

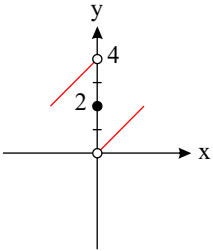
نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی



۱- اگر شکل زیر مربوط به تابع $g(x)$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - g(x)}{\sqrt{g(x)} - 2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$

۲) $-\frac{1}{4}$

۳) $\frac{2}{\sqrt{2} - 2}$

۴) -4

۲- اگر m و n اعدادی طبیعی باشند به گونه‌ای که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + 2x^3 + 1}{2x^m + x + 5} = 3$ ، آن‌گاه $a + n$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸

۲) ۷

۳) ۱۱

۴) ۱۰

۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) صفر

۳) $-\frac{5}{9}$

۴) -3



۴- قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۴
- ۴) ۶

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- ۱) $a = 1$
- ۲) $a = -1$
- ۳) $a = 5$
- ۴) $a = -5$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

- ۱) -1
- ۲) 0
- ۳) 1
- ۴) $+\infty$

۷- اگر باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب ۳ و -۲ باشد، k کدام باشد تا $f(x) = p(x + 1) - 2p(x + 3) + x^2 - 3kx$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد؟

- ۱) $\frac{2}{3}$
- ۲) $-\frac{2}{3}$
- ۳) $\frac{4}{3}$
- ۴) $-\frac{4}{3}$



۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ برابر کدام است؟

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ $\frac{-3}{2}$

④ $\frac{-5}{2}$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{6}$

③ $\frac{4}{4}$

④ $\frac{4}{2}$

۱۰- باقی مانده تقسیم $p(x) = x^5 - 3x^4 + ax - 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ و خارج قسمت آن $q(x)$ است. $q(-1)$ کدام است؟

① -۷

② -۶

③ ۶

④ ۷

۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 1 \\ x+1, & x = 1 \\ x^2+2, & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = 3-x$ باشند، حد تابع $(f \circ g)(x)$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

① -۴

② ۲

③ ۳

④ ۴



۱۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- $\frac{1}{4}$ (۳)
- $-\frac{1}{4}$ (۴)

۱۳- اگر $f(x) = \frac{[x]}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشند، آن‌گاه حد تابع $\frac{g}{f}$ در $x = 0$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- وجود ندارد. (۴)

۱۴- اگر $f(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{[x] - 1}{1 - \tan x}$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- صفر (۱)
- $-\infty$ (۲)
- $+\infty$ (۳)
- ۱ (۴)

۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x + \frac{2}{x} - 3}$ کدام است؟

- ۰ (۱)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- ۳ (۳)
- $\frac{4}{2}$ (۴)



۱۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2+ax-4}$ برابر عدد مخالف صفر b است. مقدار b کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{12}$
- ۲) $\frac{1}{15}$
- ۳) $\frac{1}{18}$
- ۴) $\frac{1}{30}$

۱۷- اختلاف حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{[-x] + 3}{[x] + 2}$ در $x = -3$ ، کدام است؟ (، []، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) ۰
- ۲) ۳
- ۳) ۱
- ۴) ۲

۱۸- حد عبارت $\frac{2x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۴

۱۹- اگر حد تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{ax + 1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر ۱ باشد، $f(-3)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{3}$
- ۲) $-\frac{4}{3}$
- ۳) ۴
- ۴) -4



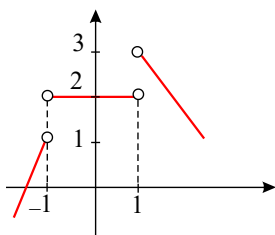
۲۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{3}$
- ۲) $\frac{1}{3}$
- ۳) $\frac{2}{3}$
- ۴) ۱

۲۱- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = 3$ باشد، $\frac{a}{n}$ کدام است؟

- ۱) ۲۴
- ۲) ۶
- ۳) ۱۲
- ۴) ۳

۲۲- با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟



- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۴
- ۴) ۵

۲۳- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ می‌باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

- ۱) $f(0)$
- ۲) $f(2)$
- ۳) $f(1)$
- ۴) $f(3)$



۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

- ۱) 0^+
- ۲) -1
- ۳) $+\infty$
- ۴) $-\infty$

۲۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

- ۱) $-\infty$
- ۲) 2
- ۳) 4
- ۴) 0^+

۲۶- در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) 1
- ۲) 2
- ۳) -1
- ۴) 0

۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

- ۱) -2
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) 1
- ۴) 2



۲۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

۲۹- حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲- است $m + n$ کدام است؟

① ۳٫۵

② ۴

③ ۴٫۵

④ ۵

۳۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - 1}$ کدام است؟

① $\sqrt{2}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\sqrt{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - g(x)}{\sqrt{g(x)} - 2} = \frac{4 - 4}{\sqrt{4} - 2} = \frac{0}{0}$$

عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - g(x)}{\sqrt{g(x)} - 2} \times \frac{\sqrt{g(x)} + 2}{\sqrt{g(x)} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(4 - g(x))(\sqrt{g(x)} + 2)}{g(x) - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(g(x) - 4)(\sqrt{g(x)} + 2)}{g(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(\sqrt{g(x)} + 2) = -(\sqrt{4} + 2) = -4$$

۲ - گزینه ۱ چون جواب حد در بی‌نهایت این کسر برابر یک عدد غیر صفر شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند برای این منظور دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$\text{حالت اول } m = n = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3 + 2x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+2)x^3}{2x^3} = \frac{a+2}{2} = 3 \rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow a + n = 7$$

$$\text{حالت دوم } m = n > 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{2x^m} = \frac{a}{2} = 3 \rightarrow a = 6 \xrightarrow{n > 3} a + n > 9$$

در این صورت گزینه‌ی اول در هیچ شرایطی رخ می‌دهد.

۳ - گزینه ۳ فرض کنید $t = \frac{1}{x}$ در این صورت وقتی $x \rightarrow 0^+$ داریم $t \rightarrow +\infty$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + 3t^2 + 5t^3}{3t - t^2 - 9t^3} \stackrel{\text{قاعده ی ل‌ه‌ویتال}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t^2}{-9t^2} = -\frac{5}{9}$$

۴ - گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(2x+1)}{-(x-1)} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

۵ - گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)(1 + \sqrt{5x+16})}{(1 - \sqrt{5x+16})(1 + \sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)}{\tan x(1 + \tan x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

توجه کنید که $\tan \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = -1$ است.

۷ - گزینه ۱ باقی‌مانده $p(x)$ بر $x - 1$ برابر ۳ می‌باشد، پس: $p(1) = 3$

باقی‌مانده $p(x)$ بر $x + 1$ برابر با -2 می‌باشد، پس: $p(-1) = -2$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 2$ برابر است با $f(-2)$ ، بنابراین:

$$f(-2) = p(-1) - 2p(1) + 4 + 6k = -2 - 6 + 4 + 6k = 0 \Rightarrow 6k = 4 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

۸ - گزینه ۱ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.



$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{2x+8})(x - \sqrt{2x+8})}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۹ - گزینه ۳ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{2x+1})(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9 - 2x - 1)(2 + \sqrt{x})}{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)(2 + \sqrt{x})}{-(x-4)(3 + \sqrt{2x+1})} = \frac{2 \times 4}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{-2}{6}}{\frac{-1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۱۰ - گزینه ۳

$$p(x) = x^y - 3x^x + ax - 1, \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{باقی‌مانده} = p(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow p(x) = x^y - 3x^x + 5x - 1$$

حال با نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$p(x) = (x-1)q(x) + 2 \xrightarrow{x=-1} p(-1) = -2q(-1) + 2 \quad (1)$$

$$p(-1) = -1 - 3 - 5 - 1 = -10 \xrightarrow{(1)} -10 = -2q(-1) + 2 \Rightarrow q(-1) = 6$$

۱۱ - گزینه ۴ ابتدا حد تابع $g(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2^-$ را بدست می‌آوریم و سپس حد تابع $f(x)$ را به ازای حد بدست آمده حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3 - 2^- = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4$$

۱۲ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x) \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)(1)^2}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۳ - گزینه ۴

$$\frac{g}{f} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{|x|}{x}} = \frac{1}{|x|}$$

دامنه‌ی تعریف این تابع به صورت $R - [0, 1)$ است یعنی حد راست تابع در $x = 0$ تعریف نشده است پس تابع در $x = 0$ حد ندارد.

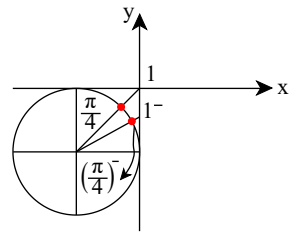
۱۴ - گزینه ۲

$$\text{دقت کنید که } x + \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \rightarrow x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{[x] - 1}{1 - \tan x} = \frac{0 - 1}{1 - 1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



دقت کنید: $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^-\right] = 0, \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^- = 1^-$
 بین صفر و یک



۱۵ - گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x + \frac{2}{x} - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})x}{(x^2 - 3x + 2)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)x}{(x-2)(x-1)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)x}{(x-2)(x-1)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{6}{1 \times 4} = \frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x + \frac{2}{x} - 3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{0 \cdot x - 2}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$ است.

۱۶ - گزینه ۳ در نقطه $x = 2$ صورت کسر برابر صفر است، در حالی که حاصل حد مخالف صفر است، پس مخرج نیز باید صفر باشد.

$$x = 2 \Rightarrow 2x^2 + ax - 4 = 8 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) - \sqrt{4x+1}}{2x^2 - 2x - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{2\sqrt{4x+1}}}{4x - 2} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{9}}}{6} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{1}{18}$$

۱۷ - گزینه ۴

حد راست: $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{[-x] + 3}{[x] + 2} = \frac{[3^-] + 3}{[(-3)^+] + 2} = \frac{2 + 3}{-3 + 2} = \frac{5}{-1} = -5$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{[-x] + 3}{[x] + 2} = \frac{[3^+] + 3}{[(-3)^-] + 2} = \frac{3 + 3}{-4 + 2} = \frac{6}{-2} = -3$

اختلاف حد چپ و راست $= |-5 - (-3)| = |-2| = 2$

۱۸ - گزینه ۱ از صورت و مخرج، جملات با توان بیشتر را انتخاب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۱۹ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{ax + 1} \stackrel{\text{بر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}}{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - |x|}{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - (-x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} = 1 \rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{3x + 1} \Rightarrow f(-3) = \frac{-6 - 0}{-9 + 1} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

۲۰ - گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه $(2, 1)$ می گذرد، مختصات آن در ضابطه تابع f صدق می کند، پس داریم:

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + \sqrt{25}}{3(2) - 2} = 1 \Rightarrow \frac{2a + 6}{4} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \stackrel{\text{بر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

۲۱ - گزینه ۲ در این تست با توجه به این که حاصل حد، عددی غیر صفر است، پس بزرگترین توان x صورت و مخرج برابر است.



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n - 2x + 1}{(2x-1)^2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{4x^2} \stackrel{n=2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{4x^2} = \frac{a}{4} \stackrel{\text{طبق فرض}}{=} 3 \Rightarrow a = 12$$

بنابراین $\frac{a}{n} = \frac{12}{2} = 6$ است.

۲۲ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۲۳ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۲۴ - گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تنازنت، منفی است.

۲۵ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{-2 + 0}{\underbrace{(-2)^+ + 2}_{-1,9}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۲۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

۲۷ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

توجه کنید $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ می‌باشد.

۲۸ - گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\text{پس } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{-4}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۹ - گزینه ۲ در حدهای کسری وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون $n > 3$ است در نتیجه $n - 2 > 1$ و جمله‌ی پرتوان مخرج حتماً mx^{n-2} است.

$$m + 3 = n - 2 \Rightarrow m - n = -5$$

$$\text{مخرج } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}, \quad n = \frac{9}{2} \Rightarrow m + n = 4$$

۳۰ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پاسخنامه کلیدی

| | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱ - ۴ | ۶ - ۱ | ۱۱ - ۴ | ۱۶ - ۳ | ۲۱ - ۲ | ۲۶ - ۱ |
| ۲ - ۱ | ۷ - ۱ | ۱۲ - ۱ | ۱۷ - ۴ | ۲۲ - ۲ | ۲۷ - ۱ |
| ۳ - ۳ | ۸ - ۱ | ۱۳ - ۴ | ۱۸ - ۱ | ۲۳ - ۱ | ۲۸ - ۴ |
| ۴ - ۴ | ۹ - ۳ | ۱۴ - ۲ | ۱۹ - ۱ | ۲۴ - ۳ | ۲۹ - ۲ |
| ۵ - ۴ | ۱۰ - ۳ | ۱۵ - ۴ | ۲۰ - ۲ | ۲۵ - ۱ | ۳۰ - ۲ |