫۵ است.

۲۷ – گزینه ۲ چون $x=1$ ریشه‌ی مخرج بوده و حاصل حد، عدد شده است، پس $x=1$ ریشه‌ی صورت نیز می‌باشد یعنی $\frac{0}{0}$ می باشد که پس از رفع ابهام جوابش ۲ شده است ($a+3-b=0$ است).

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+3x-b}{5x^2+x-6}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2ax+3}{10x+1}=\frac{2a+3}{11}=2\Rightarrow 2a+3=22\Rightarrow a=\frac{19}{2}\Rightarrow b=\frac{25}{2}\Rightarrow a+b=22$$

۲۸ – گزینه ۲ حد تابع در $\pm\infty$ با استفاده از جملات پر توان به‌صورت $\frac{1}{a}$ در می‌آید($\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}$)

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{3x^2-6x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{3x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{3x}=\frac{1}{2}$$

۲۹ – گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-7x+6}{2x^3-3x^2+1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-7}{6x^2-6x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-7}{6x(x-1)}=\frac{-4}{6\times 0^-}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x-6)}{(x-1)(2x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-6}{(x-1)(2x+1)}=\frac{-4}{0^-\times 3}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

۳۰ – گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+2x^3+1}{2x^m+x+5}=3$$

حالت اول $n>3$: $\frac{ax^n}{2x^m}=3\Rightarrow\begin{cases} n=m>3\\ \frac{a}{2}=3\Rightarrow a=6\end{cases}\Rightarrow a+n>9$

حالت دوم $n=3$: $\frac{(a+2)x^3}{2x^m}=3\Rightarrow\begin{cases} m=3\\ \frac{a+2}{2}=3\Rightarrow a=4\end{cases}\Rightarrow a+n=7$

حالت سوم $n<3$: $\frac{2x^3}{2x^m}=3\xrightarrow{m=3}1=3$ نشدنی

۲

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۳	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۱	۱۰ - ۱	۱۵ - ۱	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۴