



علی هاشمی

۱- ساده شده عبارت $\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ کدام است؟
 $1 + \cos \alpha$

① $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

② $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

③ $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

④ $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

۲- اگر $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\tan \theta = \sqrt{\frac{a}{b}}$ باشد، کدام رابطه صحیح است؟ ($b \neq 0$)

① $a + b = 1$

② $a - b = 1$

③ $a = -b$

④ $a = b$

۳- اگر به ازای هر زاویه حاده θ ، تساوی $\cot^2 \theta = \cos \theta \left(\frac{a}{1 - \cos \theta} + \frac{-b}{1 + \cos \theta} \right)$ برقرار باشد حاصل $a \times b$ چقدر است؟

① صفر

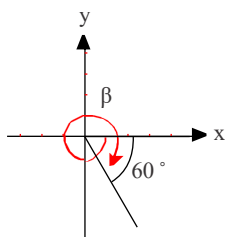
② ۲

③ ۱

④ -۲



۴- با توجه به شکل مقابل، حاصل عبارت $\frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta}$ کدام است؟



۱ $-\sqrt{3}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴ $\sqrt{3}$

۵- ساده شده عبارت $A = (\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\pi - x))(\cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(2\pi - x))$ کدام است؟

۱ $\cos 2x$

۲ $-\cos 2x$

۳ $1 + \sin 2x$

۴ $1 - \sin 2x$

۶- حاصل عبارت $A = \tan 5x - \cot 5x$ به ازای $(x = -\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱ $-2\sqrt{3}$

۲ $2\sqrt{3}$

۳ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۴ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



۷- مقدار عددی $\cos 22,5^\circ$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

② $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

③ $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

④ $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

۸- اگر $\sin 75^\circ = \frac{(\sqrt{3}+1)a}{4}$ باشد مقدار a^2 چقدر است؟

① $\sqrt{2}$

② ۲

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

۹- اگر $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} = -\tan x$ باشد، زاویه x در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟

① اول یا دوم

② اول یا سوم

③ دوم یا سوم

④ دوم یا چهارم



۱۰- اگر $f(x) = \frac{\tan x}{\tan^2 x - 1}$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ چقدر است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ③ ۱
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۱- مقدار عددی $B = \sqrt{1 + \sin 2^\circ} - \sqrt{1 - \sin 2^\circ}$ کدام است؟

- ① $2 \sin 1^\circ$
 ② $2 \cos 1^\circ$
 ③ $2 \sin 2^\circ$
 ④ $2 \cos 2^\circ$

۱۲- اگر $f(x) = \cot x - \tan x$ و $g(x) = \frac{2}{\tan x + \cot x}$ باشد، مقدار $\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{\pi}{8}\right)$ چقدر است؟

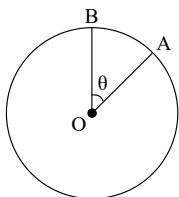
- ① $\sqrt{2}$
 ② $2\sqrt{2}$
 ③ $\frac{1}{\sqrt{8}}$
 ④ ۲

۱۳- جواب کلی معادله $\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x$ کدام است؟

- ① $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
 ② $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
 ③ $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$
 ④ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



۱۴- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵، طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{2}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی θ بر حسب درجه کدام است؟



۱) 10°

۲) 20°

۳) 18°

۴) 36°

۱۵- اگر $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) اول و چهارم

۴) دوم و سوم

۱۶- اگر $\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2}$ حاصل $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$

۲) $-\frac{3}{4}$

۳) $\frac{7}{8}$

۴) $-\frac{7}{8}$

۱۷- اندازه‌ی اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع برابر ۱۲ و ۱۵ است. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی این متوازی‌الاضلاع 150° باشد، مساحت این متوازی‌الاضلاع

چقدر است؟

۱) ۵۴

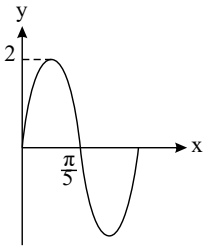
۲) ۷۲

۳) ۹۰

۴) ۱۸۰



۱۸- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = a \sin bx$ است، $|ab|$ کدام است؟



- ۱) ۵
- ۲) ۱۰
- ۳) ۲۰
- ۴) ۲۵

۱۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x - 16 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$
- ۲) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{48}$
- ۳) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$
- ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۲۰- اگر $\tan \frac{\pi}{7} = \alpha$ حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin \frac{8\pi}{7} + 4 \cos \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{13\pi}{7} + \sin \frac{29\pi}{7}}$ بر حسب α کدام است؟

- ۱) $\frac{4\alpha + 3}{7}$
- ۲) $\frac{3\alpha + 4}{2}$
- ۳) $\frac{3\alpha + 4}{\alpha}$
- ۴) $\frac{3\alpha - 4}{\alpha}$

۲۱- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند برابر π است؟

- ۱) ۵
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴



۲۲- مجموع جواب‌های معادله $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

۱) 3π

۲) 5π

۳) 4π

۴) $\frac{13}{3}\pi$

۲۳- به ازای چه مقادیری از a معادله $\tan x + 3a \cot x = 2$ جواب دارد؟

۱) $a \geq 3$

۲) $a \geq \frac{1}{3}$

۳) $a \leq 3$

۴) $a \leq \frac{1}{3}$

۲۴- یکی از ریشه‌های معادله $6 \sin^2 \alpha - 11 \sin \alpha + 4 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{17\pi}{6}$

۲) $\frac{7\pi}{6}$

۳) $\frac{\pi}{7}$

۴) $\frac{13\pi}{7}$

۲۵- معادله $\sin x(4 \cos x - 1) = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۲

۴) ۳



۲۶- مجموع جواب‌های معادله $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

① $\frac{5\pi}{3}$

② $\frac{4\pi}{3}$

③ π

④ $\frac{2\pi}{3}$

۲۷- جواب کلی معادله $\cos^2(6x) = 6 \cos(6x)$ کدام است؟

① $x = \frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$

② $x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$

③ $x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$

④ معادله جواب ندارد.

۲۸- جواب کلی معادله $\sin^2 3x - 2 \sin x - 2 \sin 3x + \sin x \sin 3x = 0$ کدام است؟

① $x = \frac{k\pi}{2}$

② $x = 2k\pi + \frac{k\pi}{2}$

③ $x = k\pi + \frac{k\pi}{2}$

④ $x = 2k\pi + \frac{k\pi}{4}$

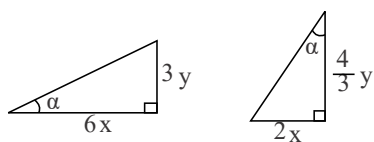
۲۹- با توجه به شکل‌های روبه‌رو حاصل $x^2 + y^2$ چقدر است؟

① $3x^2$

② $3y^2$

③ $4x^2$

④ $5y^2$





۳- اگر $\sin 4x = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ باشد، x برابر کدام مقدار است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

① $\frac{k\pi}{4}$

② $k\pi + \frac{\pi}{4}$

③ $\frac{k\pi}{2}$

④ $k\pi - \frac{\pi}{4}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ با استفاده از فرمول $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ داریم:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

۲ - گزینه ۴ طبق رابطه $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ داریم:

$$1 + \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} \Rightarrow 1 + \frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$$

۳ - گزینه ۳ ابتدا عبارت داخل پرانتز را با مخرج مشترک گیری ساده می کنیم.

$$\frac{a}{1 - \cos \theta} + \frac{-b}{1 + \cos \theta} = \frac{a(1 + \cos \theta) - b(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{a \cos \theta + b \cos \theta + a - b}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{(a + b) \cos \theta + a - b}{\sin^2 \theta}$$

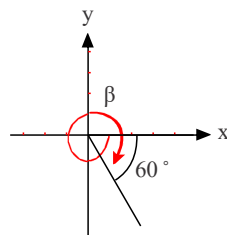
طبق تساوی صورت سؤال داریم:

$$\frac{r \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cos \theta \left(\frac{(a + b) \cos \theta + (a - b)}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$\rightarrow r \cos^2 \theta = (a + b) \cos^2 \theta + (a - b) \cos \theta$$

$$\left. \begin{aligned} (a - b) &= 0 \rightarrow a = b \\ (a + b) &= r \rightarrow a + b = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a \times b = 1$$

چون این تساوی به ازای هر θ برقرار است پس نسبت به θ اتحاد است. یعنی:



۴ - گزینه ۳ با توجه به شکل، زاویه داده شده برابر است با: $\beta = -2\pi - \frac{\pi}{3}$

از طرفی با ساده کردن عبارت داده شده داریم:

$$\frac{r \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{\frac{r \sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \beta}} = r \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = \sin\left(-2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵ - گزینه ۱ می دانیم $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ است.

با ساده کردن اجزای عبارت داده شده داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{و} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x \quad \text{و} \quad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

بنابراین:



$$A = (\cos x + \sin x)(-\sin x + \cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$

$$A = \tan \Delta x - \cot \Delta x = -(\cot \Delta x - \tan \Delta x) = -2 \cot 10x \stackrel{x=10^\circ}{=} -2 \cot \left(\frac{-10^\circ \pi}{6}\right)$$

$$= 2 \cot \frac{5\pi}{3} = 2 \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cot \frac{\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۷ - گزینه ۲ با توجه به فرمول $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ داریم:

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{\cos 45^\circ + 1}{2} \Rightarrow \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{\cos 45^\circ + 1}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 2}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

۸ - گزینه ۲ با توجه به رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ داریم:

$$\cos 15^\circ = 1 - 2 \sin^2(7.5^\circ) \Rightarrow \sin^2(7.5^\circ) = \frac{1 - \cos 15^\circ}{2}, \cos 15^\circ = \cos(18^\circ - 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sin 7.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} = \frac{a(\sqrt{3} + 1)}{4} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow a^2 = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 1)^2}$$

$$= \frac{4(2 + \sqrt{3})}{3 + 1 + 2\sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{2(\sqrt{3} + 1)} = 2$$

۹ - گزینه ۴ می‌دانیم که $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$ و $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ است.

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x| = -\tan x$$

چون حاصل قدر مطلق، قرینه بیرون آمده نتیجه می‌گیریم:

$\tan x < 0 \Rightarrow x$ در ناحیه دوم یا چهارم واقع است.

۱۰ - گزینه ۱ می‌دانیم $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

ابتدا تابع را بر حسب $\tan 2x$ می‌نویسیم.

$$f(x) = \frac{\tan x}{\tan^2 x - 1} = -\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = -\frac{1}{2} \tan 2x$$

پس: $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

۱۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: $(\sin a \pm \cos a)^2 = 1 \pm \sin 2a$

بنابراین:

$$\begin{cases} 1 + \sin 20^\circ = (\sin 10^\circ + \cos 10^\circ)^2 \\ 1 - \sin 20^\circ = (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 \end{cases}$$

$$B = \sqrt{(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ)^2} - \sqrt{(\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2} = \overbrace{|\sin 10^\circ + \cos 10^\circ|}^+ - \overbrace{|\sin 10^\circ - \cos 10^\circ|}^-$$

$$\stackrel{10^\circ < 45^\circ \rightarrow \sin 10^\circ < \cos 10^\circ}{=} \sin 10^\circ + \cos 10^\circ - (-\sin 10^\circ + \cos 10^\circ) = 2 \sin 10^\circ$$



می‌دانیم که $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$ و $\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$f(x) = \cot x - \tan x = 2 \cot 2x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 2 \cot \frac{\pi}{\lambda} = 2(1) = 2$$

$$g(x) = \frac{2}{\tan x + \cot x} = \frac{2}{\frac{2}{\sin 2x}} = \sin 2x \rightarrow g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پس: } \frac{g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x \rightarrow \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x \rightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = \sin x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است.

۱۴ - گزینه ۳ اگر θ بر حسب رادیان و r شعاع دایره و L اندازه‌ی کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ باشد داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \quad \text{رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\pi}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{1} \rightarrow D = 180^\circ$$

۱۵ - گزینه ۱ اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

(*) انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول یا چهارم است. $\cos x \geq 0 \Rightarrow$

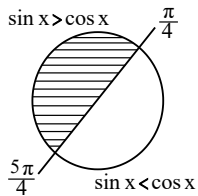
از طرفی:

$$\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$$

چون طرف چپ نامنفی است، پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، در نتیجه:

$$\sin x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت (*) داریم:



\Rightarrow انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول است.

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a, \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sin x - \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{4}$$

از طرفی $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x$ و با کمک فرمول $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\cos 2x = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۱۷ - گزینه ۳ مساحت متوازی‌الاضلاع از حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشان بدست می‌آید.



$$S = 12 \times 15 \times \sin 150^\circ = (12)(15)\left(\frac{1}{2}\right) = 90$$

۱۸ - گزینه ۲ دوره‌ی تناوب توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

در توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع به ترتیب برابر $|a|$ و $-|a|$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \text{ پس: } \frac{2\pi}{5}$$

همچنین با توجه به نمودار، ماکسیمم تابع برابر ۲ است، پس: $|a| = 2$ در نتیجه $|ab| = |a||b| = 10$ است.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 2x - 1 \neq \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$= \underbrace{(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}_{\cos 4x} \underbrace{(\cos^2 2x + \sin^2 2x)}_1 = \cos 4x$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 4x = \cos \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$A = \frac{3 \sin \frac{8\pi}{9} + 4 \cos \frac{6\pi}{9}}{2 \sin \frac{13\pi}{9} + \sin \frac{29\pi}{9}} = \frac{3 \sin(\pi + \frac{\pi}{9}) + 4 \cos(\pi - \frac{\pi}{9})}{2 \sin(2\pi - \frac{\pi}{9}) + \sin(4\pi + \frac{\pi}{9})}$$

$$= \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-2 \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} + \frac{4 \cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}}$$

$$= 3 + 4 \cot \frac{\pi}{9} = 3 + \frac{4}{\tan \frac{\pi}{9}} = 3 + \frac{4}{\alpha} = \frac{3\alpha + 4}{\alpha}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\sin 2x = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Rightarrow \sin 2x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{3} + (2\pi - \frac{\pi}{3}) = 5\pi$$

۲۲ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ است.

بنابراین:

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \cos x = 0 \xrightarrow{} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\tan x + 3a \cot x = 2 \Rightarrow \tan x + \frac{3a}{\tan x} = 2$$

$$\xrightarrow{\tan x \neq 0} \frac{\tan^2 x + 3a}{\tan x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 3a = 0$$

$$\xrightarrow{\tan x = m} m^2 - 2m + 3a = 0 \rightarrow \Delta \geq 0 \text{ شرط وجود جواب آن است که } \Delta \geq 0$$



$$\Rightarrow 4 - 4(3a) \geq 0 \Rightarrow 1 - 3a \geq 0 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

دقت کنید که معادله $\tan x = m$ همواره دارای جواب است.

۲۴ - گزینه ۱ اگر $\sin \alpha = t$ فرض شود داریم:

$$6t^2 - 11t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 121 - 96 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{11+5}{12} = \frac{4}{3} > 1 \text{ امکان ندارد.} \\ \sin \alpha = \frac{11-5}{12} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots \end{cases} \end{cases}$$

۲۵ - گزینه ۲

$$\sin x(4 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \text{یا} \\ 4 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} = \cos(\alpha) \end{cases}$$

اگر α زاویه ای حاده فرض شود که $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$ باشد بنابراین معادله $\cos x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۲ جواب به صورت $x = \alpha$ و $x = 2\pi - \alpha$ خواهد بود. در نهایت معادله داده شده دارای ۵ جواب در فاصله $[0, 2\pi]$ می باشد.

۲۶ - گزینه ۱

می دانیم: $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

$$\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

جوابهای واقع در بازه $[0, 2\pi]$ بصورت زیر است.

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{5\pi}{3}$$

۲۷ - گزینه ۳

$$\cos^2(6x) - 6 \cos(6x) = 0 \Rightarrow \cos(6x)(\cos 6x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 6x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 6x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \\ \cos 6x = 6 \rightarrow \text{امکان ندارد.} \end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۱

$$\underbrace{\sin^2 3x - 2 \sin 3x - 2 \sin x + \sin x \sin 3x}_{\sin 3x(\sin 3x - 2) + \sin x(\sin 3x - 2)} = 0 \rightarrow \sin 3x(\sin 3x - 2) + \sin x(\sin 3x - 2) = 0$$

$$\rightarrow (\sin 3x - 2)(\sin 3x + \sin x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 2 > 1 \text{ امکان ندارد.} \\ \sin 3x = -\sin x = \sin(-x) \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi + x \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

جوابهای $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ توسط $x = \frac{k\pi}{2}$ تولید می شوند، پس جواب کلی بصورت $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

۲۹ - گزینه ۳ چون زاویه مشخص شده در هر دو مثلث برابر α است، بنابراین تانژانت زاویه α در دو مثلث برابر است. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{3y}{6x} \\ \tan \alpha = \frac{2x}{4} = \frac{2x}{4} \rightarrow \frac{3y}{6x} = \frac{2x}{4} \rightarrow 12x^2 = 4y^2 \rightarrow 3x^2 = y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 \end{cases}$$



۳۰ - گزینه ۱ دو زاویه $(\alpha + \frac{\pi}{6})$ و $(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ متمم یکدیگرند، زیرا:

$$(\frac{\pi}{6} + \alpha) + (\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{پس: } \sin 4x = \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) - \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

توجه کنید که وقتی $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \alpha = \sin \beta$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۱
۲ - ۴	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۴	۲۸ - ۱
۴ - ۳	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۱	۱۰ - ۱	۱۵ - ۱	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱