



علی هاشمی

۱- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟

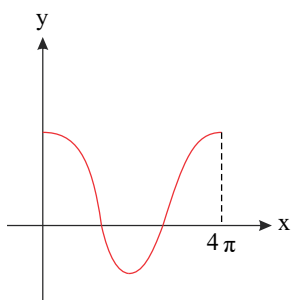
① $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

② $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

③ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

④ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ ۱

④ صفر

۳- حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

① ۲

② $\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$



۴- جواب کلی معادلهی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

① $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

② $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

③ $x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

④ $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

۵- جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

① $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

② $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

③ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

④ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۶- جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

① $x = \frac{k\pi}{4}$

② $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

③ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

④ $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۷- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

① ۵

② ۱

③ -۳

④ -۴



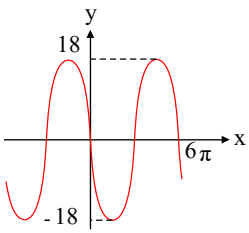
۸- جواب کلی معادلهی مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

① $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

② $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

③ $x = k\pi - \frac{\pi}{8}$

④ $x = k\pi + \frac{\pi}{8}$



۹- نمودار تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت مقابل است. کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

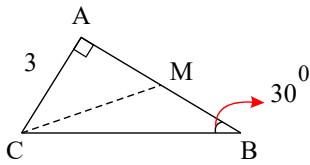
① $\frac{53}{3}$

② -19

③ -17

④ $-\frac{53}{3}$

۱۰- در شکل زیر، $AC = 3$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$. اگر M وسط AB باشد، مساحت مثلث MBC کدام است؟



① $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

② $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$



۱۱- اگر $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{4 \sin x}$ حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

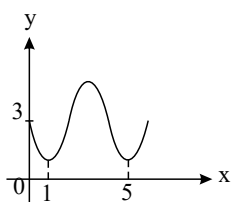
① $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

② $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $1 - \sqrt{2}$

۱۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



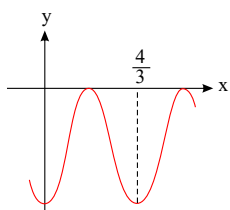
① ۲

② ۲٫۵

③ ۳

④ ۳٫۵

۱۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



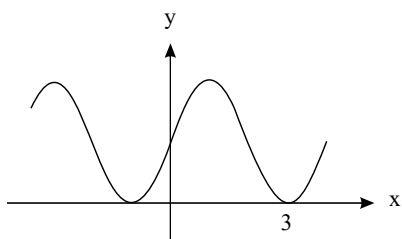
① $\frac{3}{2}$

② ۳

③ $\frac{5}{2}$

④ ۵

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به‌صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

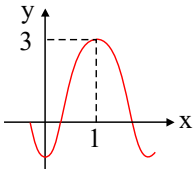


① $\frac{1}{2}$

② ۱

③ $\frac{3}{2}$

④ ۲



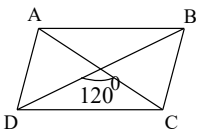
۱۵- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

- ① -۲
- ② ۲
- ③ -۱
- ④ -۳

۱۶- اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ یا ۳
- ② $\frac{1}{2}$ یا -۳
- ③ $-\frac{1}{3}$ یا ۲
- ④ $\frac{1}{3}$ یا -۲

۱۷- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اندازه‌ی قطرهای برابر ۶ و ۱۲ و زاویه‌ی بین دو قطر 120° است. مساحت مثلث ACD کدام است؟



- ① $18\sqrt{3}$
- ② $9\sqrt{3}$
- ③ ۱۸
- ④ ۹

۱۸- اگر $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ باشد کم‌ترین مقدار $\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$
- ② ۱
- ③ $-\sqrt{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



۱۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟

- ① $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$
- ② $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$
- ③ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
- ④ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۰- اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

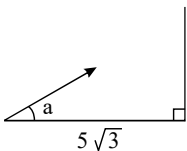
- ① $-\frac{2}{3}$
- ② $-\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{2}{3}$

۲۱- معادله $\sin x(\tan x + \cot x) = 1$ چند جواب حقیقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- ① صفر
- ② ۱
- ③ ۲
- ④ ۴

۲۲- مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصله $5\sqrt{3}$ متری از یک دیوار با سرعت $10 \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) برحسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10}$ به دست می‌آید. حدود α کدام باشد تا گلوله

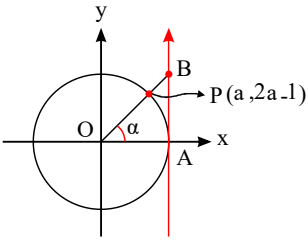
قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



- ① $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$
- ② $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$
- ③ $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$
- ④ $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

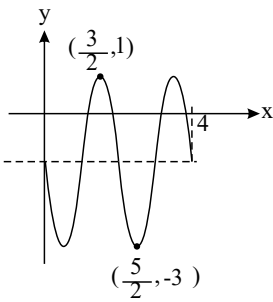


۲۳- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$



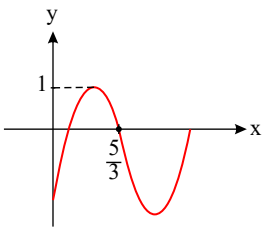
- ۱) $\frac{2}{3}$
- ۲) $\frac{3}{4}$
- ۳) $\frac{3}{8}$
- ۴) $\frac{1}{2}$

۲۴- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi(\frac{3}{2} + bx) + c$ است. حاصل abc کدام است؟



- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) -۱
- ۴) -۲

۲۵- اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می تواند باشد؟



- ۱) ۲
- ۲) -۲
- ۳) $\frac{3}{2}$
- ۴) $-\frac{1}{2}$

۲۶- اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- ۱) ۰٫۶
- ۲) ۰٫۸
- ۳) ۰٫۴
- ۴) ۰٫۳



۲۷- به ازای کدام مقدار x تساوی $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$ برقرار است؟

① $\frac{3\pi}{8}$

② $\frac{3\pi}{16}$

③ $\frac{\pi}{8}$

④ $\frac{\pi}{16}$

۲۸- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، آنگاه مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

① $-\frac{3}{4}$

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{4}$

۲۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

① $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

② $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

③ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

④ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



۳۰- اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ ، حاصل $\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$ کدام است؟

① $\frac{9}{4}$

② $\frac{15}{8}$

③ $\frac{17}{8}$

④ $\frac{31}{16}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ می‌دانیم: $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲ - گزینه ۱ می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر 4π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 8$$

$$\rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴ - گزینه ۱

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow \text{امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ \cos x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۵ - گزینه ۵

می‌دانیم $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۶ - گزینه ۴

از رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ استفاده می‌کنیم.



$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۷ - گزینه ۱

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

۸ - گزینه ۱

$$2 \sin a \cos a = \sin 2a, \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

می‌دانیم:

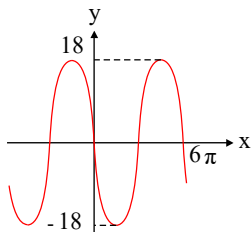
$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۹ - گزینه ۴



در توابع $y = b \cos ax$ و $y = b \sin ax$ دوره‌ی تناوب برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ ، ماکسیمم برابر $|b|$ و مینیمم برابر $-|b|$ است.
با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر 6π و ماکسیمم آن برابر 18 است. پس با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{3} \rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \\ |b| = 18 \rightarrow b = \pm 18 \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است، پس دقیقاً یکی از a یا b منفی و دیگری مثبت است.

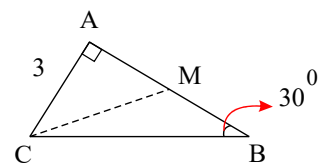
$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \rightarrow a + b = -\frac{53}{3}, \\ b = -18 \end{cases}, \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \rightarrow a + b = \frac{53}{3} \\ b = 18 \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $-\frac{53}{3}$ است.

$$\text{از طرفی: } MB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} MB \times BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) (6) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

۱۰ - گزینه ۴ ضلع روبرو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است $\leftarrow BC = 6$
ضلع روبرو به زاویه‌ی $60^\circ (C)$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است $\leftarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} (6) = 3\sqrt{3}$



$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

۱۱ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\cos x - \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin x} \rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$



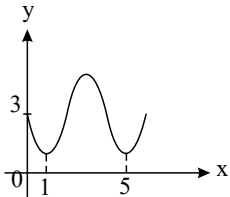
$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} \times 2 \rightarrow \sin 2x - 1 + \cos 2x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان}} \underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 + \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

۱۲ - گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید که دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin\left(\frac{b\pi}{k}x\right) \Rightarrow \text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

۱۳ - گزینه ۲ می‌دانیم $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ است.

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi b x) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(\pi b x)$$

$$\text{داریم: } -1 \leq \cos(\pi b x) \leq 1 \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \cos(\pi b x) \leq a$$

$$\xrightarrow{\text{منفی ضرب می‌کنیم}} -a \leq -a \cos(\pi b x) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi b x) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می‌باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi b x)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{4}{3}$ است و می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

۱۴ - گزینه ۳ اولاً چون مقادیر تابع از نقطه $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$. از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه:

$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی با توجه به شکل $T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

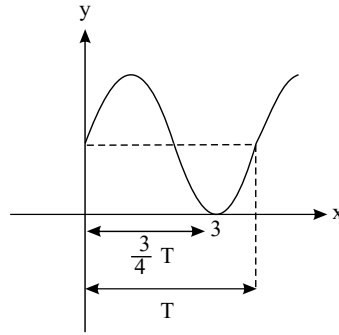
دوره تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.



به شکل دقت کنید:



۱۵ - گزینه ۱ فاصله طولی بین ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm\pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

$\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$ و $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

 ۱۶ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos 2x &= -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5} \\ \xrightarrow{\tan x=A} \frac{2A}{1+A^2} + \frac{1-A^2}{1+A^2} &= \frac{-1}{5} \Rightarrow \frac{2A+1-A^2}{1+A^2} = \frac{-1}{5} \\ \rightarrow 10A+5-5A^2 &= -1-A^2 \rightarrow 4A^2-10A-6=0 \rightarrow 2A^2-5A-3=0 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= 25+24=49 \rightarrow A_1, A_2 = \frac{5 \pm 7}{4} = 3, -\frac{1}{2} \rightarrow \tan x = 3, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۷ - گزینه ۲ مساحت متوازی الاضلاع برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها می‌باشد.

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \sin 120^\circ = 36 \sin 60^\circ = 36 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18\sqrt{3}$$

مساحت مثلث ACD نصف مساحت متوازی الاضلاع، یعنی $9\sqrt{3}$ می‌باشد.

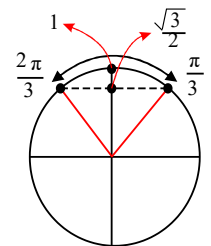
۱۸ - گزینه ۴

$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

 می‌دانیم:

$$\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)} = \cos 2(45 - \alpha) = \cos(90 - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$$



مقدار سینوس در این بازه از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تا ۱ متغیر است که کم‌ترین مقدار آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱۹ - گزینه ۴

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$

 می‌دانیم:

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos(\pi + 2x) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



می دانیم: $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - x) = 1 \Rightarrow \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) \sin(\frac{2\pi}{3} - x) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$$

۲۱ - گزینه ۱ می دانیم $\tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a \cos a}$ است.

$$\sin x (\tan x + \cot x) = 1 \rightarrow \sin x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1 \rightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 \rightarrow \cos x = 1$$

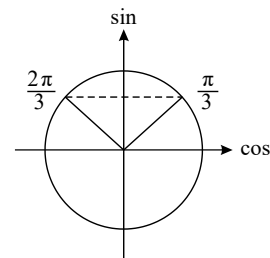
توجه کنید در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است و مخرج را صفر می کند پس معادله جواب حقیقی ندارد.

۲۲ - گزینه ۲ برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگ تر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم:

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{1.0} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=1.0} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می تواند باشد. سینوس زاویه های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$



به ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ گلوله پای دیوار فرود می آید و به ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می کند.

۲۳ - گزینه ۳ طول ضلع AB برابر $\tan \alpha$ می باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times OA \xrightarrow{OA=1} S = \frac{1}{2} \times \tan \alpha$$

مختصات نقطه P روی دایره مثلثاتی به صورت $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ می باشد.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (2a - 1)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow a(5a - 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ a = \frac{4}{5} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

پس $\cos \alpha$ برابر $\frac{4}{5}$ می باشد و $\sin \alpha$ برابر $\frac{3}{5}$ است.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

۲۴ - گزینه ۲ ابتدا π را در پراتنز ضرب می کنیم:

$$f(x) = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x\right) + c = a \sin(b\pi x) + c$$

با توجه به این که فاصله طولی نقطه ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است، پس:

$$T = 2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

و همچنین از نقاط $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ می توانیم برای پیدا کردن a و c استفاده کنیم.

حالت اول: $b = 1$



$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 &\Rightarrow a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -3 &\Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم: $b = -1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 &\Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -3 &\Rightarrow -a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

۲۵ - گزینه ۴ در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع از رابطه $|a| + c$ بدست می‌آید.

$$|a| + c = 1 \rightarrow |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که a و b هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow{\text{صدق}} \circ = 2 \sin \frac{5b\pi}{3} - 1 \rightarrow \sin \frac{5b\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای x های مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{5b\pi}{3}$ برابر $\frac{5\pi}{6}$ باشد.

$$\frac{5b\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

۲۶ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = 2 \rightarrow \tan x = 2$$

توجه کنید چون $1 + \cos 2x \geq 0$ است و جواب کسر برابر ۲ شده است بنابراین $\sin 2x > 0$ است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

می‌دانیم که $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\text{از طرفی: } \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin 2x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\sin 2x > 0} \sin 2x = \frac{4}{5} = 0,8$$

۲۷ - گزینه ۱

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$$

$$\text{اگر } \cos \alpha + \cos \beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} - x = \pi \rightarrow 2x = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$$

۲۸ - گزینه ۱ می‌دانیم که $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ است.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

برای محاسبه $\sin 2\alpha$ کافی است طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ برسانیم.

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۲۹ - گزینه ۳

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 20^\circ}{\frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1}} = \frac{\frac{36}{100} + 1}{-\frac{36}{100} + 1} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۴	۲۳ - ۳	۲۸ - ۱
۴ - ۱	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳