نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - با شرط $m > ۴, n < ۲$ و $\lim_{x\to\infty} \frac{n^۲x^{m-۳} + nx + m}{mx^{-n+۳} + mx - ۳} = ۳$ مقدار $m-n$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۸

۲ - حاصل $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-} (\frac{۱ + x}{۱ + \sin x})$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) صفر

(۳) $+\infty$

(۴) $-\infty$

۳ - حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \frac{\cos^۳ x}{|\sin ۲x - ۲\cos x|}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) $-\infty$

۴ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + b\sqrt{x^۲ + ۳}}{x^۲ - ۳x + ۲}$، اگر $\lim_{x\to۱} f(x) = ۲$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x) = xf(x)$ وقتی $x \to -\infty$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۸

(۳) ۸

(۴) -۴

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{\tan ۲x}$ کدام است؟

① $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

③ $\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$

④ $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$

۶- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\dfrac{x-۱}{۲x}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to۲^-} g(f(x))$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است)

① ۱

② $\dfrac{۱}{۲}$

③ ۲

④ صفر

۷- در تابع $f(x)=\dfrac{۲x-\sqrt{x^۲+x+۱۰}}{ax-۲}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۲} f(x)$ کدام است؟

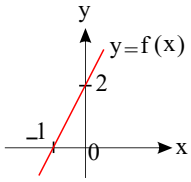
① $\dfrac{۳}{۸}$

② $\dfrac{۱۵}{۸}$

③ $\dfrac{۱۱}{۸}$

④ $\dfrac{۱۱}{۱۶}$

۸ - با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)+۲f^{-۱}(x)}{x}$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۱
۳) ۴
۴) ۲

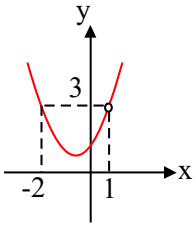
۹ - حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{۱۲^x - ۳^x + ۴^x - ۱}{۱۶^x - ۱}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱۲

۱۰ - اگر $f(x+۲) = \frac{\cos \pi x}{۱ + \sin \pi x}$، حاصل $\lim_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) ۰
۲) -۱
۳) ۱
۴) $+\infty$

۱۱ - اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۳ + bx + c}{x - ۱}$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار $b - c$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۲- اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}} = ۳$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۳- حد عبارت $\frac{\cos x}{۱-\sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{۲})^+$، کدام است؟

(۱) $+\infty$
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) $-\infty$

۱۴- حد چپ تابع $f(x) = \frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه ی $x=۳$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

(۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۰
(۴) ∞

۱۵- اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^۲-x+۱}{ax^۲-۱} = ۲$ باشد، حاصل $\lim_{x\to۱^-} \frac{۲x^۲-x+۱}{ax^۲-۱}$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $+\infty$
(۴) $-\infty$

۱۶ - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

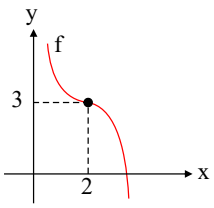
(۱) -۶

(۲) -۴

(۳) ۳

(۴) ۵

۱۷ - باتوجه به نمودار f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۲x-\pi}{f(x)-۳}$ کدام است؟



(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) ۱

(۴) ۳

۱۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲+۱}}{|x|-\sin x}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) صفر

(۳) -۱

(۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹ - حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}$ کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۱۲

(۳) ۸

(۴) ۶

۲۰- اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{۳x+۱}{(x^۲+۱)(x^۲-ax-b)} = +\infty$ مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) ۸
(۳) ۶
(۴) ۲

۲۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$، اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{۵}{۲}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \to -۱$، کدام است؟

(۱) $\frac{۲}{۳}$
(۲) $\frac{۵}{۶}$
(۳) $\frac{۳}{۲}$
(۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۲- اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{(a-۱)x+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{bx-۲}} = \frac{۱}{۲}$، آن گاه $a+b$ کدام است؟

(۱) ۴
(۲) ۵
(۳) -۳
(۴) -۲

۲۳- حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) -۱
(۲) ۱
(۳) $+\infty$
(۴) $-\infty$

۲۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)$ بر $x^۲+۳x+۲$، $۲x+۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲۵- اختلاف حد چپ و راست تابع $g(x)=\frac{\sqrt{۲}\sin \pi x}{\sqrt{۱+\cos \pi x}}$ در نقطه‌ی $x=۳$ چقدر است؟

(۱) صفر
(۲) ۲
(۳) $۲\sqrt{۲}$
(۴) ۴

۲۶- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$، کدام است؟

(۱) -۱۱۲
(۲) -۹۶
(۳) -۸۴
(۴) -۷۲

۲۷- اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۳x}{x^۲+ax+b}=+\infty$، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(a+۲)x^۲+۵x-۱}{(b-۱)x^۲-x-۷}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۱}{۳}$
(۲) $-\frac{۲}{۳}$
(۳) -۱
(۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۸- اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}+mx^3-1}{2x^{n+1}+4x^2+3} = -2$، حاصل $m+n$ کدام است؟

(۱) -2

(۲) 2

(۳) -1

(۴) 1

۲۹- اگر تابع $f(x) = \frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{bx-2}$ از نقطه‌ی $(1,2)$ بگذرد و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) ۸

(۳) ۵

(۴) ۲

۳۰- اگر $f(x) = \begin{cases} [x] & ; \quad x > -1 \\ 1-[x] & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 0} f(x^2-1)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) -1

(۲) -2

(۳) وجود ندارد.

(۴) صفر

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ چون جواب حد، عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

بزرگترین توان x صورت برابر $m-۳$ است $\rightarrow m-۳>۱ \rightarrow m>۴$

بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+۳$ است. $\rightarrow -n+۳>۱ \rightarrow -n>-۲ \rightarrow n<۲$

بزرگترین توان x صورت = بزرگترین توان x مخرج $\rightarrow m-۳=-n+۳ \rightarrow m+n=۶$

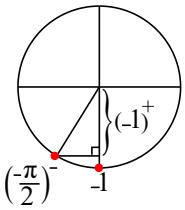
$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^۲\cdot x^{m-۳}}{m\cdot x^{-n+۳}}=\frac{n^۲}{m}=۳\rightarrow n^۲=۳m\rightarrow m=\frac{n^۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{m+n=۶}\frac{n^۲}{۳}+n=۶\rightarrow n^۲+۳n-۱۸=۰\rightarrow (n+۶)(n-۳)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}n=-۶\rightarrow m=۱۲\rightarrow m-n=۱۸\\ n=۳ \text{ غ ق ق } (n<۲)\end{cases}$$

۲ - گزینه ۴ وقتی $x\to(-\frac{\pi}{۲})^-$ در این صورت $\sin x$ در ناحیه‌ی سوم با مقادیر بیشتر از -۱ به عدد -۱ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-}(\frac{۱+x}{۱+\sin x})=\frac{۱-\frac{\pi}{۲}}{۱+\underbrace{(-۱)^+}_{-۰/۹}}=\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty$$



۳ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a=۲\sin a\cos a}$

ابتدا باید مشخص کنیم که داخل قدر مطلق چه علامتی دارد.

$$|\sin ۲x-۲\cos x|=|۲\sin x\cos x-۲\cos x|=|۲\cos x(\sin x-۱)|$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{۲})^-$ یعنی x در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است و $\sin(\frac{\pi}{۲})^-=۱^-$ است. بنابراین $\sin x-۱$ مقداری منفی است در نتیجه داخل قدر مطلق، منفی است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos^۳x}{-۲\cos x(\sin x-۱)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos^۲x}{-۲(\sin x-۱)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{۱-\sin^۲x}{-۲(\sin x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}{۲(۱-\sin x)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{۱+\sin x}{۲}=\frac{۱+۱}{۲}=۱$$

۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{a+۲b}{۰}\xrightarrow[\frac{۰}{۰}\text{ بوده است}]{\text{چون جواب حد عدد شده است بنابراین}\atop\text{این کسر حتما}}a+۲b=۰\rightarrow a=-۲b$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{a+b\frac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۳}}}{۲x-۳}=\frac{a+\frac{b}{۲}}{-۱}$$

$$=-a-\frac{b}{۲}=۲b-\frac{b}{۲}=\frac{۳b}{۲}=۲\rightarrow b=\frac{۴}{۳}\quad,\quad a=-\frac{۸}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}xf(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+bx\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+bx|\overline{x}|}{x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲-bx^۲}{x^۲}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x^۲}{x^۲}=a-b=\frac{-۸}{۳}-\frac{۴}{۳}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴$$

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\ ,\ ۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{+}}{\sin 2x}$$

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ در ناحیه‌ی اول است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{4\sin\frac{x}{2}\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{4(1)(-1)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2^-}g(f(x))=\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-x-1}{2([x]-x)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x-1}{2(1-x)}=\frac{1-2-1}{2(1-2)}=\frac{-2}{-2}=1$$

۷ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+x+10}}{ax-2}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\overbrace{|x|}^{+}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x}{ax}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{ax}=\frac{1}{a}=1\to a=1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{x^2+x+10}}{x-2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to 2}\frac{2-\frac{1(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+10}}}{1}=2-\frac{5}{8}=\frac{11}{8}$$

۸ - گزینه ۱ ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ و $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ روی تابع $y=f(x)$ معادله‌ی آن را می‌نویسیم و سپس ضابطه‌ی معکوس آن را بدست می‌آوریم و می‌دانیم برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا رابطه‌ی را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$: $\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x+1}=\frac{0-2}{-1-0}=2\to y=f(x)=2x+2$

ضابطه‌ی معکوس تابع $y=f(x)$: $y=2x+2\to 2x=y-2\to x=\frac{y-2}{2}\to f^{-1}(x)=\frac{x-2}{2}$

پس : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+2(\frac{x-2}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$

۹ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{12^x-3^x+4^x-1}{16^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x(4^x-1)+(4^x-1)}{(4^x-1)(4^x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x+1}{4^x+1}=\frac{2}{2}=1$$

۱۰ - گزینه ۲ وقتی $x\to 1$ میل کند، آنگاه $x+2\to 3$ میل می‌کند، بنابراین:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x+2)$$

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}=\frac{\cos\pi}{1+\sin\pi}=\frac{-1}{1+0}=-1$$

۱۱ - گزینه ۱ تابع در $x=1$ حدی برابر ۳ دارد .

عدد گذاری: $x=1\to\frac{1+b+c}{0}$

چون جواب حد برابر ۳ است پس این کسر حتما $\frac{0}{0}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش ۳ شده است بنابراین $1+b+c=0$ است.

$$\frac{0}{0}\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+b}{1}=3+b=3\to b=0\ ,\ \ c=-1\to b-c=1$$

۱۲ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=3\Rightarrow a=-3$$

پس : $\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to 3}\frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{-3}{-1+\frac{1}{4}}=\frac{-3}{-\frac{3}{4}}=4$

۱۳ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{(1-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۱۴ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\uparrow}{\overset{۲}{[}}۳^-])\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۵ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{ax^۲-۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x^۲}{ax^۲}=\frac{۲}{a}=۲\Rightarrow a=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}f(x)=\frac{۲-۱+۱}{۱(۱^-)^۲-۱}=\frac{۲}{۱(۱^-)-۱}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

۱۶ - گزینه ۱

می‌دانیم در ∞، عبارت $\sqrt{۴x^۲+۱۵x}$، هم‌ارز با $\sqrt{۴x^۲}$ است که برابر با $|۲x|$ خواهد شد:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n}{۳x-\sqrt{۴x^۲}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n}{۳x-۲\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n}{۵x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$. پس داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{ax}{۵x}=\frac{a}{۵}=-۱\to a=-۵$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{(-۵x+۱۵)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{\underbrace{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}_{۵x^۲-۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۵x(x-۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{x}=\frac{-(۹+۹)}{۳}=-۶$$

البته حد را می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to ۳}\frac{-۵}{۳-\frac{۱(۸x+۱۵)}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}}=\frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}}=\frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}}=-۶$$

۱۷ - گزینه ۱ باتوجه به نمودار، مشخص است که $x\to ۲^-\Rightarrow f(x)\to ۳^+$ زیرا وقتی با مقادیر کم‌تر از ۲ $x=۲$

روی نمودار به ۲ نزدیک می‌شویم عرض نقاط تابع با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شوند یعنی (۳^+) با توجه به این توضیح، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-\pi}{f(x)-۳}\overset{\pi\simeq ۳/۱۴}{=\!=}\frac{(۲\times ۲)-۳/۱۴}{۳^+-۳}=\frac{۴-۳/۱۴}{۰^+}=\frac{۰/۸۶}{۰^+}=+\infty$$

۱۸ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲+۱}}{|x|-\sin x}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲}}{|x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\overbrace{|x|}^{-}}{\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x}{-x}=-۲$$

دقت کنید چون $-۱\le \sin x\le ۱$ می‌باشد در مقابل $|x|$ از آن صرف نظر کردیم.

۱۹ - گزینه ۳ اگر صورت و مخرج بصورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می‌کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt[۴]{x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt[۴]{x}-۱)}=۲\times ۴=۸$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}}=۲\times ۴=۸$$

۲۰ - گزینه ۱ به ازای $x=۲$، صورت مثبت است و $x^۲+۱$ هم مثبت است پس برای آنکه جواب حد $+\infty$ شود باید $x=۲$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد، به عبارت دیگر باید:

$$x^۲-ax-b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=-۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۰$$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم در ∞، عبارت $\sqrt{۴x^۲+۵}$ هم‌ارز با $|۲x|$ و $\sqrt{۴x^۲}=|۲x|$ است:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۲\overbrace{|x|}^{+}}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۲x}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲)x}{۲x}=\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\to a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{\longrightarrow}\lim_{x\to-۱}\frac{۳+\frac{۱(۸x)}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}}{۲}=\frac{۳-\frac{۸}{۶}}{۲}=\frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$$

۲۲ - گزینه ۳ چون جواب حد، عددی حقیقی شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت با بزرگترین توان x مخرج باید با هم برابر باشند. چون بزرگترین توان x مخرج برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس بزرگترین توان x صورت هم باید $\frac{۱}{۲}$ باشد بنابراین x صورت باید حذف شود پس ضریب آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$a-۱=۰\to a=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۲-x}}{\sqrt{bx-۲}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{-x}{bx}}=\sqrt{\frac{-۱}{b}}=\frac{۱}{۲}\overset{\text{توان}۲}{\longrightarrow}\frac{-۱}{b}=\frac{۱}{۴}\to b=-۴$$

پس $a+b=۱-۴=-۳$ است.

۲۳ - گزینه ۳ به خاطر وجود جزء صحیح باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{(-۱)^{[۰^+]}}{۰^+}=\frac{(-۱)^۰}{۰^+}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim_{x\to۰^-}\frac{(-۱)^{[۰^-]}}{۰^-}=\frac{(-۱)^{-۱}}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پس $\lim\limits_{x\to۰}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=+\infty$ است.

۲۴ - گزینه ۲ با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم:

$$p(x)=(x^۲+۳x+۲)q(x)+۲x+۱=(x+۱)(x+۲)q(x)+۲x+۱\quad(۱)$$

حال برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x داریم:

$$x=۰\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=p(۰-۱)-p(۰-۲)=p(-۱)-p(-۲)$$

$$(۱)\Rightarrow p(-۱)=۰+۲(-۱)+۱=-۱\ ,\ p(-۲)=۰+۲(-۲)+۱=-۳$$

$$\text{باقی‌مانده}=p(-۱)-p(-۲)=-۱-(-۳)=۲$$

۲۵ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲},\sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}}$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{\sqrt{۲}\sin\pi x}{\sqrt{۱+\cos\pi x}}=\frac{\sqrt{۲}\sin\pi x}{\sqrt{۲\cos^۲\frac{\pi x}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}\sin\pi x}{\sqrt{۲}|\cos\frac{\pi x}{۲}|}=\frac{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{|\cos\frac{\pi x}{۲}|}$$

اکنون حد راست و حد چپ تابع را جداگانه محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x\to۳^+}\frac{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{\underbrace{|\cos\frac{\pi x}{۲}|}_{+}}=\lim_{x\to۳^+}\frac{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{\cos\frac{\pi x}{۲}}=\lim_{x\to۳^+}۲\sin\frac{\pi x}{۲}=۲\sin\frac{۳\pi}{۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to۳^-}\frac{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{\underbrace{|\cos\frac{\pi x}{۲}|}_{-}}=\lim_{x\to۳^-}\frac{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{-\cos\frac{\pi x}{۲}}=\lim_{x\to۳^-}-۲\sin\frac{\pi x}{۲}=-۲\sin\frac{۳\pi}{۲}=۲$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست تابع برابر ۴ است.

۲۶ - گزینه ۱

روش اول: با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم، برای رفع ابهام صورت را بر $x-4$ تقسیم می‌کنیم و عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}\times\frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}=-(4)(14)(2)=-112$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{6x-10}{\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\frac{14}{\frac{-\frac{1}{4}}{2}}=\frac{14}{-\frac{1}{8}}=-112$$

۲۷ - گزینه ۲ چون جواب حد، بی‌نهایت‌های هم‌علامت شده است. بنابراین $x=2$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است و مخرج به‌صورت $(x-2)^2$ است.

$$x^2+ax+b=(x-2)^2\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4\,,\ b=4$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر a و b خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+5x-1}{3x^2-x-7}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=-\frac{2}{3}$$

۲۸ - گزینه ۱ چون جواب حد برابر عدد شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند یعنی:

$$n+1=3\to n=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}+mx^3-1}{2x^{n+1}+4x^2+3}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{2x^{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{2x^3}=\frac{m}{2}=-2\to m=-4$$

بنابراین $m+n=-2$ است.

۲۹ - گزینه ۱ ابتدا نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ را در تابع داده شده صدق می‌دهیم.

$$\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}2=\frac{a+3}{b-2}\to a+3=2b-4\to a-2b=-7$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2}}{bx}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+2|\overbrace{x}^{-}|}{bx}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-2x}{bx}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-2)x}{bx}=\frac{a-2}{b}=1\to a-2=b\to a-b=2$$

$$\begin{cases}a-2b=-7\\a-b=2\end{cases}\Rightarrow\ a=11\,,\ b=9$$

۳۰ - گزینه ۱

$$x\to 0\Rightarrow x^2\to 0^+\Rightarrow x^2-1\to(-1)^+$$

پس: $\lim_{x\to 0}f(x^2-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}[x]=[(-1)^+]=-1$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۱	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۱
۴ - ۴	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۱	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱