



علی هاشمی

نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر $f(2x + 3) = \frac{3x^2 + x - 2}{1 - x^2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{2}$

۲) $\frac{5}{2}$

۳) $-\frac{5}{2}$

۴) موجود نیست.

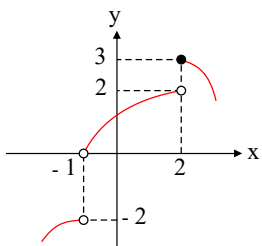
۲- حد عبارت $\frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{3x + \sqrt{4x^2 + x}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{2}{5}$



۳- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1 - x)$ کدام است؟

۱) -۱

۲) -۲

۳) ۲

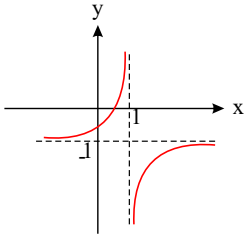
۴) صفر



۴- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} + ax + b \right) = 3$ ، آنگاه $a - b$ کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۲
- ۳) -۲
- ۴) -۳

۵- منحنی تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow (-L)^-} f(x)$ کدام است؟



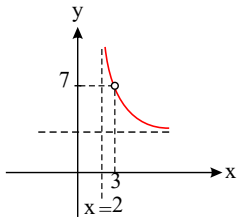
- ۱) ۱
- ۲) -۱
- ۳) $+\infty$
- ۴) $-\infty$

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b - x^2}{1 - \sqrt{x}} = k$ باشد، آنگاه حاصل $b - k$ کدام است؟ (k عددی صحیح، متناهی و غیر صفر است.)

- ۱) ۳
- ۲) -۳
- ۳) -۴
- ۴) ۴

۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{4x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) ۲
- ۳) -۴
- ۴) ۴



۸- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab + cd$ کدام است؟

- ۱) ۱۵ -
- ۲) ۱۵
- ۳) ۳۰
- ۴) ۳۰ -

۹- حد راست تابع $y = x \left[\frac{3}{-x} \right]$ در نقطه $x = 3$ از حد چپ در همین نقطه چقدر بیش تر است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۱۰- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^n + 7x^2 - 2}{4x^5 + 1} = 1$ ، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۴

۱۱- حد عبارت $\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

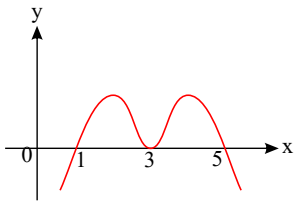
- ۱) ۱
- ۲) -۱
- ۳) ۲
- ۴) -۲



۱۲- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر چندجمله‌ای‌های $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای $2x - 1$ کدام است؟

- ① صفر
- ② ۱
- ③ -۱
- ④ ۲

۱۳- نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



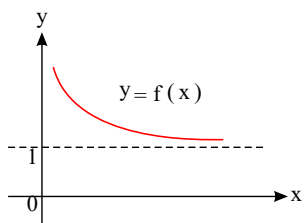
- ① $-\infty$
- ② ۱
- ③ -۱
- ④ $+\infty$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x - 3|}$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

- ① $+\infty$
- ② صفر
- ③ $-\infty$
- ④ -۱

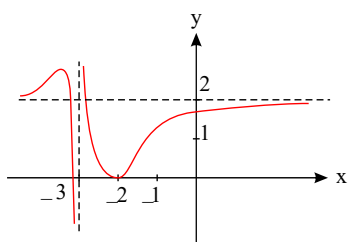
۱۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ① -۲
- ② $+\infty$
- ③ صفر
- ④ $-\infty$



۱۶- باتوجه به نمودار تابع $y = f(x)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$
- ۲) ۱
- ۳) -۱
- ۴) $\frac{1}{2}$



۱۷- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{-x + 1}{(f \circ f)(x) - 2}$ کدام است؟

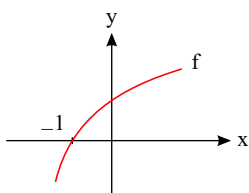
- ۱) ۲
- ۲) $-\infty$
- ۳) ۱
- ۴) $+\infty$

۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ و $f(x) = \frac{(m^2 - 1)x^4 + (2m + 3)x^3 + 2x^2 - 1}{mx + 5}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) هیچ مقداری برای m وجود ندارد.
- ۳) ± 1
- ۴) -۱



۱۹- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x = -1$ به کدام صورت است؟



- ①
- ②
- ③
- ④

۲۰- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 5$ و $x - 4$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، نمودار تابع $y = f(f(x)) + 2x$ خط $x = 4$ را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- ① ۸
- ② ۱۵
- ③ ۱۱
- ④ ۵

۲۱- اگر $(c, 2a + b) \cup (3b - 2a, 7)$ یک همسایگی محذوف عدد ۴ باشد، آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی برای کدام یک از عددهای زیر است؟

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $\frac{8}{3}$
- ③ $\frac{4}{3}$
- ④ $\frac{9}{4}$



۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [x + 1]}{2x - \sqrt{x} - 1}$ برابر کدام است؟

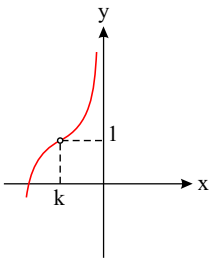
- ۱) ۲
- ۲) $\frac{2}{3}$
- ۳) $\frac{4}{3}$
- ۴) ۴

۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$
- ۲) $\frac{1}{4}$
- ۳) $\frac{1}{8}$
- ۴) $\frac{1}{16}$

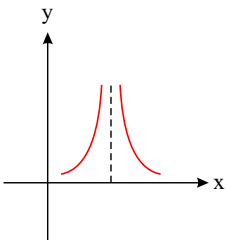
۲۴- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x}{1 - f(x)}$ کدام است؟

- ۱) $+\infty$
- ۲) $-\infty$
- ۳) صفر
- ۴) $-k$



۲۵- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2x + a}{4x^2 + bx + 1}$ است. دوتایی مرتب (a, b) به کدام صورت می تواند باشد؟

- ۱) $(0, 4)$
- ۲) $(0, -4)$
- ۳) $(-2, 4)$
- ۴) $(-2, -4)$





۲۶- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a+2)x^3 + bx^2 - 1}{ax^2 + 1} = 2$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) ۲
- ۳) -۴
- ۴) ۴

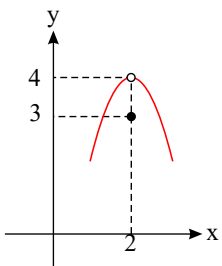
۲۷- اگر بازه $(2x - 1, \frac{x+5}{x+1})$ یک همسایگی $\frac{1}{2}$ باشد، حدود x کدام است؟

- ۱) $\mathbb{R} - (-8, -1)$
- ۲) $(-\infty, -9) \cup (-1, \frac{3}{4})$
- ۳) $\mathbb{R} - (-9, -1)$
- ۴) $(-\infty, -8) \cup (-1, \frac{3}{4})$

۲۸- حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{\cos x} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow 0} [3 \sin x]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) ۳ و صفر
- ۲) ۲ و صفر
- ۳) ۳ و حد ندارد.
- ۴) هیچ کدام حد ندارد.

۲۹- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] - \left[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴



۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 6}{3x^2 - x - 1}$ کدام است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{(2x+3) \rightarrow 1} f(2x+3) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-5}{2}$$

توجه: $(2x+3) \rightarrow 1 : 2x+3=1 \Rightarrow x=-1$

۲ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{3x + \sqrt{4x^2 + x}} \stackrel{\text{بر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{3x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{3x + 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+x}{3x-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

۳ - گزینه ۴

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow 1 - x > -1$$

پس وقتی $x \rightarrow 2^-$ آنگاه $x \rightarrow (-1)^+$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1^+) = 0$$

۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} + ax + b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 + ax^2 + ax + bx + b}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+a)x^2 + (2+a+b)x - 1 + b}{x+1} \right)$$

چون جواب حد عددی غیر صفر شده است بنابراین بزرگ ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند بنابراین x^2 باید از صورت حذف شود پس ضریبش باید صفر باشد یعنی:

$$1+a=0 \rightarrow a=-1 \xrightarrow{\text{توان بیش تر}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2+a+b)x}{x} \right) = 2+a+b=1+b=3 \rightarrow b=2$$

پس $a-b = -1-2 = -3$ است.

۵ - گزینه ۳ با توجه به شکل مشخص است که تابع در $-\infty$ به (-1) نزدیک می شود. بنابراین $L = -1$ و با توجه به شکل، حد خواسته شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\lim_{x \rightarrow (-L)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

۶ - گزینه ۲ اولین قدم در حل مسائل حدی، عددگذاری است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b - x^2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{b-1}{0} \xrightarrow{\text{چون جواب حد، عدد شده است حتماً این کسر 0 بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.}} b-1 = 0 \rightarrow b=1$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)} = 4 = k$$

پس $b-k = 1-4 = -3$ است.

البته توجه کنید برای رفع ابهام از قاعده هوییتال نیز می توانید استفاده کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

۷ - گزینه ۳ صورت کسر به ازای $x = \frac{1}{2}$ منفی است و چون جواب حد برابر $-\infty$ شده است بنابراین مخرج باید 0^+ باشد پس حتماً $x = \frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج است یعنی مخرج به صورت

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ است.}$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 4x^2 - 4x + 1 \xrightarrow{\text{مقایسه با مخرج}} \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow ab = -4$$

۸ - گزینه ۱ تابع در $x = 2$ نامتناهی می شود بنابراین $x = 2$ ریشه مخرج است.

$$x = 2 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 4 + 2c + d = 0 \rightarrow 2c + d = -4$$

تابع در $x = 3$ توخالی است بنابراین $x = 3$ ریشه مخرج است.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 9 + 3c + d = 0 \rightarrow 3c + d = -9$$

از حل دو معادله به جواب $c = -5$ و $d = 6$ می رسیم پس مخرج $6 - 5x + x^2$ یا همان $(x-2)(x-3)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x = 3$ حدی برابر ۷ دارد.



این کسر حتماً ۰ بوده که پس از رفع ابهام

$$x = 3 \rightarrow \frac{18 + 3a + b}{0} \rightarrow 18 + 3a + b = 0$$

جوابش ۷ شده است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{(x-2)(x-3)} = \frac{12+a}{1} = 7 \rightarrow a = -5, b = -3$$

پس $ab + cd = 15 - 30 = -15$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $2x^2 + ax + b$ را به صورت $(x-3)(2x+a+6)$ نوشتیم باید توجه کنید که $2x^2 + ax + b$ را بر $x-3$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + ax + b \\ \underline{x-3} \\ -2x^2 + 6x \\ \underline{(a+6)x + b} \\ -(a+6)x + 3a + 18 \\ \underline{3a + 18 + b} \\ \text{صفر است} \end{array} \rightarrow 2x^2 + ax + b = (x-3)(2x+a+6)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6}$ می توان از روش هوییتال نیز استفاده کرد.

HOP

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x + a}{2x - 5} = \frac{12 + a}{1} = 7 \rightarrow a = -5$$

۹ - گزینه ۳

$$x \rightarrow 3^+ : x > 3 \rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{x} < 1 \rightarrow -\frac{3}{x} > -1$$

پس: $\lim_{x \rightarrow 3^+} x \left[\frac{3}{-x} \right] = 3[(-1)^+] = 3(-1) = -3$

$$x \rightarrow 3^- : x < 3 \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{x} > 1 \rightarrow -\frac{3}{x} < -1$$

پس: $\lim_{x \rightarrow 3^-} x \left[\frac{3}{-x} \right] = 3[(-1)^-] = 3(-2) = -6$

بنابراین حد راست ۳ واحد بیش تر از حد چپ است.

۱۰ - گزینه ۲ چون جواب حد، عددی غیر صفر شده است پس بزرگ ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند.

حالت اول: وقتی $n < 5$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^n}{4x^n} = \frac{|3a|}{4} = 1 \rightarrow |3a| = 4 \rightarrow 3a = \pm 4 \rightarrow a = \pm \frac{4}{3}$$

حالت دوم: وقتی $n = 5$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^5}{4x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(|3a| - a)x^5}{4x^5} = \frac{|3a| - a}{4} = 1$$

$$\rightarrow |3a| - a = 4 \rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \rightarrow 3a - a = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ a < 0 \rightarrow -3a - a = 4 \rightarrow -4a = 4 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 2 - 1$ است.

۱۱ - گزینه ۲ می دانیم $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\tan x - 1}{\sqrt{\tan x}}}{1 - \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 - \tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 - \tan x)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 + \tan x)(1 - \tan x)} = \frac{-(1 + 1)}{1(1 + 1)} = -1$$

۱۲ - گزینه ۱ چون $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} p(2) = 0 &\Rightarrow 8 - 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 9 \\ p(-1) = 0 &\Rightarrow -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$$



پس $p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ است.

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 1 = 0$$

۱۳ - گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x = 5$ محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{(-1)^{[5^-]}}{f(5^-) - f(5^- - 4)} = \frac{(-1)^4}{0^+ - f(1^-)}$$

$$= \frac{1}{0^+ - 0^-} = \frac{1}{0^+ + 0^+} = +\infty$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{(-1)^{[5^+]}}{f(5^+) - f(5^+ - 4)} = \frac{(-1)^5}{0^- - f(1^+)}$$

$$= \frac{-1}{0^- - 0^+} = \frac{-1}{0^- + 0^-} = +\infty$$

بنابراین جواب حد داده شده برابر $+\infty$ است.

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow a} ([x] + [-x]) = -1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{\underbrace{|x-3|}_{\text{همواره مثبت}}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

۱۵ - گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right] = (+\infty + 1) \left[\frac{2}{1 - (+\infty)} \right] = +\infty \left[\frac{2}{-\infty} \right]$$

$$= +\infty [0^-] = +\infty \times (-1) = -\infty$$

۱۶ - گزینه ۱

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)} \times \frac{f(x) + \sqrt{f(x)}}{f(x) + \sqrt{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - f(x)}{(1 - f(x))(f(x) + \sqrt{f(x)})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f(x)(1 - f(x))}{(1 - f(x))(f(x) + \sqrt{f(x)})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f(x)}{f(x) + \sqrt{f(x)}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1}} = \frac{-1}{2}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-x+1}{(f \circ f)(x) - 2} = \frac{-(-2)+1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۱۸ - گزینه ۴ حالت ۱: اگر بزرگ‌ترین درجه صورت چهار باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m^r - 1)x^r}{mx} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{m^r - 1}{m} \right) x^{r-1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = -\infty \end{cases}$$

حد فوق در $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ متفاوت می‌باشد زیرا:

چون حد تابع در $x \rightarrow \pm\infty$ فقط برابر $-\infty$ می‌باشد، پس نمی‌تواند بزرگ‌ترین درجه صورت برابر چهار باشد.

حالت ۲: اگر بزرگ‌ترین درجه صورت سه باشد داریم:

$$m^r - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x^r + 2x^r - 1}{x + \Delta} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x^r}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Delta x^r = \Delta (\pm\infty)^r = +\infty$$

پس $m = 1$ غیر قابل قبول است.

$$m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r + 2x^r - 1}{-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r}{-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^r) = -(\pm\infty)^r = -\infty$$



بنابراین $m = -1$ قابل قبول است.

۱۹ - گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع g را حساب می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{p}$	$+\infty$
$2x+1$		-	-	+
$f(x)$		-	+	+
عبارت ≥ 0		+	-	+

$\Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{p}, +\infty)$

با توجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x = -1$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}} = \sqrt{\frac{-2+1}{0^-}} = \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

۲۰ - گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 5$ و $x - 4$ به ترتیب ۳ و ۵ است. بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} x - 4 = 0 &\Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4) = 5 \\ x - 5 = 0 &\Rightarrow x = 5 \Rightarrow f(5) = 3 \end{aligned} \right\} (*)$$

برای محاسبه محل برخورد نمودار تابع $y = f(f(x)) + 2x$ و خط $y = 4$ باید در ضابطه تابع داده شده، x را برابر ۴ قرار دهیم:

$$y = f(f(x)) + 2x \xrightarrow{x=4} y = f(f(4)) + 2(4) \xrightarrow{(*)} y = f(5) + 8 \xrightarrow{(*)} y = 3 + 8 = 11$$

بنابراین تابع مورد نظر خط $x = 4$ را در عرض ۱۱ قطع می‌کند.

۲۱ - گزینه ۳ توجه کنید $(a, b) \cup (b, c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است.

با توجه به تساوی $(3b - 2a, 7) \cup (c, 2a + b) = (c, 2a + b) \cup (3b - 2a, 7)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3b - 2a = 7 \end{cases} \Rightarrow 4b = 11 \Rightarrow b = \frac{11}{4} \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow a = 1$$

بازه (a, b) برابر با $(1, \frac{11}{4})$ است که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{4}{3}$ است.

۲۲ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [x+1]}{2x - \sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [x] - 1}{2x - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{2x - 1 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{2x - 1 - \sqrt{x}} \times \frac{2x - 1 + \sqrt{x}}{2x - 1 + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 1)(2x - 1 + \sqrt{x})}{(2x - 1)^2 - (\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 1)(2x - 1 + \sqrt{x})}{4x^2 - 5x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(x-1)(4x-1)} = \frac{(2)(2)}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

البته توجه کنید که حد داده شده را به راحتی به روش هوییتال می‌توان حل کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{2x - 1 - \sqrt{x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

۲۳ - گزینه ۲ روش اول: با تبدیل $\tan^2 x$ به $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x} &: \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \cos^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \times \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \times \cos^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{\cos^2(0)}{(1 + \sqrt{\cos 0})(1 + \cos 0)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u \rightarrow 0} \tan^n u \sim u^n$ و $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos^m u) \sim \frac{u^2}{2} \times m$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

۲۴ - گزینه ۱ با توجه به نمودار، $0 < k$ است، از طرفی وقتی $x \rightarrow k^+$ ، آنگاه $f(x) \rightarrow 1^+$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x}{1 - f(x)} = \frac{k}{0^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$



۲۵ - گزینه ۲ شکل تابع در اطراف ریشه مضاعف مخرج به صورت $\frac{1}{x^2}$ یا $\frac{1}{x^2}$ است.

بنابراین مخرج باید دارای ریشه مضاعف مثبت باشد.

$$\begin{cases} \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow b^2 - 16 = 0 \rightarrow b = \pm 4 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow -\frac{b}{8} > 0 \rightarrow b < 0 \end{cases} \rightarrow b = -4$$

چون جواب حد $+\infty$ شده پس صورت کسر به ازای ریشه مخرج $(\frac{-b}{2a})$ یعنی $x = \frac{1}{2}$ باید یک عدد مثبت باشد:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + a > 0 \rightarrow 1 + a > 0 \rightarrow a > -1$$

گزینه دوم می تواند صحیح باشد.

۲۶ - گزینه ۲ چون حاصل حد عددی حقیقی و غیر صفر است، بنابراین باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد. در نتیجه صورت نیز باید از درجه دوم باشد. پس ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

حال حد را بازنویسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-bx^2 - 1}{2x^2 + 1} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{\sim} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2}{-2x^2} = 2 \Rightarrow \frac{b}{-2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

در نتیجه:

$$a - b = -2 - (-4) = 2$$

۲۷ - گزینه ۲

عدد $\frac{1}{2}$ باید درون بازه داده شده قرار داشته باشد.

$$\frac{1}{2} \in \left(2x - 1, \frac{x + 5}{x + 1}\right) \Rightarrow 2x - 1 < \frac{1}{2} < \frac{x + 5}{x + 1}$$

$$2x - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{4} \quad (I)$$

$$\frac{x + 5}{x + 1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x + 5}{x + 1} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{2x + 10 - x - 1}{2(x + 1)} > 0 \Rightarrow \frac{x + 9}{2(x + 1)} > 0$$

x	$-\infty$	-9	-1	$+\infty$
$\frac{x+9}{2(x+1)}$		+	0	-

$$\Rightarrow x < -9 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x < -9 \text{ یا } -1 < x < \frac{3}{4} \Rightarrow x \in (-\infty, -9) \cup (-1, \frac{3}{4})$$

۲۸ - گزینه ۳ هرگاه در مسائل حدی، کسینوس برابر یک شد حتما ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{\cos x} \right] = \left[\frac{3}{1^-} \right] = [3^+] = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [3 \sin x] = [3 \times 0^+] = [0^+] = 0 \\ \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [3 \sin x] = [3 \times 0^-] = [0^-] = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [3 \sin x]: \text{ حد ندارد.}$$

۲۹ - گزینه ۲ در $x \rightarrow 2$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می شوند.

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] - \left[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right] = 2[4^-] - [4] = 2 \times 3 - 4 = 2$$

۳۰ - گزینه ۲

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 6}{3x^2 - x - 10} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2(x-2) + 3(x-2)}{(x-2)(3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x^2+3)}{(x-2)(3x+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3}{3x+5} = \frac{8+3}{6+5} = \frac{11}{11} = 1 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 6}{3x^2 - x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2 - 8x + 3}{6x - 1} = \frac{11}{11} = 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۴	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲