علی هاشمی

نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - حاصل عبارت $A = \tan ۲۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۶۰^\circ + \cdots + \tan ۱۸۰^\circ$ کدام است؟

① صفر

② $۱ + ۲\sqrt{۳} + \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

③ -۱

④ ۱

۲ - جواب کلی معادلهٔ $۲\sin^۲ x = ۱ - \cos(۲x + \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

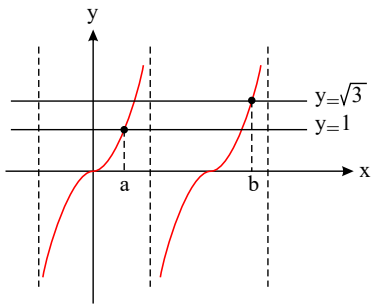
① $x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۶}$

② $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۶}$

③ $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$

④ $x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$

۳ - شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



① $\frac{\pi}{۱۲}$

② $\frac{۵\pi}{۱۲}$

③ $\frac{۷\pi}{۱۲}$

④ $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

۴ - از معادلهٔ $(\cos ۳x)(\cos \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} - \cos^۲ x$ چند جواب برای x در فاصلهٔ $(۰, ۲\pi)$ به‌دست می‌آید؟

(۱) ۶
(۲) ۵
(۳) ۴
(۴) ۳

۵ - مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ $\cos ۲x + \cos^۲ x + ۴\sin x = ۳$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{۳\pi}{۲}$
(۲) ۲π
(۳) $\frac{۵\pi}{۴}$
(۴) π

۶ - اگر انتهای زاویهٔ α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\frac{\sin(\alpha + \frac{۳\pi}{۲}) + ۲\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) + ۳\cos(۲\pi + \alpha)} = ۲$ باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{۴}{۱۷}$
(۲) $\frac{۴}{۷}$
(۳) $\frac{۴}{\sqrt{۶۵}}$
(۴) $\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}$

۷ - نقطهٔ $P(x, y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم تا نقطهٔ P' به‌دست آید. در این صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P و P' باهم برابر است؟ $(x, y \neq ۰)$

(۱) سینوس
(۲) کسینوس
(۳) تانژانت
(۴) هیچ‌کدام

۸ - کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\sin(x-\frac{۳\pi}{۴})-۲\cos(\frac{۷\pi}{۴}+x)$ با دامنهٔ $[-\frac{\pi}{۴},۲\pi]$، نادرست است؟

(۱) نمودار، ۳ بار محور xها را قطع می‌کند.

(۲) اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار f برابر با ۶ است.

(۳) نمودار f در بازهٔ $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ بالای محور xها قرار دارد.

(۴) خط $y=-۱$ در دو نقطه نمودار را قطع می‌کند.

۹ - اگر $\log(\sin\frac{۴\pi}{۵})-\log(\cos ۳۲۴^\circ)+\log A=۰$ باشد، A کدام می‌تواند باشد؟

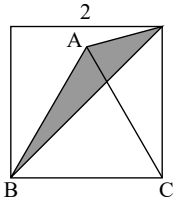
(۱) $\tan ۳۶^\circ$

(۲) $\tan ۵۴^\circ$

(۳) $\cot ۱۸^\circ$

(۴) $\cot ۷۲^\circ$

۱۰ - مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درون یک مربع به طول ضلع ۲ قرار گرفته است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟ $(\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲})$



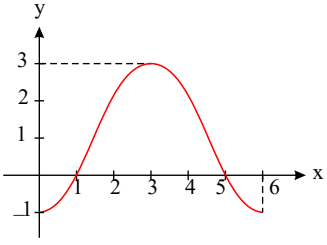
(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۲) $\sqrt{۳}-۱$

(۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

(۴) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۱۱ - اگر قسمتی از نمودار تابع $y=a+۲\sin(\pi(bx-\frac{۱}{۲}))$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $a-b$ کدام می‌تواند باشد؟



(۱) $\frac{۱}{۳}$

(۲) $\frac{۳}{۴}$

(۳) $\frac{۴}{۳}$

(۴) $\frac{۱}{۲}$

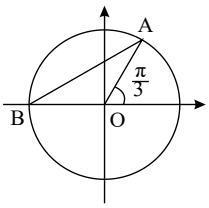
۱۲ - معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\cos ۲x + ۴\sin x - ۳}{\sin x - ۱} = ۳$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۱۳ - اگر $\sin x + \cos x = \frac{۵}{۴}$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan x + \cot x}$ چقدر است؟

① $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
② $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
③ $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$
④ $\frac{۳\sqrt{۲}}{۳}$

۱۴ - اگر A نقطهٔ متناظر با زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، نسبت طول کمان AB به طول پاره‌خط AB کدام است؟



① $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$
② $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$
③ $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$
④ $\frac{\sqrt{۳}}{۹}\pi$

۱۵ - معادلهٔ $\sin^۲ x + \cos^۲ ۳x = ۱$ دربازهٔ $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

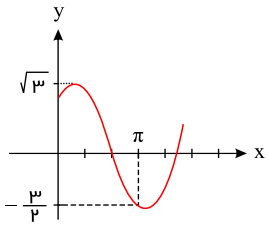
۱۶ - اگر $\frac{۳\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل $(۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x)\sqrt{۱ + \tan^۲ x}$، کدام است؟

(۱) $\sin x$
(۲) $\cos x$
(۳) $-\sin x$
(۴) $-\cos x$

۱۷ - حاصل عبارت $\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) + \cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})$، کدام است؟

(۱) $-\frac{۱}{۴}$
(۲) $-\frac{۱}{۲}$
(۳) $\frac{۱}{۴}$
(۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸ - شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $\sqrt{۳}$
(۴) ۲

۱۹ - مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$ ۴، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

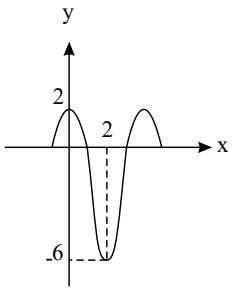
۱) $\frac{۵\pi}{۲}$

۲) ۳π

۳) ۴π

۴) ۵π

۲۰ - اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} - bx) + c$ باشد، مقدار تابع به‌ازای $x = \frac{۷}{۳}$ کدام است؟



۱) $-۲\sqrt{۳} - ۲$

۲) $۲\sqrt{۳} - ۲$

۳) -۴

۴) $-۳\sqrt{۳}$

۲۱ - اگر $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = ۳$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin\theta\cos\theta$ کدام است؟

۱) ۰٫۲

۲) ۰٫۳

۳) ۰٫۴

۴) ۰٫۵

۲۲ - اگر $\tan ۱۸^\circ = \alpha$ باشد و داشته باشیم: $\frac{A\sin ۱۰۸^\circ + \cos ۷۲^\circ}{A\sin ۹۱۸^\circ} = \frac{۲}{۳}$، در این صورت مقدار A کدام است؟

۱) $\frac{-۳\alpha}{۳ + ۲\alpha}$

۲) $\frac{۳\alpha}{۳ - ۲\alpha}$

۳) $\frac{۲\alpha}{۳ - ۲\alpha}$

۴) $\frac{۲\alpha}{۲ - ۳\alpha}$

۲۳- برای $\frac{\pi}{۲۴} < \frac{x-\pi}{۳} < \frac{\pi}{۱۸}$ داریم: $\cos ۲x = ۲m - ۱$، در این صورت حدود m کدام است؟

(۱) $(\frac{۳}{۴}, ۱]$

(۲) $(\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}]$

(۳) $(\frac{۳}{۴}, \frac{\sqrt{۲}+۲}{۴})$

(۴) $(۰, ۱]$

۲۴- در یک متوازی‌الاضلاع، یکی از قطرها دو برابر دیگری و زاویهٔ بین دو قطر ۳۰° است. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ۳۲ واحد مربع باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن چه‌قدر است؟

(۱) ۴

(۲) $۴\sqrt{۲}$

(۳) ۸

(۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۵- هرگاه $\cos(x+۳۰^\circ) + \cos(۲x+۶۰^\circ) = ۰$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x}$ کدام است؟ (x در ربع اول قرار دارد.)

(۱) $\sqrt{۳}$

(۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۳) $۲\sqrt{۳}$

(۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۶- اگر $۲\sin^۲ x - ۳\sin x \cos x + ۷\cos^۲ x = ۳$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۳

(۳) ۱

(۴) ۳

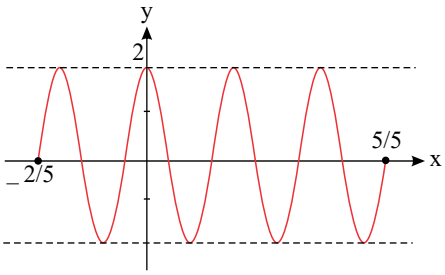
۲۷ - معادلهٔ $\sin^{۲} x = \sin x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲۸ - اگر $\frac{\tan\alpha + ۱}{\tan\alpha - ۱} = \frac{۳}{۲}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin ۲\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$
(۲) $-\frac{۱۲}{۱۳}$
(۳) $\frac{۵}{۱۳}$
(۴) $-\frac{۵}{۱۳}$

۲۹ - شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. حاصل ab کدام می‌تواند باشد؟

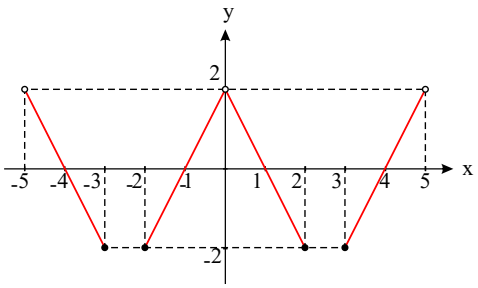


(۱) ۴
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۳۰ - مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos ۳x = \cos ۲x$، در بازهٔ $(\pi, ۳\pi)$، کدام است؟

(۱) ۱۲π
(۲) ۱۰π
(۳) ۸π
(۴) ۶π

۳۱- قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(۱۲۸٫۱)$ کدام است؟



(۱) ۱٫۸

(۲) $-۱٫۸$

(۳) $-۰٫۲$

(۴) تعریف نشده

۳۲- اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$، آنگاه دورهٔ تناوب تابع $f \cdot g$ کدام است؟

(۱) ۲π

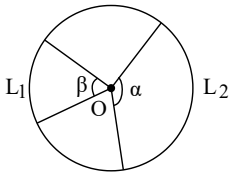
(۲) π

(۳) $\frac{\pi}{۲}$

(۴) تابع متناوب نیست.

۳۳- اگر در شکل زیر حاصل‌ضرب طول کمان‌های $L_۱$ و $L_۲$ برابر $\frac{\pi}{۹}$ مساحت دایره باشد و $\alpha = ۴\beta$، آنگاه مثلثی با دو زاویهٔ α و β از کدام نوع است؟

(O مرکز دایره است.)



(۱) متساوی‌الساقین

(۲) قائم‌الزاویه

(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

(۴) هیچ‌کدام

۳۴- اگر $\alpha = \beta - \gamma$، $\beta = ۶۰۰^\circ$ و $\gamma = -۳\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویهٔ α در کدام ربع دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

(۱) اول

(۲) دوم

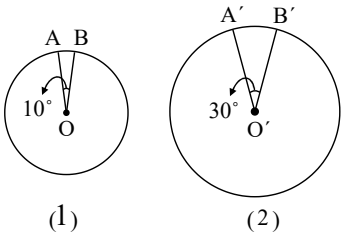
(۳) سوم

(۴) چهارم

۳۵ - انتهای کمان‌های ۳ و ۴٫۵ رادیان به‌ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

۱) دوم - دوم
۲) دوم - سوم
۳) سوم - سوم
۴) سوم - چهارم

۳۶ - مطابق شکل، اگر مساحت دایرهٔ (۲) سه برابر مساحت دایرهٔ (۱) باشد، حاصل $\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overset{\frown}{AB}}$ کدام است؟

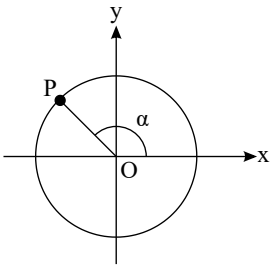


۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) ۴

۳۷ - تابع $f(x) = a + b\cos x$ در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ دارای بیش‌ترین مقدار $\frac{۳}{۲}$ و دارای کم‌ترین مقدار $\frac{۱}{۲}$ است. در این‌صورت $f(\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟ ($b > ۰$)

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) $۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳۸ - با توجه به شکل زیر اگر $P(-\frac{۱}{۳}, y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل $A = ۳\sin(\pi + \alpha) + ۲\tan^{۲}\alpha$ کدام است؟



۱) $۱۶ + ۲\sqrt{۲}$
۲) $۱۶ - ۲\sqrt{۲}$
۳) $۸ + ۳\sqrt{۲}$
۴) $۸ - ۳\sqrt{۲}$

۳۹- اگر $\cot ۸۰^\circ = ۰/۲$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos ۲۶۰^\circ - \cos ۵۵۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ + \sin ۷۳۰^\circ}$ کدام است؟

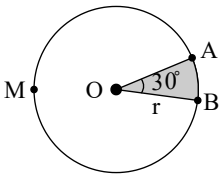
۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱

۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۰- در شکل مقابل، محیط ناحیهٔ هاشورخورده $۱۲ + \pi$ است. در این صورت طول کمان $\overset{\frown}{AMB}$ کدام است؟



۱) ۹π

۲) ۸π

۳) ۶π

۴) ۱۱π

۴۱- حاصل عبارت $\frac{\sin(۷۵۰^\circ) + \cos(-۴۲۰^\circ)}{۲\tan(-۳۱۵^\circ)}$ با مقدار کدام گزینه برابر است؟

۱) $\cos(۲۱۰^\circ)$

۲) $\sin(۲۱۰^\circ)$

۳) $\cos(۲۷۰^\circ)$

۴) $\sin(۱۵۰^\circ)$

۴۲- اگر $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = \frac{۱}{۲}$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم باشد، حاصل $\cot(\frac{\pi}{۲} + x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$

۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$

۳) $\sqrt{۱۵}$

۴) $-\sqrt{۱۵}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم که $\tan ۱۸۰^\circ = ۰$ است.

$$A = \tan ۲۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۶۰^\circ + \tan ۸۰^\circ + \tan ۱۰۰^\circ + \tan ۱۲۰^\circ + \tan ۱۴۰^\circ + \tan ۱۶۰^\circ + \cancel{\tan ۱۸۰^\circ}$$

$$\rightarrow A = \tan ۲۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۶۰^\circ + \tan ۸۰^\circ + \tan(۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ) + \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

$$+ \tan(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ) + \tan(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ)$$

$$\rightarrow A = \tan ۲۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۶۰^\circ + \tan ۸۰^\circ - \tan ۸۰^\circ - \tan ۶۰^\circ - \tan ۴۰^\circ - \tan ۲۰^\circ = ۰$$

۲ - گزینه ۱ می‌دانیم که $\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a$ است.

$$۲\sin^۲ x = ۱ - \cos(۲x + \frac{\pi}{۴}) \rightarrow \cos(۲x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\rightarrow \cos(۲x + \frac{\pi}{۴}) = \cos ۲x$$

$$\xrightarrow{x = ۲k\pi \pm \alpha} \begin{cases} ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + ۲x \rightarrow & \text{امکان ندارد} \\ ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - ۲x \rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۶} \end{cases}$$

۳ - گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع $\tan x$، باید $\tan a = ۱$ و a در ربع اول باشد بنابراین $a = \frac{\pi}{۴}$ است و $\tan b = \sqrt{۳}$ و b در $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ است، پس $b = \frac{۴\pi}{۳}$. بنابراین

$$b - a = \frac{۴\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۳\pi}{۱۲}.$$

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\cos ۲a = ۲\cos^۲ a - ۱$ است.

$$(\cos ۳x)(\cos \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} - \cos^۲ x \rightarrow (\cos ۳x)(\frac{-۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - \cos^۲ x$$

$$\xrightarrow{\times ۲} -\cos ۳x = ۱ - ۲\cos^۲ x \rightarrow \cos ۳x = ۲\cos^۲ x - ۱ \rightarrow \cos ۳x = \cos ۲x$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha} \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \rightarrow x = ۲k\pi \\ ۳x = ۲k\pi - ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۵} \rightarrow \frac{۲\pi}{۵}, \frac{۴\pi}{۵}, \frac{۶\pi}{۵}, \frac{۸\pi}{۵} \end{cases}$$

بنابراین ۴ جواب به‌دست می‌آید.

۵ - گزینه ۱ می‌دانیم $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ و $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ است.

$$\cos ۲x + \cos^۲ x + ۴\sin x = ۳ \rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x + ۱ - \sin^۲ x + ۴\sin x = ۳$$

$$\rightarrow ۳\sin^۲ x - ۴\sin x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin x = A} ۳A^۲ - ۴A + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} A = ۱ \rightarrow \sin x = ۱ \rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \\ A = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \rightarrow \sin x = \frac{۱}{۳} \rightarrow & \text{در بازهٔ } [۰, \pi] \text{ دو جواب مکمل دارد.} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر $\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}$ است.

۶ - گزینه ۳

$$\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + ۲\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) + ۳\cos(۲\pi + \alpha)} = \frac{-\cos\alpha + ۲\sin\alpha}{-\sin\alpha + ۳\cos\alpha} = ۲$$

$$\rightarrow -۲\sin\alpha + ۶\cos\alpha = -\cos\alpha + ۲\sin\alpha \rightarrow -۴\sin\alpha = -۷\cos\alpha \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۷}{۴} \rightarrow \tan\alpha = \frac{۷}{۴}$$

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\rightarrow ۱+(\frac{۷}{۴})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\rightarrow ۱+\frac{۴۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{۶۵}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۶۵}\xrightarrow{\text{ربع اول}}\cos\alpha=\frac{۴}{\sqrt{۶۵}}$$

۷ - گزینه ۳ اگر نقطهٔ $P(x,y)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم نقطهٔ $P'(-x,-y)$ به‌دست می‌آید که در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ P' نسبت به نقطهٔ P به‌اندازهٔ π رادیان اختلاف دارد و داریم:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\quad,\quad\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\quad,\quad\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

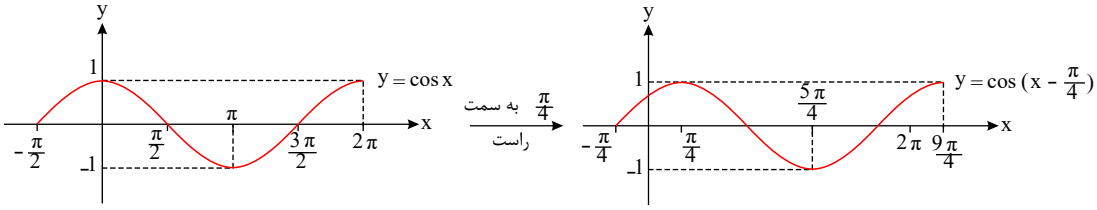
۸ - گزینه ۴

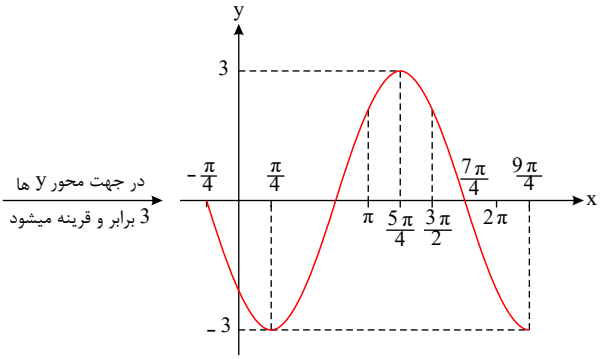
$$f(x)=\sin(x-\frac{۳\pi}{۴})-۲\cos(\frac{۷\pi}{۴}+x)=-\sin(\frac{۳\pi}{۴}-x)-۲\cos(\frac{۷\pi}{۴}+x)$$

$$\rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}-x)-۲\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۴}+x)$$

$$\rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi}{۲}-(x-\frac{\pi}{۴}))-۲\cos(x-\frac{\pi}{۴})=-\cos(x-\frac{\pi}{۴})-۲\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\rightarrow f(x)=-۳\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$





اگر خط $y=-۱$ رسم کنیم در بازهٔ گفته‌شده نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند، پس گزینهٔ «۴»، نادرست است.

۹ - گزینه ۲

$$\sin\frac{۴\pi}{۵}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۵})=\sin\frac{\pi}{۵}=\sin ۳۶^\circ$$

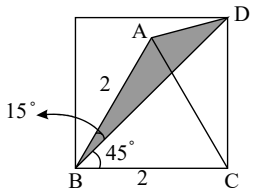
$$\cos ۳۲۴^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۳۶^\circ)=\cos ۳۶^\circ$$

$$\rightarrow \log(\sin ۳۶^\circ)-\log(\cos ۳۶^\circ)+\log A=۰\rightarrow \log\left(\frac{\sin ۳۶^\circ}{\cos ۳۶^\circ}\right)+\log A=۰$$

$$\rightarrow \log A=-\log(\tan ۳۶^\circ)\rightarrow \log A=\log(\tan ۳۶^\circ)^{-۱}$$

$$\rightarrow \log A=\log(\cot ۳۶^\circ)\rightarrow \log A=\log\big(\tan(۹۰^\circ-۳۶^\circ)\big)\rightarrow \log A=\log(\tan ۵۴^\circ)\rightarrow A=\tan ۵۴^\circ$$

۱۰ - گزینه ۲ چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $AB=BC=۲$ می‌باشد. به‌علاوه BD قطر مربع و برابر با $۲\sqrt{۲}$ است. زاویهٔ $A\hat{B}D$ برابر با $۱۵^\circ=۴۵^\circ-۶۰^\circ$ است. پس:



$\longrightarrow S_{ABD} = \frac{۱}{۲} AB \times BD \times \sin ۱۵^\circ$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲} = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲-\sqrt{۳}} = \sqrt{۴-۲\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲} = |\sqrt{۳}-۱| = \sqrt{۳}-۱$$

۱۱ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$y = a + ۲\sin(\pi bx - \frac{\pi}{۲}) \longrightarrow y = a - ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - \pi bx) \longrightarrow y = a - ۲\cos(b\pi x)$$

در تابع $y = a\cos bx + c$ دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. دورهٔ تناوب تابع داده‌شده برابر ۶ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۶ \longrightarrow \frac{۲}{|b|} = ۶ \longrightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

چون تابع داده‌شده کسینوس است هر دو مقدار b قابل‌قبول است.

$$Max = ۳ \longrightarrow |-۲| + a = ۳ \longrightarrow a = ۱$$

پس : $a - b = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$ یا $a - b = ۱ - (-\frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{۳}$

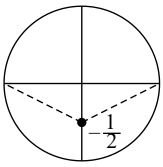
۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم $\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a$ است.

$$\frac{\cos ۲x + ۴\sin x - ۳}{\sin x - ۱} = ۳ \longrightarrow \cos ۲x + ۴\sin x - ۳ = ۳\sin x - ۳$$

$$\longrightarrow \cos ۲x + \sin x = ۰ \longrightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x + \sin x = ۰ \longrightarrow ۲\sin^۲ x - \sin x - ۱ = ۰$$

جمع ضرایب صفر است پس یک ریشهٔ معادله $\sin x = ۱$ و ریشهٔ دیگر $\sin x = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲}$ است.

$\sin x = ۱$ غ‌ق‌ق (مخرج را صفر می‌کند.)

$\sin x = -\frac{۱}{۲} \longrightarrow$  $\longrightarrow$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، ۲ ریشه دارد.

۱۳ - گزینه ۳ می‌دانیم $(\sin a + \cos a)^۲ = ۱ + \sin ۲a$ و $\tan a + \cot a = \frac{۲}{\sin ۲a}$ است.

$$\sin x + \cos x = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ + \sin ۲x = \frac{۲۵}{۱۶} \longrightarrow \sin ۲x = \frac{۹}{۱۶}$$

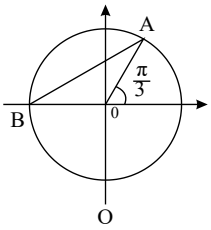
$$\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x} \longrightarrow \tan x + \cot x = \frac{۲}{\frac{۹}{۱۶}} = \frac{۳۲}{۹}$$

$$\longrightarrow \sqrt{\tan x + \cot x} = \frac{\sqrt{۳۲}}{۹} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۴ - گزینه ۳ مختصات نقطهٔ $A = (\cos\frac{\pi}{۳}, \sin\frac{\pi}{۳}) = (\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ است و $B(-۱, ۰)$ می‌شود. پس:

$$AB = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-۱))^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۰)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۴}} = \sqrt{\frac{۱۲}{۴}} = \sqrt{۳}$$

طول کمان AB هم برابر زاویهٔ $A\hat{O}B$ است و $\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$ می‌شود. پس:



$$\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$

۱۵ - گزینه ۳ توجه کنید اگر $\sin^۲ x = \sin^۲ \alpha$ باشد آنگاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$$\sin^۲ x + \cos^۲ ۳x = ۱ \longrightarrow \sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ ۳x \longrightarrow \sin^۲ ۳x = \sin^۲ x$$

$$\longrightarrow ۳x = k\pi \pm x \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{۲} \\ x = \frac{k\pi}{۴} \end{cases}$$

این معادله پنج جواب $۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۴}, \pi$ در بازهٔ داده‌شده دارد.

۱۶ - گزینه ۴ می‌دانیم که $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و چون $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ است، انتهای کمان در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\sqrt{۱ + \tan^۲ x}(۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x) = \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - \sin^۲ x\right) = \frac{۱}{\underbrace{|\cos x|}_{-}}(۱ - \sin^۲ x) = \frac{-۱}{\cos x}(\cos^۲ x) = -\cos x$$

۱۷ - گزینه ۳ هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin \frac{۱۷\pi}{۳} = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = -\sin \frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) = \cos \frac{۱۷\pi}{۶} = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{۱۹\pi}{۴} = \tan(۵\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan \frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = -\sin \frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\frac{-\pi}{۶}) = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال به‌صورت زیر است:

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a\sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{۳} \to |b| + a = \sqrt{۳} \xrightarrow[\text{است، } b>۰ \text{ است.}]{\text{چون شکل فرمت خود سینوس}} b + a = \sqrt{۳}$$

نقطهٔ $(\pi, -\frac{۳}{۲})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\begin{vmatrix} \pi \\ -\frac{۳}{۲} \end{vmatrix} \to -\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) \to -\frac{۳}{۲} = a - b\sin \frac{\pi}{۳} \to -\frac{۳}{۲} = a - \frac{\sqrt{۳}}{۲}b \to -۳ = ۲a - \sqrt{۳}b$$

$$-۲\begin{cases} b + a = \sqrt{۳} \\ ۲a - \sqrt{۳}b = -۳ \end{cases} \to -۲b - \sqrt{۳}b = -۲\sqrt{۳} - ۳ \to ۲b + \sqrt{۳}b = ۲\sqrt{۳} + ۳$$

$$\to (۲ + \sqrt{۳})b = ۲\sqrt{۳} + ۳ \to b = \frac{۲\sqrt{۳} + ۳}{۲ + \sqrt{۳}} \times \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲ - \sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳} - ۶ + ۶ - ۳\sqrt{۳}}{۴ - ۳} = \sqrt{۳}$$

۱۹ - گزینه ۴ می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$$۴\sin x\cdot\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\to-۴\sin x\cos x=۱\to-۴(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱\to-۲\sin ۲x=۱\to\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{-\pi}{۶})$$

$$\xrightarrow{\sin x=\sin\alpha\to\begin{cases}x=۲k\pi+\alpha\\x=۲k\pi+\pi-\alpha\end{cases}}\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\to x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\\۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\to x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم.}}x=\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۱۱\pi}{۱۲},\frac{۱۹\pi}{۱۲},\frac{۲۳\pi}{۱۲}\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}}\frac{۶۰\pi}{۱۲}=۵\pi$$

۲۰ - گزینه ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر کنیم:

$$y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}-bx)+c\Rightarrow y=a\sin(\frac{\pi}{۲}-b\pi x)+c\Rightarrow y=a\cos b\pi x+c$$

فاصلهٔ افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{۲}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{۲}=۲\Rightarrow T=۴\Rightarrow\frac{۲\pi}{|\text{ضریب } x|}=۴\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

هردوی $\pm\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x)=\cos x$. مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینمم تابع -۶ است. پس:

$$\left.\begin{matrix}Max=۲\to|a|+c=۲\\Min=-۶\to-|a|+c=-۶\end{matrix}\right\}\to c=-۲\ ,\ a=\pm۴$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a=۴$ صحیح است و داریم:

$$f(x)=۴\cos\frac{\pi}{۲}x-۲\xrightarrow{x=\frac{۷}{۳}}f(\frac{۷}{۳})=۴\cos(\frac{\pi}{۲}\times\frac{۷}{۳})-۲=۴\cos\frac{۷\pi}{۶}-۲$$

$$\Rightarrow f(\frac{۷}{۳})=۴\cos(\pi+\frac{\pi}{۶})-۲=۴(-\cos\frac{\pi}{۶})-۲=-۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۲=-۲\sqrt{۳}-۲$$

۲۱ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a\ ,\ \sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^{۲}a}}$

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=۳\to\sin\theta+\cos\theta=۳\sin\theta-۳\cos\theta\to۴\cos\theta=۲\sin\theta\to\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=۲$$
$$\to\tan\theta=۲$$
$$\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱+۴}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۲۲ - گزینه ۱

$$\frac{A\sin ۱۰۸^\circ+\cos ۷۲^\circ}{A\sin ۹۱۸^\circ}=\frac{A\sin(۹۰^\circ+۱۸^\circ)+\cos(۹۰^\circ-۱۸^\circ)}{A\sin(۷۲۰^\circ+۱۹۸^\circ)}$$

$$=\frac{A\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ}{A\sin ۱۹۸^\circ}=\frac{A\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ}{A\sin(۱۸۰^\circ+۱۸^\circ)}=\frac{A\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ}$$

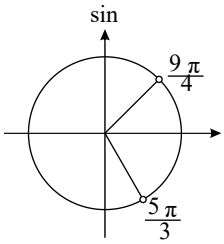
$$=\frac{A\cos ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ}+\frac{\sin ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ}=-\cot ۱۸^\circ-\frac{۱}{A}=\frac{۲}{۳}$$

$$\to-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{A}=\frac{۲}{۳}\to\frac{۱}{A}=-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۲}{۳}\to\frac{۱}{A}=\frac{-۳-۲\alpha}{۳\alpha}$$

$$\to A=\frac{۳\alpha}{-۳-۲\alpha}=\frac{-۳\alpha}{۳+۲\alpha}$$

۲۳ - گزینه ۱ با به‌دست آوردن محدودهٔ $۲x$ داریم:

$$-\frac{\pi}{۱۸}<\frac{x-\pi}{۳}<\frac{\pi}{۲۴}\xrightarrow{\times۳}-\frac{\pi}{۶}<x-\pi<\frac{\pi}{۸}$$
$$\xrightarrow{+\pi}\frac{۵\pi}{۶}<x<\frac{۹\pi}{۸}\xrightarrow{\times۲}\frac{۵\pi}{۳}<۲x<\frac{۹\pi}{۴}$$



$$\cos\to\begin{cases}\cos\frac{9\pi}{4}=\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos 0=1\\ \cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

در این بازه، $\cos 2x$ هریک از مقادیر بازهٔ $(\frac{1}{2},1]$ را می‌تواند اختیار کند.

یعنی: $$\frac{1}{2}<\cos 2x\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}<2m-1\le 1\Rightarrow\frac{3}{4}<m\le 1$$

۲۴ - گزینه ۳ مساحت متوازی‌الاضلاع از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر به‌دست می‌آید.

قطرها را x و $2x$ در نظر می‌گیریم:

$$S=\frac{1}{2}(x)(2x)\sin 30^\circ\Rightarrow 32=\frac{1}{2}(2x^2)(\frac{1}{2})\Rightarrow 32=\frac{x^2}{2}\Rightarrow x^2=64\Rightarrow x=8$$

۲۵ - گزینه ۲ اگر $\alpha+\beta=\pi$ باشد آن‌گاه $\cos\alpha+\cos\beta=0$ است پس:

$$(x+30^\circ)+(2x+60^\circ)=180^\circ\Rightarrow 3x=90^\circ\Rightarrow x=30^\circ$$

آن‌گاه:

$$\frac{1+\tan 30^\circ}{1+\cot 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۶ - گزینه ۲ می‌دانیم که $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ است.

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div\cos^2 x}2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-3\frac{\sin x}{\cos x}+7=\frac{3}{\cos^2 x}\Rightarrow 2\tan^2 x-3\tan x+7=3(1+\tan^2 x)$$

$$\Rightarrow\tan^2 x+3\tan x-4=0\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{c}{a}=-4\end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$: $1+(-4)=-3$

۲۷ - گزینه ۴

$$\sin^2 x=\sin x\to\sin x(\sin x-1)=0\to\begin{cases}\sin x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi\to x=0,\pi,2\pi\\ \sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\to x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارای ۴ ریشه است.

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ است.

$$\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{3}{2}\to 3\tan\alpha-3=2\tan\alpha+2\to\tan\alpha=5$$

پس: $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{10}{1+25}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

۲۹ - گزینه ۳ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=a\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)=a\cos(b\pi x)$$

از آنجاکه دورهٔ تناوب $y=a\cos bx+c$ برابر است با $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و با توجه به این‌که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:

$$4T=5{,}5-(-2{,}5)=8\Rightarrow T=\frac{8}{4}=2$$

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=2\Rightarrow|b|=1\Rightarrow b=\pm 1$$

و از طرفی نقطهٔ $(0,2)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند، یعنی:

$$2=a\cos(0)\Rightarrow a=2$$

$\Rightarrow a\times b=2\times(\pm 1)=\pm 2$ که عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

۳۰ - گزینه ۲

$$\cos ۳x = \cos ۲x \begin{cases} \xrightarrow{x=۲k\pi+\alpha} ۳x = ۲k\pi + ۲x \to x = ۲k\pi \\ \xrightarrow{x=۲k\pi-\alpha} ۳x = ۲k\pi - ۲x \to x = \frac{۲k\pi}{۵} \end{cases}$$

توجه کنید تمام جواب‌های $x = ۲k\pi$ در $x = \frac{۲k\pi}{۵}$ قرار دارند پس جواب معادله به‌صورت $x = \frac{۲k\pi}{۵}$ است و جواب‌های معادله در بازهٔ $(\pi, ۳\pi)$ به‌صورت $\frac{۱۴\pi}{۵}, \frac{۱۲\pi}{۵}, \frac{۱۰\pi}{۵}, \frac{۸\pi}{۵}, \frac{۶\pi}{۵}$ است.

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۶\pi}{۵} + \frac{۸\pi}{۵} + \frac{۱۰\pi}{۵} + \frac{۱۲\pi}{۵} + \frac{۱۴\pi}{۵} = \frac{۵۰\pi}{۵} = ۱۰\pi$$

۳۱ - گزینه ۲ با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر $T = ۵$ است و می‌دانیم در توابع متناوب اگر از هر نقطهٔ روی نمودار به اندازهٔ دورهٔ تناوب یا مضاربی صحیح از آن جلو یا عقب برویم مقدار تابع تغییر نمی‌کند.

$$۱۲۸٫۱ = ۲۵(۵) + ۳٫۱ \to f(۱۲۸٫۱) = f(۳٫۱)$$

برای پیدا کردن $f(۳٫۱)$ باید معادلهٔ خط مشخص شده در شکل در بازهٔ $[۳, ۴]$ را بنویسیم:

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} ۳ \\ -۲ \end{matrix} \right. \\ B \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix} \right. \end{cases} \to \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y - y_B}{x - x_B} \to \frac{y + ۲}{x - ۳} = \frac{-۲ - ۰}{۳ - ۴} = ۲ \to y + ۲ = ۲x - ۶ \to y = ۲x - ۸$$

پس : $f(x) = ۲x - ۸ \to f(۳٫۱) = ۲(۳٫۱) - ۸ = -۱٫۸$

۳۲ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\cos^۲ a - \sin^۲ a = \cos ۲a$ است.

تابع $f \cdot g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x$$

می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a\cos bx$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است. بنابراین:

$$T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

۳۳ - گزینه ۱

$$\begin{cases} L_۱ = R\beta \\ L_۲ = R\alpha \\ \alpha = ۴\beta \end{cases} \to \begin{cases} L_۱ = R\beta \\ L_۲ = ۴R\beta \end{cases}$$

$$L_۱ \times L_۲ = \frac{\pi}{۹} \times \pi R^۲ \to R\beta \times ۴R\beta = \frac{\pi^۲ R^۲}{۹} \to ۴\beta^۲ = \frac{\pi^۲}{۹}$$

$$\to ۲\beta = \frac{\pi}{۳} \to \beta = \frac{\pi}{۶} \to \beta = ۳۰^\circ \quad \text{و} \quad \alpha = ۴\beta \xrightarrow{\beta=۳۰^\circ} \alpha = ۱۲۰^\circ$$

$$\text{زاویهٔ سوم مثلث} = \gamma \to \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ \to \gamma = ۳۰^\circ \to \gamma = \beta$$ مثلث متساوی‌الساقین

پس مثلث متساوی‌الساقین است و زاویهٔ قائمه ندارد.

۳۴ - گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix} \beta = ۶۰۰^\circ \\ \gamma = -۳\pi = -۳ \times ۱۸۰^\circ = -۵۴۰^\circ \\ \alpha = (۳ \times ۳۶۰^\circ) + ۶۰^\circ = ۶۰^\circ \end{matrix}\right\} \to \alpha = \beta - \gamma \to \alpha = ۶۰۰^\circ - (-۵۴۰^\circ) = ۱۱۴۰^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.

۳۵ - گزینه ۲

$$\text{۱ رادیان} \simeq \text{۵۷٫۳ درجه} \to \begin{cases} \text{۳ رادیان} \simeq ۳ \times ۵۷٫۳^\circ \simeq ۱۷۱٫۹^\circ & (\text{ناحیهٔ دوم}) \\ \text{۴٫۵ رادیان} \simeq ۴٫۵ \times ۵۷٫۳^\circ \simeq ۲۵۷٫۸۵^\circ & (\text{ناحیهٔ سوم}) \end{cases}$$

۳۶ - گزینه ۲

مساحت و شعاع دایرهٔ (۲) را به‌ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایرهٔ (۱) را به‌ترتیب با S و R نمایش می‌دهیم، داریم:

فرض سؤال: $\frac{S'}{S} = ۳ \to \frac{\pi R'^۲}{\pi R^۲} = ۳ \to \frac{R'}{R} = \sqrt{۳}$

$$\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{۶})}{R(\frac{\pi}{۱۸})} = \frac{R'}{R} \cdot ۳ = ۳\sqrt{۳}$$

۳۷ - گزینه ۳

$$\pi \le x \le ۲\pi \to -۱ \le \cos x \le ۱ \xrightarrow{b>۰} -b \le b\cos x \le b$$

$$\to a-b \le a+b\cos x \le a+b \to \begin{cases} a-b=\frac{۱}{۲} \\ a+b=\frac{۳}{۲} \end{cases} \to a=۱, b=\frac{۱}{۲}$$

پس: $f(x)=۱+\frac{۱}{۲}\cos x \to f(\frac{۵\pi}{۳})=۱+\frac{۱}{۲}\cos\frac{۵\pi}{۳}=۱+\frac{۱}{۲}(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=۱+\frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۳}=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$

۳۸ - گزینه ۲

$$x^۲+y^۲=r^۲ \to (-\frac{۱}{۳})^۲+y^۲=۱^۲ \to y^۲=\frac{۸}{۹} \to y=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\to \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \quad , \quad \tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}{-\frac{۱}{۳}} \to \tan\alpha=-۲\sqrt{۲}$$

$$\to A=۳\sin(\pi+\alpha)+۲\tan^۲\alpha=۳(-\sin\alpha)+۲\tan^۲\alpha=۳(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})+۲(-۲\sqrt{۲})^۲$$

$$\to A=-۲\sqrt{۲}+۲(۸) \to A=۱۶-۲\sqrt{۲}$$

۳۹ - گزینه ۲

$$\cos ۲۶۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۸۰^\circ)=-\cos ۸۰^\circ$$

$$\cos ۵۵۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۱۹۰^\circ)=\cos ۱۹۰^\circ=\cos(۲۷۰^\circ-۸۰^\circ)=-\sin ۸۰^\circ$$

$$\sin ۷۳۰^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۰^\circ)=\sin ۱۰^\circ=\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)=\cos ۸۰^\circ$$

پس: $A=\frac{-\cos ۸۰^\circ-(-\sin ۸۰^\circ)}{\sin ۸۰^\circ+\cos ۸۰^\circ}=\frac{-\frac{\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}+\frac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}}{\frac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}+\frac{\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}}=\frac{-\cot ۸۰^\circ+۱}{۱+\cot ۸۰^\circ}=\frac{-۰/۲+۱}{۱+۰/۲}=\frac{۰/۸}{۱/۲}=\frac{۲}{۳}$

۴۰ - گزینه ۴

طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ $AB=r\alpha=r\times\frac{\pi}{۶}=\frac{r\pi}{۶}$

محیط ناحیهٔ هاشورخورده $=۲r+\frac{r\pi}{۶}=۱۲+\pi \to r(۲+\frac{\pi}{۶})=۶(۲+\frac{\pi}{۶}) \to r=۶$

$$\to \overset{\frown}{AMB}=r\times(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=۶\times\frac{۱۱\pi}{۶} \to \overset{\frown}{AMB}=۱۱\pi$$

۴۱ - گزینه ۴

$$\sin ۷۵۰^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(-۴۲۰^\circ)=\cos ۴۲۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۶۰^\circ)=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(-۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)=-(-\tan ۴۵^\circ)=۱$$

پس: $\frac{\sin ۷۵۰^\circ+\cos(-۴۲۰^\circ)}{۲\tan(-۳۱۵^\circ)}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲(۱)}=\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ ۴: $\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ ✓

۴۲ - گزینه ۲

$$\sin(\pi+x)=\frac{۱}{۲}+\sin(\pi-x)\rightarrow-\sin x=\frac{۱}{۲}+\sin x\rightarrow-\frac{۱}{۲}=۲\sin x$$

$$\rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۴}\ \text{و}\ \cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x\xrightarrow{\sin x=-\frac{۱}{۴}}۱-(-\frac{۱}{۴})^{۲}=۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}\xrightarrow{\text{ناحیهٔ سوم}}\cos x=-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+x)=-\tan x=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\frac{۱}{۴}}{-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}}=-\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۷ - ۳	۱۳ - ۳	۱۹ - ۴	۲۵ - ۲	۳۱ - ۲	۳۷ - ۳
۲ - ۱	۸ - ۴	۱۴ - ۳	۲۰ - ۱	۲۶ - ۲	۳۲ - ۲	۳۸ - ۲
۳ - ۴	۹ - ۲	۱۵ - ۳	۲۱ - ۳	۲۷ - ۴	۳۳ - ۱	۳۹ - ۲
۴ - ۳	۱۰ - ۲	۱۶ - ۴	۲۲ - ۱	۲۸ - ۳	۳۴ - ۱	۴۰ - ۴
۵ - ۱	۱۱ - ۳	۱۷ - ۳	۲۳ - ۱	۲۹ - ۳	۳۵ - ۲	۴۱ - ۴
۶ - ۳	۱۲ - ۲	۱۸ - ۳	۲۴ - ۳	۳۰ - ۲	۳۶ - ۲	۴۲ - ۲