



علی هاشمی

۱- خلاصه شده عبارت $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ کدام است؟

- ① $-\sin 2\alpha$
- ② $\sin 2\alpha$
- ③ $\cos 2\alpha$
- ④ 0

۲- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟

- ① $x = k\pi$
- ② $x = 2k\pi + \pi$
- ③ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
- ④ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ به کدام صورت است؟

- ① $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- ② $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- ③ $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ④ $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$



۴- حاصل عبارت $\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7,5^\circ$ کدام است؟

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{16}$

۵- اگر انتهای کمان α در ناحیه اول باشد، عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

① $-\tan \alpha$

② $-\cot \alpha$

③ $\tan \alpha$

④ $\cot \alpha$

۶- جواب کلی معادلهی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

① $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

② $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

③ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

④ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۷- مقدار $\tan 195^\circ - \tan 105^\circ$ برابر کدام است؟

① ۲

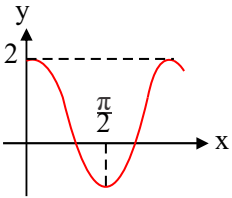
② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}$

④ ۴



۸- اگر نمودار تابع $y = a \cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a + b$ ممکن است؟



- ۱) ۳
- ۲) ۲
- ۳) ۶
- ۴) ۴

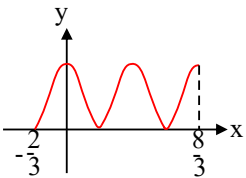
۹- حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$
- ۲) $\frac{1}{4}$
- ۳) $-\frac{1}{4}$
- ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{2k\pi}{5}$
- ۲) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{5}$
- ۳) $x = (2k - 1)\frac{\pi}{5}$
- ۴) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{5}$

۱۱- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 3 + a \cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + 2b)$ برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟



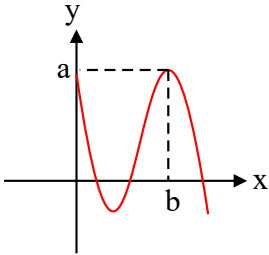
- ۱) ۳
- ۲) -۳
- ۳) -۶
- ۴) ۶



۱۲- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2-m}{m+1}$ باشد $|x| < \frac{\pi}{4}$ حدود تغییرات m چگونه است؟

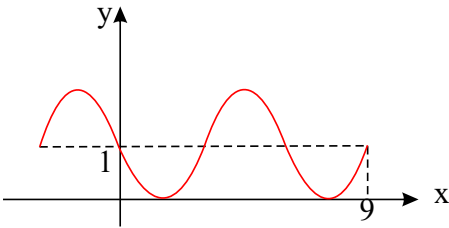
- ① $m < -1$
- ② $m > 2$
- ③ $-1 < m < 2$
- ④ $m < -1$ یا $m > 2$

۱۳- اگر نمودار $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ به شکل مقابل باشد، دوتایی (a, b) کدام گزینه خواهد بود؟



- ① $(2, 2\pi)$
- ② $(1, 2\pi)$
- ③ $(2, \pi)$
- ④ $(1, \pi)$

۱۴- نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + \cos\left(-\frac{1}{2} + bx\right)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(29)$ کدام است؟



- ① $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ② $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{3}{2}$

۱۵- تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- ① ۵
- ② ۷
- ③ ۳
- ④ ۴



۱۶- یکی از جواب‌های کلی معادله‌ی $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

① $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

② $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

③ $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$

④ $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۷- در یک دایره، توسط اضلاع زاویه مرکزی θ ، کمانی به طول نصف شعاع دایره بریده شده است. θ چند درجه است؟

① $\frac{1}{2}$

② ۱

③ $\frac{90}{\pi}$

④ $\frac{180}{\pi}$

۱۸- جواب کلی معادله‌ی $\cos^3 x + \cos^3 2x = 2$ کدام است؟

① $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

② $x = k\pi + \frac{\pi}{8}$

③ $x = 2k\pi$

④ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{16}$

۱۹- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ ، کدام است؟

① $-\frac{16}{9}$

② $-\frac{9}{16}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{16}{9}$



۲۰- جواب کلی معادله‌ی $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1$ کدام است؟

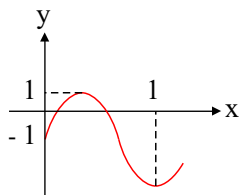
① $x = 2k\pi$

② $x = \frac{k\pi}{2}$

③ $x = k\pi$

④ $x = \frac{k\pi}{3}$

۲۱- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



① $2,5$

② 3

③ $3,5$

④ 4

۲۲- اگر $\cot \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ عبارت کدام است؟

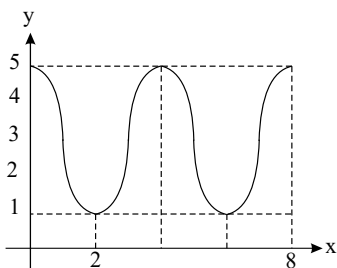
① $\frac{3}{4}$

② $\frac{9}{16}$

③ $\frac{6}{7}$

④ $\frac{2}{3}$

۲۳- نمودار معادله‌ی $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل زیر است؛ حاصل $a + b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

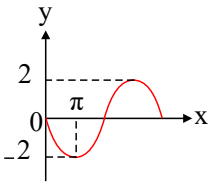


① $\frac{5}{2}$

② $\frac{7}{2}$

③ $\frac{9}{2}$

④ 1

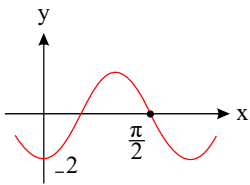


۲۴- اگر نمودار تابع با ضابطه ی $y = b \cos\left(\frac{3\pi}{2} + ax\right)$ به صورت زیر باشد، کدام است؟ ($a > 0$)

- ۱) -۲
- ۲) -۱
- ۳) $-\frac{3}{2}$
- ۴) ۱

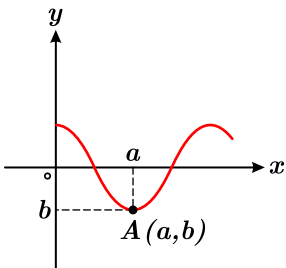
۲۵- نقطه ی $A(0, 1)$ ، روی دایره ی مثلثاتی به اندازه ی $\frac{13\pi}{4}$ رادیان در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کند تا به نقطه ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه ی A' کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) $\sqrt{2}$
- ۳) $-\sqrt{2}$
- ۴) $2\sqrt{2}$



۲۶- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$
- ۲) $2\sqrt{2}$
- ۳) $-\sqrt{2}$
- ۴) $-2\sqrt{2}$



۲۷- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - 2\sin^2 x$ به صورت زیر باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱) π
- ۲) $-\pi$
- ۳) $\frac{\pi}{2}$
- ۴) $-\frac{\pi}{2}$



۲۸- معادله‌ی $\frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = 8$ چند جواب در فاصله‌ی $[0, \pi]$ دارد؟

- ① صفر
- ② ۱
- ③ ۲
- ④ ۳

۲۹- دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ کدام است؟

- ① 2π
- ② π
- ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ $\frac{\pi}{4}$

۳۰- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$
- ② $-\frac{3}{8}$
- ③ $\frac{3}{8}$
- ④ $\frac{3}{4}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\text{می‌دانیم: } \sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) = \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

۲ - گزینه ۲

$$2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - A - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ \cos x = \frac{3}{2} > 1 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \end{cases}$$

۳ - گزینه ۴

روش اول:

$$\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

روش دوم: اگر به k صفر دهیم گزینه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ جواب $x = \frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است (چون مخرج را صفر می‌کند) پس گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

۴ - گزینه ۴

$$\text{می‌دانیم: } \sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin \sqrt{5} \cos \sqrt{5} (1 - 2 \sin^2 \sqrt{5}) = \frac{1}{2} \sin 10 \times \cos 10 = \frac{1}{4} \sin 20 = \frac{1}{8}$$

۵ - گزینه ۴

$$\text{می‌دانیم: } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow{\text{در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

۶ - گزینه ۳

$$2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \end{cases}$$



$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

۷ - گزینه ۴

$$\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \text{ می دانیم:}$$

$$\tan 195 - \tan 105 = \tan(\pi + 15) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + 15\right) = \tan 15 + \cot 15 = \frac{2}{\sin 30} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۸ - گزینه ۴ می دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(0, 2)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cos 0 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a + b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۹ - گزینه ۲

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \text{ می دانیم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۱۰ - گزینه ۳

$$\cos 3x + \cos 2x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos 2x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ x=2k\pi-\alpha \rightarrow 3x = 2k\pi - \pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = (2k-1)\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

گزینه‌ی سوم صحیح است این گزینه جواب‌های $x = (2k+1)\pi$ را هم شامل می‌شود.

۱۱ - گزینه ۴ یادآوری: دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که، نمودار داده شده در بازه‌ی $[-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$ به تعداد ۲٫۵ مرتبه تکرار شده است، لذا اگر دوره‌ی تناوب این تابع را T فرض کنیم داریم:

$$2,5T = \frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2,5T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \quad (1)$$

با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$y_1 = \cos(b\pi x) \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \quad (2)$$

همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ است. لذا:

$$\xrightarrow{(2)} f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3 + a \cos\left(\pm \frac{3}{2}\pi \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 3 + a \cos(\pm\pi) = 3 - a = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + 2b = 3 + 2\left(\pm \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 6 \end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۳ ابتدا حدود کمان تانژانت را بدست می‌آوریم.

$$|x| < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

یعنی کمان تانژانت در ناحیه‌ی اول قرار دارد و در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی تانژانت مثبت است یعنی:

$$\frac{2-m}{m+1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|cccc} m & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & - & + & - \end{array} \rightarrow -1 < m < 2$$

۱۳ - گزینه ۴ تابع $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ برابر است با $y = \cos 2x$ با توجه به نمودار، مقدار a به ازای $x = 0$ در تابع موردنظر به دست می‌آید:

$$y = \cos 2x \xrightarrow{x=0} y = \cos 2(0) = \cos 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی در $x = b$ دوباره مقدار y به $a = 1$ می‌رسد.



$$f(b) = 1 \rightarrow \cos 2b = 1 \rightarrow \begin{cases} 2b = 0 \rightarrow b = 0 \\ 2b = 2\pi \rightarrow b = \pi \end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$\text{می دانیم: } y = \sin ax \xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$y = a + \cos\left(-\frac{1}{2} + bx\right)\pi \rightarrow y = a + \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \pi bx\right)$$

$$\xrightarrow{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha} \rightarrow y = a + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi bx\right) \rightarrow y = a + \sin \pi bx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \frac{3}{2}T = 9 \rightarrow T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می کند، بنابراین ضریب کمان سینوس باید منفی باشد پس $b = -\frac{1}{3}$ است.

$$f(x) = a + \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = a + 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(29) = 1 - \sin \frac{29\pi}{3} = 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۵ - گزینه ۱

$$\text{می دانیم: } \begin{cases} (\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x \rightarrow 1 + \sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$\rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x = 2k\pi + \alpha} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{11\pi}{12} \\ \xrightarrow{x = 2k\pi + \pi - \alpha} 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

پس معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای پنج جواب است.

$$\text{۱۶ - گزینه ۳ می دانیم: } \begin{cases} \sin 2a = 2\sin a \cos a \\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$$

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \rightarrow 1 + \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0 \rightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin x + \cos x = 0 &\rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x = k\pi + \alpha} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 1 + 2\cos x = 0 &\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right.$$

۱۷ - گزینه ۳ اگر یک زاویه‌ی مرکزی θ در دایره‌ای به شعاع r ، کمانی به طول L ایجاد کند در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ی θ برحسب رادیان برابر $\frac{L}{r}$ است.

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

اگر اندازه‌ی یک زاویه را برحسب درجه با D و برحسب رادیان با R نشان دهیم داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow D = \left(\frac{90}{\pi}\right)^\circ$$

۱۸ - گزینه ۳ با توجه به آنکه $-1 \leq \cos u \leq 1$ است از معادله‌ی داده شده، نتیجه می گیریم: (هر دو جمله باید با هم برابر و مساوی ۱ باشند).

$$\left\{ \begin{aligned} \text{حالت خاص} \\ \cos x = 1 &\rightarrow x = 2k\pi \\ \text{حالت خاص} \\ \cos 2x = 1 &\rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ x = 2k\pi \end{aligned} \right.$$

بنابراین جواب کلی این معادله، $x = 2k\pi$ است. (جواب‌های حاصل از $x = k\pi$ در $x = 2k\pi$ وجود دارند)

۱۹ - گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را برحسب 15° می نویسیم:

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \end{aligned}$$



$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = \frac{1,28}{-0,72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه:

۲۰ - گزینه ۴

$$\text{می‌دانیم: } \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

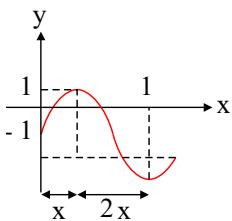
$$\cos 4x + 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$x=2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 4x = 2k\pi - 2x \rightarrow 6x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های $x = k\pi$ همگی در $x = \frac{k\pi}{3}$ قرار دارند بنابراین جواب کلی معادله $x = \frac{k\pi}{3}$ است.

$$21 - \text{گزینه ۳ می‌دانیم: } y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

نکته: در منحنی‌های متناوب دو برابر فاصله‌ی طولی ماکسیمم و مینیمم، طول دوره‌ی تناوب آن تابع است.



باتوجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع برابر $4x$ می‌باشد $3x = 1$ است، پس $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $T = 4x = \frac{4}{3}$ خواهد بود. از ضابطه

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \text{ برابر } T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \text{ به دست می‌آید:}$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $b = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{1}{3}$ برابر ۱ است بنابراین همین عدد برای b صحیح است.

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

توجه کنید که اگر $b = -\frac{3}{2}$ باشد به طور مشابه $a = -2$ به دست می‌آید که $a + b = -\frac{7}{2}$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

۲۲ - گزینه ۲ باتوجه به $\cot \alpha = 2$ یک رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ بدست می‌آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی $2 \sin \alpha$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + (2 \sin \alpha)^4 \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha (2 \sin \alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha + 16 \sin^5 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \times 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + 16 \sin^6 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9 \sin^4 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9}{16}$$

۲۳ - گزینه ۱

$$\left. \begin{matrix} \circ \\ \delta \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{تابع}]{\text{صندوق در}} \delta = a(1) + 3 \rightarrow a + 3 = \delta \Rightarrow a = 2$$

طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ در گزینه‌ها نیست}$$

دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin x$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

۲۴ - گزینه ۲ می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$ بنابراین $y = b \sin ax$ است.



از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره‌ی تناوب تابع برابر است با 4π در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار $f(\pi) = -2$ می‌باشد.

$$f(\pi) = b \sin a\pi \xrightarrow{a = \frac{1}{2}} b \sin \frac{\pi}{2} = b = -2 \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

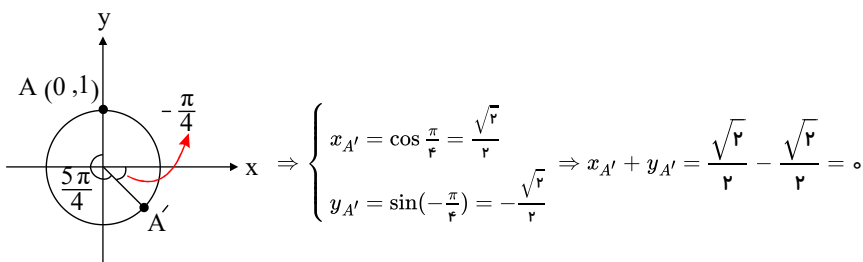
۲۵ - گزینه ۱ اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه‌ی دوران برابر است با:

$$\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

با دوران به اندازه‌ی 2π ، نقطه‌ی A به موقعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، پس کافیسیت نقطه‌ی A را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{4}$ دوران دهم تا نقطه‌ی

A' به دست آید.

مطابق شکل داریم:



۲۶ - گزینه ۳

$$f(x) = a \sin(\frac{\pi}{2} + bx) \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha} f(x) = a \cos bx$$

نمودار تابع از نقطه‌ی $(-\pi, 0)$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{matrix} 0 \\ -\pi \end{matrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a \cos 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3$$

$$\text{پس: } f(x) = -2 \cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} f(x) = -2 \cos 3x \rightarrow f(\frac{\pi}{12}) = -2 \cos \frac{\pi}{4} = -2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

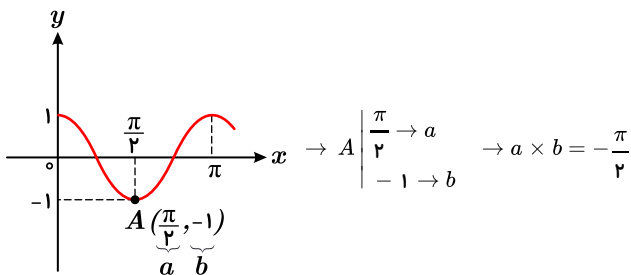
۲۷ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم: $y = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y = \cos ax$ از رابطه‌ی $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید و Max تابع $y = \cos 2x$ برابر ۱ و Min آن برابر -۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi, \quad Max = 1, \quad Min = -1$$

شکل تابع را رسم کرده و مختصات نقطه‌ی A را پیدا می‌کنیم:



۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}, \quad \sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$



$$\frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = \lambda \rightarrow \frac{2}{\sin x} = \lambda \rightarrow \frac{2}{\underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2} \sin 2x} \cos 2x} = \lambda \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x} = \lambda$$

$$\rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\sin 2x} = \lambda \rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \text{معادله در بازه } [0, \pi] \text{ دارای دو جواب است.}$$

۲۹ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$$

دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2b}{|b|}$ است بنابراین دوره‌ی تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ است.

۳۰ - گزینه ۱ می‌دانیم: $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۴	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۴	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱