

نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

۱- اگر  $\cot x = 1 + \tan x$  حاصل  $\tan 2x$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$
- ②  $-\frac{1}{2}$
- ③ ۲
- ④ -۲

۲- با فرض  $\tan 22^\circ = \frac{2}{5}$  حاصل عبارت  $\frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos(202^\circ)}$  ، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$
- ②  $\frac{2}{2}$
- ③  $\frac{2}{5}$
- ④  $\frac{2}{5}$

۳- اگر  $30^\circ < x < 25^\circ -$  و  $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$  ، آنگاه حدود تغییرات  $m$  کدام فاصله است؟

- ①  $(1, \frac{3}{2}]$
- ②  $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
- ③  $(1, \frac{3}{2})$
- ④  $(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ)$



۴- اگر  $\cos \alpha = 2m + 1$ ،  $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

①  $-\frac{1}{4} < m \leq 0$

②  $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$

③ فقط  $m = -\frac{1}{4}$

④  $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

۵- اگر  $\tan \theta = 2$ ، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

① -۲

② ۱٫۲

③ ۲

④ ۳

۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sqrt{3}(\tan^2 x - 1) + 2 \tan x = 0$  کدام است؟

①  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

②  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

③  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

④  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

۷- اگر  $f(x) = 2x^2 - 1$  باشد تابع  $(f \circ f)(\cos x)$  برابر کدام است؟

①  $\sin^4 x$

②  $\cos^4 x$

③  $\sin 4x$

④  $\cos 4x$



۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \cos^3 x$  کدام است؟

①  $x = k\pi$

②  $x = k\frac{\pi}{2}$

③  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$

④  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۹- اگر  $\cot 2^\circ = \frac{8}{3}$  باشد حاصل  $\frac{2 \sin 25^\circ - \cos 16^\circ}{\sin 16^\circ + 3 \cos 7^\circ - \sin 11^\circ}$  برابر کدام است؟

① -۳

② -۲

③ ۲

④ ۳

۱۰- اگر  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  باشد مقدار  $\cos 2\alpha$  کدام است؟

①  $\frac{5}{9}$

②  $\frac{4}{9}$

③  $-\frac{5}{9}$

④  $-\frac{4}{9}$

۱۱- نقطه‌ی  $A$  بر روی دایره‌ای به شعاع ۳ واحد قرار دارد. متحرکی از نقطه‌ی  $A$  در جهت منفی دایره‌ی مثلثاتی  $42^\circ$  درجه چرخیده و در نقطه‌ی  $M$  قرار گرفته است. متحرک دیگر از نقطه‌ی  $A$  در جهت مثبت دایره‌ی مثلثاتی  $21^\circ$  درجه چرخیده و در نقطه‌ی  $N$  قرار گرفته است. طول قوس  $MN$  چند واحد است؟

①  $\frac{\pi}{2}$

②  $\pi$

③  $\frac{3\pi}{2}$

④  $\frac{\pi}{3}$



۱۲- نقطه‌ی  $A(3, 2)$  بر روی دایره‌ای به مرکز  $(2, 0)$  قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی  $A$  در جهت چرخش عقربه‌ی ساعت کمان  $120^\circ$  درجه تا نقطه‌ی  $M$  طی کرده است. مختصات  $M$  کدام است؟

①  $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

②  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

③  $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

④  $(-\frac{3}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۳- نمودار تابع  $y = \sin 5x$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند بار محور  $x$  را قطع می‌کند؟

① ۸

② ۹

③ ۱۰

④ ۱۱

۱۴- اگر  $\tan 25^\circ = 0.48$  باشد حاصل عبارت  $\frac{\sin 155^\circ - 3 \cos 245^\circ}{\cos 295^\circ - 2 \sin 65^\circ}$  کدام است؟

①  $-\frac{12}{19}$

②  $-\frac{13}{19}$

③  $-\frac{24}{19}$

④  $-\frac{26}{19}$



۱۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  به کدام صورت است؟

①  $x = \frac{k\pi}{3}$

②  $x = \frac{2k\pi}{3}$

③  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

④  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۱۶- اگر  $\tan \alpha = 2$  باشد، حاصل  $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}$  کدام است؟

① ۲

② ۳

③ -۲

④ -۳

۱۷- اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۴ و ۶ و زاویه‌ی بین آن‌ها  $150^\circ$  است. مساحت این مثلث کدام است؟

① ۶

② ۱۲

③  $6\sqrt{3}$

④  $12\sqrt{3}$

۱۸- از معادله‌ی  $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \sin \frac{4\pi}{3}$  جواب کلی  $x$  کدام است؟

①  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

②  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

③  $x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12}$

④  $x = k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$



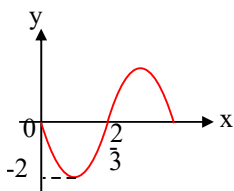
۱۹- مجموع جواب‌های معادله‌ی  $\sin 3x = \cos 2x$  در فاصله‌ی  $(0, \pi)$  کدام است؟

- ①  $2\pi$
- ②  $\pi$
- ③  $\frac{3\pi}{2}$
- ④  $\frac{\pi}{2}$

۲۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 2x = 2\cos^2 x - 1$  در فاصله‌ی  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- ①  $3\pi$
- ②  $\frac{7\pi}{2}$
- ③  $4\pi$
- ④  $\frac{9\pi}{2}$

۲۱- اگر نمودار تابع  $y = a \sin b\pi x$  به صورت زیر باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟



- ①  $-3$
- ②  $-\frac{3}{2}$
- ③  $\frac{4}{3}$
- ④  $-\frac{4}{3}$

۲۲- جواب کلی معادله‌ی  $\frac{\cos 2x}{1 + \tan^2 x} = 0$ ، کدام است؟

- ①  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ②  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
- ③  $x = k\pi$
- ④  $x = \frac{k\pi}{2}$



۲۳- جواب کلی معادله  $4 \sin x \cos^3 x - 4 \cos x \sin^3 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$  کدام است؟

①  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

②  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

③  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

④  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{32}$

۲۴- حاصل عبارت  $A = \sin(\pi - x) \sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(2\pi + x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$  کدام است؟

①  $1 + \cos 2x$

②  $1 - \cos 2x$

③  $-1 + \cos 2x$

④  $-1 - \cos 2x$

۲۵- حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{1 + \sin 50^\circ}}{\sin 40^\circ}$  کدام است؟

①  $\frac{\sqrt{2}}{\sin 20^\circ}$

②  $\frac{\sqrt{2}}{\cos 20^\circ}$

③  $\frac{\sqrt{2}}{2 \sin 20^\circ}$

④  $\frac{\sqrt{2}}{2 \cos 20^\circ}$

۲۶- معادله  $2 \sin 2x \cos 2x + \sin 3x = 0$  در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد؟

① ۳

② ۲

③ ۴

④ ۱



۲۷- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2\cos^2 x = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  کدام است؟

①  $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$

②  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$

③  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

④  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۸- اگر تابع  $f(x) = 5\sin\left(3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right)\right)$  به‌ازای  $x = \frac{1}{2}$  ماکسیمم شود، طول نقطه‌ی مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c، عدد ثابت است.)

①  $-\frac{5}{6}$

②  $\frac{7}{6}$

③  $\frac{11}{6}$

④  $\frac{4}{3}$

۲۹- اگر  $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{2}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin(\pi - \theta) + 2\cos(\pi + \theta)}{2\sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)}$  کدام است؟

① صفر

②  $-\frac{5}{4}$

③  $-\frac{4}{5}$

④ تعریف نشده





۳- اگر  $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{3}$  باشد، حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 x$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{23}{54}$
- ۲)  $-\frac{23}{54}$
- ۳)  $\frac{23}{27}$
- ۴)  $-\frac{23}{27}$



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$

$$\cot x - \tan x = 1 \Rightarrow 2 \cot 2x = 1 \Rightarrow \cot 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 2x = 2$$

۲ - گزینه ۳ داریم:

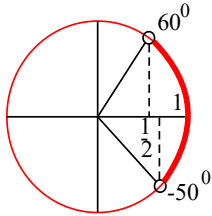
$$\begin{cases} \sin(-112^\circ) = -\sin 112^\circ = -\sin(90^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \\ \sin 158^\circ = \sin(180^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ \\ \cos 202^\circ = \cos(180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos 202^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ + \sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ}{-\cos 22^\circ} + \frac{\sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ}$$

$$= 1 - \tan 22^\circ = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

۳ - گزینه ۱

$$-25^\circ < x < 30^\circ \Rightarrow -50^\circ < 2x < 60^\circ$$



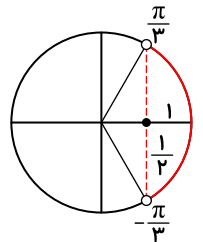
کمانی را که  $2x$  روی دایره ی مثلثاتی می‌پیماید مشخص می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < 2m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < 2m \leq 3 \Rightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

۴ - گزینه ۱ با توجه به دایره ی مثلثاتی وقتی  $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ، کسینوس زاویه ی  $\alpha$  در فاصله ی  $[\frac{1}{2}, 1]$  قرار دارد، لذا:

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2m+1 \leq 1$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} < 2m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < m \leq 0$$



۵ - گزینه ۴

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 2$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \xrightarrow{\text{جملات را تقسیم بر } \sin \theta \text{ می‌کنیم}} \frac{1 + \cot \theta}{1 + 1} = \frac{3}{2} = 3$$

۶ - گزینه ۳

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sqrt{3}(\tan^2 x - 1) + 2 \tan x = 0 \Rightarrow 2 \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan^2 x)$$

$$\rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۷ - گزینه ۴

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$f \circ f(\cos x) = f(f(\cos x)) = f(2 \cos^2 x - 1) = f(\cos 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = \cos 4x$$

۸ - گزینه ۲

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + x) = \cos^2 x \rightarrow \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} + x)$$



$$= \cos^3 x \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^3 x \rightarrow \cos x = \cos^3 x$$

$$\rightarrow \cos^3 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{حالت خاص} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \text{حالت خاص} \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

که اجتماع این سه جواب  $x = \frac{k\pi}{2}$  است.

۹ - گزینه ۲ تمام زاویه ها را بر حسب  $20^\circ$  می نویسیم.

$$\frac{2 \sin 25^\circ - \cos 16^\circ}{\sin 16^\circ + 3 \cos 7^\circ - \sin 11^\circ} = \frac{2 \sin\left(\frac{5\pi}{18} - 20^\circ\right) - \cos(\pi - 20^\circ)}{\sin(\pi - 20^\circ) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{9} - 20^\circ\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9} + 20^\circ\right)}$$

$$= \frac{-2 \cos 20^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ + 3 \sin 20^\circ - \cos 20^\circ} = \frac{-\cos 20^\circ}{4 \sin 20^\circ - \cos 20^\circ}$$

$$\text{همه جملات را بر } \sin 20^\circ \text{ تقسیم می کنیم} = \frac{-\cot 20^\circ}{4 - \cot 20^\circ} = \frac{-\frac{4}{3}}{4 - \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$$

۱۰ - گزینه ۳

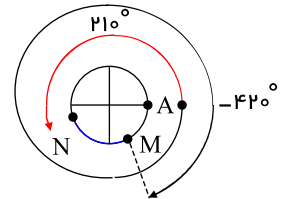
می دانیم:  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{2}{9}\right) - 1 = \frac{4}{9} - 1 = \frac{-5}{9}$$

۱۱ - گزینه ۳

با توجه به شکل زیر نقطه A را متناظر صفر درجه در نظر می گیریم. بنابراین واضح است نقطه M از  $27^\circ$  درجه به اندازه  $30^\circ$  درجه بیشتر است و نقطه N از  $18^\circ$  درجه به اندازه  $3^\circ$  درجه بیشتر است پس کمان MN برابر  $9^\circ$  درجه یا  $\frac{\pi}{20}$  رادیان است.

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{L}{3} \rightarrow L = \frac{3\pi}{2}$$



۱۲ - گزینه ۴ اگر مرکز دایره  $O(x_0, y_0)$  بوده و بخواهیم نقطه A روی دایره را به اندازه  $\theta$  درجه در جهت عقربه های ساعت روی دایره به شعاع R دوران دهیم. مختصات نقطه جدید به صورت  $(x_0 + R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta)$  در می آید.

$$R = 3, O(0, 2) \rightarrow M = (0 + 3 \cos 120^\circ, 2 - 3 \sin 120^\circ) \rightarrow M = \left(-\frac{3}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

۱۳ - گزینه ۴

$$y = \sin \delta x \xrightarrow{y=0} \sin \delta x = 0 \xrightarrow{x=k\pi} \delta x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{\delta}$$

به اعداد ۰ و ۱ و ۲ و...۱۰ را می دهیم x از  $2\pi$  بیشتر نمی شود پس در این فاصله ۱۱ بار محور xها را قطع می کند

$$0, \frac{\pi}{\delta}, \frac{2\pi}{\delta}, \frac{3\pi}{\delta}, \dots, 2\pi$$

۱۴ - گزینه ۳ تمام زوایا را بر حسب  $25^\circ$  می نویسیم.

$$\frac{\sin 155^\circ - 3 \cos 245^\circ}{\cos 295^\circ - 2 \sin 65^\circ} = \frac{\sin(\pi - 25) - 3 \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 25\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 25\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 25\right)} = \frac{\sin 25 + 3 \sin 25}{\sin 25 - 2 \cos 25} = \frac{4 \sin 25}{\sin 25 - 2 \cos 25}$$

$$\text{صورت و مخرج کسر را بر } \cos 25 \text{ تقسیم می کنیم: } \frac{4 \tan 25}{\tan 25 - 2} = \frac{4(0.48)}{0.48 - 2} = \frac{1.92}{-1.52} = -\frac{192}{152} = -\frac{24}{19}$$

۱۵ - گزینه ۲

می دانیم:  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$



$$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{یا} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

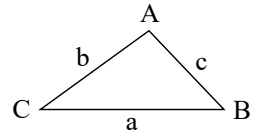
گزینه ۴ - جواب‌های  $x = 2k\pi$  را پوشش می‌دهد.

۱۶ - گزینه ۴

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(3\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha + \sin \alpha} \stackrel{\div(-\cos \alpha)}{=} \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

۱۷ - گزینه ۱ مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \hat{C} = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin \hat{B}$$



$$S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \underbrace{\sin 150^\circ}_{\sin 30^\circ} = 6$$

۱۸ - گزینه ۳

می‌دانیم:  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) &= \sin \frac{4\pi}{3} \stackrel{\text{مزدوج}}{\rightarrow} \cos^2 x - \sin^2 x = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \cos 2x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} \stackrel{x=2k\pi \pm \alpha}{\rightarrow} 2x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

۱۹ - گزینه ۳

$$\sin 3x = \cos 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{10} + \frac{\pi}{10}, \frac{4\pi}{10} + \frac{\pi}{10} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{9\pi}{10} \end{cases} &\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \end{cases} & \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۲ می‌دانیم:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned} \sin 2x = 2\cos^2 x - 1 &\Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \stackrel{\div \cos 2x \neq 0}{\rightarrow} \tan 2x = 1 \stackrel{x=k\pi + \alpha}{\rightarrow} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow x &= \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ \text{مجموع جواب‌ها} &= \frac{\pi}{8} + (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) + (\pi + \frac{\pi}{8}) + (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = \frac{7\pi}{2} \end{aligned}$$

۲۱ - گزینه ۱ نکته ۱: دوره تناوب  $y = a \sin(bx + c)$  برابر است با:  $T = \frac{2\pi}{|b|}$

نکته ۲: برد تابع  $y = a \sin(bx + c)$  عبارت است از:  $(-|a|, |a|)$  یعنی حداقل مقدار تابع برابر  $-|a|$  و حداکثر مقدار آن برابر  $|a|$  است.

با توجه به نمودار، دوره تناوب  $T = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$  است.

طبق نکته ۱ داریم:  $T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|}$

بنابراین:  $\frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$

کمترین مقدار تابع برابر ۲- است، پس از نکته ۲ داریم:

$-|a| = -2 \Rightarrow |a| = 2$



بنابراین:  $|ab| = |a||b| = 3$

با توجه به این که اولین طاق نمودار زیر محور  $x$  هاست، باید حداقل یکی از دو عدد  $a$  و  $b$  منفی باشد، بنابراین  $ab = -|ab| = -3$

۲۲ - گزینه ۲ اگر  $\cos x = 0$ ، آن گاه  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  است.

$$\frac{\cos 2x}{1 + \tan^2 x} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

دقت کنید مخرج همواره مخالف صفر است، پس کلیه جواب‌های فوق قابل قبول‌اند.

۲۳ - گزینه ۳

$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$

 می‌دانیم:

$$2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos x \sin^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \sin x \cos x}_{2 \sin 2x} \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} = \underbrace{\cos^2 2x - \sin^2 2x}_{\cos 4x} \Rightarrow \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = \cos 4x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \cos 4x \xrightarrow{\div \cos 4x} \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۲۴ - گزینه ۳ ابتدا حاصل تک تک جملات را بدست می‌آوریم.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos(2\pi + x) = \cos x, \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan x, \sin(\pi - x) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$A = -\sin^2 x + \cos^2 x - \tan x \cot x = (\cos^2 x - \sin^2 x) - 1 = \cos 2x - 1$$

۲۵ - گزینه ۳ می‌دانیم:  $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a, \sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 50^\circ}}{\sin 40^\circ} \xrightarrow{\sin 50^\circ = \cos 40^\circ} \frac{\sqrt{1 + \cos 40^\circ}}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2 \cos^2 20^\circ}}{2 \sin 20^\circ \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin 20^\circ}$$

۲۶ - گزینه ۲ می‌دانیم:  $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

$$\frac{1}{2} \sin 4x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x + \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x + \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = -\sin 4x = \sin(-4x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -4x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} \\ 4x = 2k\pi + \pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر صحیح  $k$ ، ریشه‌های معادله در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  برابر صفر و  $\frac{2\pi}{3}$  است. پس در این بازه، دو ریشه دارد.

۲۷ - گزینه ۱

$$2 \cos^2 x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow 2 \cos^2 x = -3 \sin x$$

$$\rightarrow 2(1 - \sin^2 x) = -3 \sin x \rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow \sin x = 2 \text{ (امکان ندارد: } -1 \leq \sin x \leq 1) \\ A = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۲ دوره تناوب تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.

$$f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2}x - 3c\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{2}\right|} = \frac{4}{3}$$

فاصله طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر  $\frac{T}{2}$  است پس اگر از  $x = \frac{1}{2}$  به اندازه  $\frac{T}{2}$  به سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم.



$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

۲۹ - گزینه ۳

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{-2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{-2 \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{1 - 2 \cot \theta}{-2 + \cot \theta}$$

$$= \frac{1 - 2(-\frac{1}{2})}{-2 + (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

۳۰ - گزینه ۴

$$\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \cos(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\sin x - \cos x = \frac{2}{3} \rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{2}{3}$$

می‌دانیم که  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  است بنابراین نیاز به پیدا کردن  $\sin x \cdot \cos x$  داریم. برای این کار عبارت آخر به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sin x + \cos x)^2 = (-\frac{2}{3})^2 \rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}$$

پس:  $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$

$$= (-\frac{2}{3})^3 - 3(-\frac{5}{18})(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27} - \frac{15}{27} = -\frac{23}{27}$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۴	۱۲ - ۴	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۱	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۳	۲۴ - ۳	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۲	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴