

علی هاشمی

۱- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

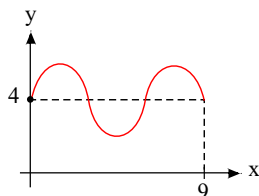
① $-\frac{3}{4}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{3}{2}$

۲- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2m + \sin n\pi x$ است. مقدار mn کدام است؟



① $\frac{4}{3}$

② $-\frac{2}{3}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $\frac{2}{3}$

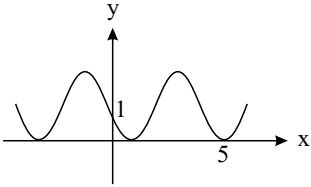
۳- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

① $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

② $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

③ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

④ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{2} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

- ① صفر
- ② ۱٫۵
- ③ ۱
- ④ ۰٫۵

۵- حاصل $\tan^4 \frac{\pi}{8} - \cot^4 \frac{\pi}{8}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ① ۱۲
- ② -۱۲
- ③ ۲۴
- ④ -۲۴

۶- مجموع ریشه‌های معادله $(\sqrt{5} \sin x - 8)(3 \sin x + 1)(5 \cos x - 2) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند برابر π است؟

- ① ۵
- ② ۶
- ③ ۳
- ④ ۴

۷- اگر جواب معادله مثلثاتی $2 \cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر i کدام است؟

- ① $\{1, 2, 0\}$
- ② $\{0, 1\}$
- ③ $\{1, 2, 3\}$
- ④ $\{1, 2\}$

۸- معادله $\cos^6 x - \sin^6 x = 1 - \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ① ۲
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ ۵



۹- اگر $\sin^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{3} + \sin^4 x$ ، آن گاه مقدار مثبت $\tan x$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\sqrt{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

۱۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sin x(\sin x + 1) + \cos x + \frac{\sin^2 x}{2} = -\cos^2 x$ در بازه‌ی $[0, 3\pi]$ ، چند برابر π است؟

① ۵

② ۵٫۲۵

③ ۵٫۵

④ ۵٫۷۵

۱۱- جواب کلی معادله‌ی $\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x$ کدام است؟

① $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

② $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

③ $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

④ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۲- معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin 2x + 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۵



۱۳- اگر $\cot 10^\circ = m$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin 190^\circ + 5 \sin 100^\circ}{4 \sin 730^\circ - \cos 370^\circ}$ کدام است؟

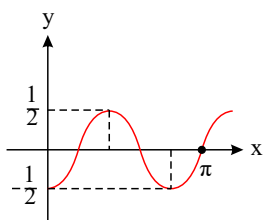
① $\frac{-3 - 5m}{4 + m}$

② $\frac{-3 + 5m}{4 - m}$

③ $\frac{3 - 5m}{4 + m}$

④ $\frac{3 + 5m}{2 + 2m}$

۱۴- اگر نمودار تابع $f(x) = a \cos bx$ به شکل روبه‌رو باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟



① -۳

② $-\frac{3}{2}$

③ -۲

④ -۴

۱۵- اگر $\tan x - \cot x = 5$ ، حاصل عبارت $A = 2 \cot 2x + 5 \tan 2x$ کدام است؟

① -۱۴

② -۱۲

③ -۱۰

④ -۷

۱۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 3x - 3 \cos 3x + 2 = 0$ (که $k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

① $x = \frac{2k\pi}{3}$

② $x = \frac{k\pi}{3}$

③ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

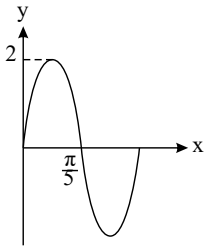
④ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$



۱۷- اندازه‌ی اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع برابر ۱۲ و ۱۵ است. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی این متوازی‌الاضلاع 150° باشد، مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

- ۱) ۵۴
- ۲) ۷۲
- ۳) ۹۰
- ۴) ۱۸۰

۱۸- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = a \sin bx$ است، $|ab|$ کدام است؟



- ۱) ۵
- ۲) ۱۰
- ۳) ۲۰
- ۴) ۲۵

۱۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x - 16 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$
- ۲) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{48}$
- ۳) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$
- ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۲۰- اگر $\tan \frac{\pi}{\gamma} = \alpha$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin \frac{8\pi}{\gamma} + 4 \cos \frac{6\pi}{\gamma}}{2 \sin \frac{13\pi}{\gamma} + \sin \frac{29\pi}{\gamma}}$ بر حسب α کدام است؟

- ۱) $\frac{4\alpha + 3}{\gamma}$
- ۲) $\frac{3\alpha + 4}{2}$
- ۳) $\frac{3\alpha + 4}{\alpha}$
- ۴) $\frac{3\alpha - 4}{\alpha}$



۲۱- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند برابر π است؟

- ۱) ۵
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۲۲- اگر $\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$
- ۲) $-\frac{3}{4}$
- ۳) $\frac{7}{8}$
- ۴) $-\frac{7}{8}$

۲۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi) = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ کدام است؟

- ۱) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
- ۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- ۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
- ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۲۴- اگر $\cot 5^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin 185^\circ - 4 \cos 175^\circ}{5 \sin 275^\circ + \cos 635^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{-3 + 4a}{-5a + 1}$
- ۲) $\frac{3 - 4a}{1 - 5a}$
- ۳) $\frac{3 - 4a}{1 + 5a}$
- ۴) $\frac{3 + 4a}{-1 - 5a}$



۲۵- اگر $f(x) = \sin^2 x - 1$ و $g(x) = x^2 + x$ ، مقدار تابع $y = g \circ f(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ چقدر است؟

۱) $2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-2}$

۲) $2^{-\frac{9}{2}} - 2^{-3}$

۳) $2^{-\frac{7}{2}} - 2^{-3}$

۴) $2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-3}$

۲۶- مجموعه جواب معادله $\sin^2 x + 4 = [|x| + 3] + [-|x| + 1]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

۱) ۱

۲) صفر

۳) ۳

۴) بی شمار

۲۷- جواب کلی معادله $\log_3^2 \times \log_6^2 = \frac{\sin^2 2x \cos^2 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$ کدام است؟

۱) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{32}$

۲) $x = \frac{k\pi}{16} + \frac{\pi}{4}$

۳) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۴) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

۲۸- اگر $\sin x > 0$ و $\cot x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیهی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم



۲۹- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ مقدار عبارت $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{4} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- ۱) ۵
- ۲) ۱
- ۳) -۳
- ۴) -۴

۳۰- اگر $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$ ، آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) صفر
- ۲) -۱
- ۳) $\frac{1}{2}$
- ۴) $-\frac{1}{2}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) = -2 \left(\frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{2}$$

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم که دوره‌ی تناوب تابع $y = k \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$\text{باتوجه به شکل: } \begin{cases} f(0) = 4 \rightarrow 2m = 4 \rightarrow m = 2 \\ T + \frac{T}{2} = 9 \rightarrow 2T + T = 18 \rightarrow 3T = 18 \rightarrow T = 6 \end{cases}$$

$$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|n\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|n|} = 6 \rightarrow |n| = \frac{1}{3} \rightarrow n = \pm \frac{1}{3}$$

چون نمودار در همسایگی $x = 0$ صعودی است پس فقط $n = \frac{1}{3}$ قابل قبول است بنابراین $mn = \frac{2}{3}$ است.

۳ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$2 \sin^2 x = 3 \cos x \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \text{ امکان ندارد زیرا } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ است.} \end{cases}$$

۴ - گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

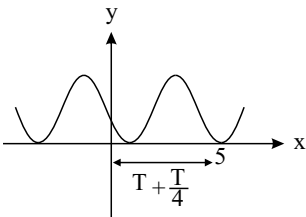
$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



چون بلافاصله بعد از محور y ها نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

۵ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}$, $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\pi}{\lambda} - \cot^2 \frac{\pi}{\lambda} &= \left(\tan^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cot^2 \frac{\pi}{\lambda} \right) \left(\tan^2 \frac{\pi}{\lambda} - \cot^2 \frac{\pi}{\lambda} \right) \\ &= \left(\left(\tan \frac{\pi}{\lambda} + \cot \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - 2 \tan \frac{\pi}{\lambda} \cot \frac{\pi}{\lambda} \right) \left(\tan \frac{\pi}{\lambda} + \cot \frac{\pi}{\lambda} \right) \left(\tan \frac{\pi}{\lambda} - \cot \frac{\pi}{\lambda} \right) \end{aligned}$$



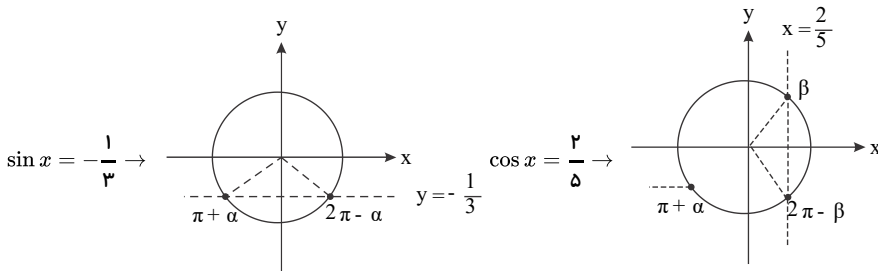
$$= \left(\left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)^2 - 2 \right) \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} \right) (-2 \cot \frac{\pi}{4})$$

$$= \left(\left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2 - 2 \right) \left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) (-2(1)) = (6) \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) (-2) = \frac{-24}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -24\sqrt{2}$$

که جواب حاصل ۲۴- برابر $\sqrt{2}$ است.

۶- گزینه ۱

$$(\sqrt{3} \sin x - 1)(3 \sin x + 1)(5 \cos x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} > 1 \text{ غ قی} \\ 3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \\ 5 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

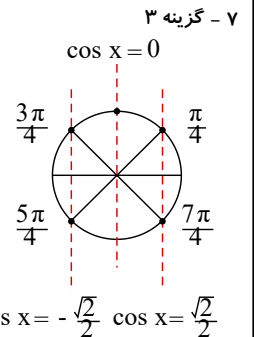


پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$(\pi + \alpha) + (2\pi - \alpha) + \beta + (2\pi - \beta) = 5\pi$$

$$2 \cos^2 x = \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{5\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{7\pi}{4}$ دارد بنابراین مجموعه مقادیر i را می‌توان به صورت $\{1, 2, 3\}$ در نظر گرفت.

۸- گزینه ۴ می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin 2x \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin 2x$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin 2x \rightarrow \sin 2x = 1 - \cos 2x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

۹- گزینه ۱ می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$, $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \frac{1}{3} + \sin^2 x \xrightarrow{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x} \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$$



$$\rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

از طرفی: $\cos^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = 3 - 3\tan^2 x$

$$\rightarrow 3\tan^2 x = 2 \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\sin x(\sin x + 1) + \cos x + \frac{\sin 2x}{2} = -\cos^2 x$$

$$\rightarrow \sin^2 x + \sin x + \cos x + \frac{2 \sin x \cos x}{2} + \cos^2 x = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \sin x + \cos x} + \underbrace{\sin x \cos x + \cos^2 x} = 0$$

$$\rightarrow 1 + \sin x + \underbrace{\cos x + \sin x \cos x} = 0 \rightarrow 1 + \sin x + \cos x(1 + \sin x) = 0$$

$$\rightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi, 2\pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها در بازه‌ی خواسته شده} = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2\pi = \frac{11\pi}{2} = 5,5\pi$$

۱۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$

$$\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x \rightarrow \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x \rightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = \sin x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است.

۱۲ - گزینه ۴ می‌دانیم: $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a, \sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\cos 2x = \sin 2x + 1 \rightarrow 1 - \cos 2x + \sin 2x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} & k=0,1,2 \\ \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ x = k\pi + \alpha \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1,2} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

۱۳ - گزینه ۲

$$A = \frac{3 \sin 19^\circ + 5 \sin 10^\circ}{3 \sin 73^\circ - \cos 37^\circ} = \frac{3 \sin(18^\circ + 1^\circ) + 5 \sin(9^\circ + 1^\circ)}{3 \sin(72^\circ + 1^\circ) - \cos(36^\circ + 1^\circ)}$$

$$= \frac{-3 \sin 1^\circ + 5 \cos 1^\circ}{3 \sin 1^\circ - \cos 1^\circ} \xrightarrow{\div \sin 1^\circ} \frac{-3 + 5 \cot 1^\circ}{3 - \cot 1^\circ} = \frac{-3 + 5m}{3 - m}$$

۱۴ - گزینه ۱ توجه کنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$f(0) = \frac{-1}{2} \rightarrow a \cos 0 = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

اگر دوره‌ی تناوب تابع T را بنامیم در این صورت $T + \frac{T}{4} = \pi$ است پس $T = \frac{4\pi}{5}$.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{5} \rightarrow |b| = \frac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} a+b=2 \\ b = -\frac{5}{2} \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} a+b=-3 \end{cases}$$



بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر ۳- است.

۱۵ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$

$$\tan x - \cot x = 5 \rightarrow \cot x - \tan x = -5 \rightarrow 2 \cot 2x = -5 \rightarrow \cot 2x = -\frac{5}{2} \rightarrow \tan 2x = -\frac{2}{5}$$

$$A = 2 \cot 2x + 5 \tan 2x = 2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5\left(-\frac{2}{5}\right) = -5 - 2 = -7$$

۱۶ - گزینه ۱

$$\cos^2 3x - 3 \cos 3x + 2 = 0 \rightarrow (\cos 3x - 1)(\cos 3x - 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi} 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ \cos 3x = 2 \quad (-1 \leq \cos 3x \leq 1) \quad \text{غقق} \end{cases}$$

۱۷ - گزینه ۳ مساحت متوازی‌الاضلاع از حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشان بدست می‌آید.

$$S = 12 \times 15 \times \sin 150^\circ = (12)(15)\left(\frac{1}{2}\right) = 90$$

۱۸ - گزینه ۲ دوره‌ی تناوب توابع $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

در توابع $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع به ترتیب برابر $|a|$ و $-|a|$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \quad \text{پس: } \frac{2\pi}{5} \text{ دوره‌ی تناوب تابع برابر است، پس:}$$

همچنین با توجه به نمودار، ماکسیمم تابع برابر ۲ است، پس: $|a| = 2$ در نتیجه $|ab| = |a| |b| = 10$ است.

۱۹ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 2x - 16 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$= (\cos^2 2x - \sin^2 2x) (\cos^2 2x + \sin^2 2x) = \cos 4x$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 4x = \cos \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$A = \frac{3 \sin \frac{8\pi}{9} + 4 \cos \frac{6\pi}{9}}{2 \sin \frac{13\pi}{9} + \sin \frac{29\pi}{9}} = \frac{3 \sin(\pi + \frac{\pi}{9}) + 4 \cos(\pi - \frac{\pi}{9})}{2 \sin(2\pi - \frac{\pi}{9}) + \sin(4\pi + \frac{\pi}{9})}$$

$$= \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-2 \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} + \frac{4 \cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}}$$

$$= 3 + 4 \cot \frac{\pi}{9} = 3 + \frac{4}{\tan \frac{\pi}{9}} = 3 + \frac{4}{\alpha} = \frac{3\alpha + 4}{\alpha}$$

۲۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\sin 2x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \sin 2x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{3} + \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 5\pi$$

۲۲ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$

$$\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sin x - \sin x = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow -\sqrt{2} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

از طرفی $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) = \cos 2x$ و با کمک فرمول $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\cos 2x = 1 - 2(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

۲۳ - گزینه ۲

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + x) \cdot \cos(x - 2\pi) = \sin^2 \frac{5\pi}{2} \rightarrow \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) \cdot \cos(2\pi - x) = \sin^2(\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow \cos x \cdot \cos x = (-\sin \frac{\pi}{2})^2 \rightarrow \cos^2 x = (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

که با این جواب‌های بدست آمده، گزینه‌ی دوم صحیح است.

۲۴ - گزینه ۱ سعی کنید تمام زوایا را برحسب 5° بنویسید.

$$A = \frac{\sqrt{3} \sin 18^\circ - \sqrt{2} \cos 17^\circ}{5 \sin 27^\circ + \cos 63^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin(18^\circ + 5^\circ) - \sqrt{2} \cos(18^\circ - 5^\circ)}{5 \sin(27^\circ + 5^\circ) + \cos(36^\circ + 27^\circ + 5^\circ)}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} \sin 5^\circ + \sqrt{2} \cos 5^\circ}{-\sqrt{2} \cos 5^\circ + \sin 5^\circ} \div \sin 5^\circ = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2} \cot 5^\circ}{-\sqrt{2} \cot 5^\circ + 1} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}a}{-\sqrt{2}a + 1}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

۲۵ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) = \underbrace{(\sin^2 x - 1)}_{-\cos^2 x} + \sin^2 x - 1 = \cos^2 x - \cos^2 x$$

$$\rightarrow y = \cos^2 x \underbrace{(\cos^2 x - 1)}_{-\sin^2 x} = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2 = -(\frac{1}{2} \sin 2x)^2$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{4} \sin^2 2x = -\frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = -\frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$$

$$\rightarrow y(\frac{\pi}{16}) = -\frac{1}{8} (1 - \cos \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{8} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{-1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = -\sqrt{2}^{-3} + \sqrt{2}^{-\frac{5}{2}}$$

$$f(x) \in \mathbb{Z} \rightarrow [f(x)] + [-f(x)] = 0, [x+k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$$

چون تعداد جواب‌های صحیح معادله را می‌خواهیم پس فرض می‌کنیم $x \in \mathbb{Z}$ است.

$$[-|x| + 1] + [|x| + 3] = 4 + \sin^2 x \rightarrow [-|x|] + 1 + [|x|] + 3 = 4 + \sin^2 x$$

$$\rightarrow \underbrace{[-|x|] + [|x|]}_{\text{صفر}} + 4 = 4 + \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0$$

حالت خاص $\rightarrow x = k\pi \rightarrow$ تنها جواب صحیح برابر $x = 0$ است.

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u, \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a, \log_{k^n}^a = \frac{1}{n} \log_k^a$$

۲۷ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\frac{\sin 2x \cos 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \times \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin 4x}{\cos 4x} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \tan 4x = \frac{1}{2} \rightarrow \tan 4x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۲۸ - گزینه ۲ در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی مقادیر سینوس، مثبت و مقادیر کتانژانت منفی است.

۲۹ - گزینه ۱

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}$$



$$= \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \div \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha - 1} = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = 5$$

۳۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \rightarrow \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 1 = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 2\cos^2 x = 2 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۱	۲۶ - ۱
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۴	۹ - ۱	۱۴ - ۱	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۲