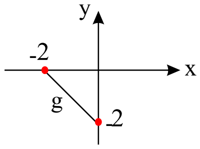
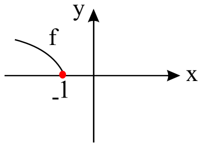
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - نمودارهای زیر مربوط به توابع g, f هستند. اگر دامنه‌ی تابع fog به‌صورت $[a, b]$ باشد، $b-a$ کدام است؟





(۱) ۱

(۲) ۱/۵

(۳) ۲

(۴) ۲/۵

۲ - اگر $f(x)=\dfrac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

(۱) $[۰, ۱)$

(۲) $\{۰\}$

(۳) $(-۱, ۱)$

(۴) $\mathbb{R}-\{۱, -۱\}$

۳ - اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x)+f(\dfrac{۱}{x})=\dfrac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}$ مقدار $f(-۴)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) -۳

(۴) -۵

۴ - در تابع خطی $f(x)$ اگر $f(۳x-۱)+۳f(۱-x)=۴$, $f(۵)=۲$ باشد $f(۱۴)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۵- اگر $f(x-\frac{۱}{x})=x+\frac{۱}{x}+۶$، آنگاه $f(\sqrt{۲})$ کدام می‌تواند باشد؟ $(x\neq ۰)$

① $۶-\sqrt{۶}$

② $\sqrt{۲}+۶$

③ $۴-\sqrt{۲}$

④ $\sqrt{۲}-۴$

۶- اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}$ باشد $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

① $\sqrt{۵}$

② $۳\sqrt{۵}$

③ $۲\sqrt{۵}$

④ $۴\sqrt{۵}$

۷- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=|۲x+a|$ در فاصله‌ی $(-۱,۲)$ یک به یک است؟

① $R-(-۱,\frac{۱}{۲})$

② $[-۴,۲]$

③ $R-(-۴,۲)$

④ $[-۱,\frac{۱}{۲}]$

۸- اگر $f(x)=\sqrt{۶+x-x^{۲}}$، دامنه‌ی تعریف تابع $y=f(۱-۲x)$ کدام است؟

① $[-۵,۵]$

② $[-۳,۲]$

③ $[-۲,۳]$

④ $[-۱,\frac{۳}{۲}]$

۹ - اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}$ و تابع $g(x)=\tan x:|x|<\frac{\pi}{۲}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع fog کدام است؟

① $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$

② $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$

③ $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$

④ $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

۱۰ - اگر $۵f(x-۲)+f(۲-x)=۴x+۱$ باشد، آنگاه $f(۳)$ کدام است؟

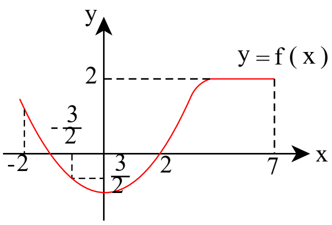
① ۴

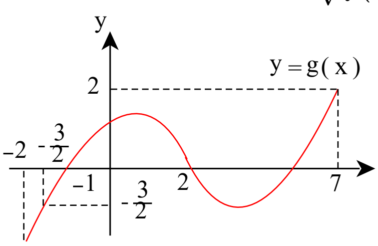
② ۴٫۵

③ ۵

④ ۵٫۵

۱۱ - نمودارهای توابع f و g به صورت زیر هستند. عبارت $y=\frac{۱}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟





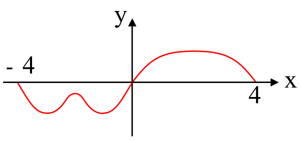
① $(-۲,۲)\cup(۲,۷)$

② $[-۲,-\frac{۳}{۲}]\cup[۲,۷]$

③ $(-۲,۷)-\{-\frac{۳}{۲},۲\}$

④ $[-۲,-\frac{۳}{۲})\cup(۲,۷)$

۱۲ - نمودار تابع $y=f(۲x)$ به شکل مقابل است. دامنه‌ی تعریف تابع $y=۳f(\sqrt{x})+۱$ کدام است؟



① $[۴,۱۶]$

② $[۰,۶۴]$

③ $[۰,۴]$

④ $[۴,۶۴]$

۱۳- اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2(x^2+2x)$ باشند، دامنهٔ تعریف تابع fog کدام است؟

① $[-4,2]$

② $[-2,0]$

③ $[-4,-1]\cup(1,2]$

④ $[-4,-2)\cup(0,2]$

۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ و $g(\frac{1}{x})=x+\frac{1}{x}$ باشند، دامنهٔ تعریف تابع fog کدام است؟

① $\mathbb{R}$

② $\{1\}$

③ $[0,1]$

④ $[-1,1]$

۱۵- اگر $f(x)=x^2-2$ و $f(g(x))=x^2-2x-1$ آن‌گاه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

① $x-2$

② $2-x$

③ $x+1$

④ $1-x$

۱۶- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشد، حاصل $(fog)(1-\sqrt{2})-(gof)(1-\sqrt{2})$، کدام است؟

① 4

② $4(\sqrt{2}-1)$

③ $4(1-\sqrt{2})$

④ $4\sqrt{2}$

۱۷- اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $f=\{(x,2x-1),x\in A\}$ باشد، تابع $f(f(x))$ شامل چند عضو است؟

① 1

② 2

③ 3

④ 4

۱۸- اگر $f(x)=ax^2+bx-c$ و $g(x)=x+a$ و $f(g(x))=x^2+4x-5$ باشد، c کدام است؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۹- اگر $g(x)=\frac{x+1}{x}$ و به ازای هر $x\in R-\{0,1\}$ داشته باشیم $(fog)(x)+g(x)=x$، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{1-x-x^2}{x-1}$

۲) $f(x)=\frac{1+x-x^2}{x-1}$

۳) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

۴) $f(x)=-\frac{1}{x-1}$

۲۰- اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟

۱) x^2-x+3

۲) x^2-2x-1

۳) x^2-2x+1

۴) x^2-x+1

۲۱- اگر $(fog)(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟ $(x\neq 0,1)$

۱) $\frac{4}{x}$

۲) $\frac{2}{x}$

۳) $-\frac{4}{x}$

۴) $-\frac{2}{x}$

۲۲- اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g\left(f(x)\right)$ کدام است؟

(۱) $x-۱$

(۲) $x+۱$

(۳) x

(۴) $۲x$

۲۳- اگر $g(x)=۲\sqrt[۴]{۸-x}$ و $f(x)=\log_{\sqrt{۲}}^{x^۲+۶x}$ ، دامنه‌ی تعریف تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) بی‌شمار

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۴- اگر $f(x)=\dfrac{۱-۳x}{x+۲}$ و $f(g(x))=\dfrac{x^۳}{x^۵+۱}$ ، حاصل $g(۱)$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۱}{۲}$

(۲) صفر

(۳) $-\dfrac{۲}{۳}$

(۴) $-\dfrac{۱}{۳}$

۲۵- تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x^۳+۲x$ مفروض است. اگر نمودار تابع $f(x)$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱۲ و ۳- قطع کند، نمودار تابع fog محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) ۱- و ۲

(۲) ۱ و ۲-

(۳) ۲ و ۳-

(۴) ۲- و ۳

۲۶- اگر $f(x) = |x| - x$ ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

۱) x

۲) $|x|$

۳) $x + |x|$

۴) ۰

۲۷- اگر $g(x) = x^۲ - ۲x \;\;,\;\; g(f(x)) = x^۲ + ۱$، نمودار f و محور عرض‌ها در کدام عرض متقاطع‌اند؟ $(f(x) > ۱)$

۱) $\sqrt{۲} - ۱$

۲) $\sqrt{۲} + ۱$

۳) $۱ - \sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۲}$

۲۸- اگر $f(g(x)) = \dfrac{x}{x - ۳}$ و $g(x) = ۲x - ۱$ مقدار $f(۳)$ کدام‌است؟

۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

۲۹- اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(۰, a)$ و $(a, ۰)$ باشد. ضابطه‌ی $fof(x)$ کدام است؟

۱) ۰

۲) x

۳) $f(x)$

۴) $x + ۲a$

۳۰- اگر $f(x) = ۲x - ۲$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ باشد جواب معادله‌ی $fog(x) = ۰$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{۲}$

۲) ± ۲

۳) $\pm\sqrt{۳}$

۴) ± ۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ ابتدا دامنه‌ی g, f و معادله‌ی تابع $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_g=[-2,0]\,,D_f=(-\infty,-1]$$

نمودار تابع g از دو نقطه‌ی $A(-2,0)$ و $B(0,-2)$ می‌گذرد. حال معادله‌ی تابع را می‌نویسیم:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x+2}=\frac{2}{-2}=-1\to y=-x-2\to g(x)=-x-2$$

حال داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,,\,g(x)\in D_f\}=\{x\in[-2,0]\quad,\ g(x)\in(-\infty,-1]\}$$
$$g(x)\in D_f\Rightarrow -x-2\le -1\Rightarrow -x\le 1\Rightarrow x\ge -1$$
$$D_{fog}=\{x\in[-2,0]\ \ ,\ \ x\ge -1\}=[-1,0]\Rightarrow b-a=0-(-1)=1$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g, f را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}\to D_f=R-\{-1,1\}$$
$$g(x)=\sqrt{x-x^2}\to D_g: x-x^2\ge 0\to x(1-x)\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\le x\le 1$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\ne 1,x\ne -1}_{I}\quad,\quad 0\le\frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1\}$$
$$\frac{\overbrace{1+x^2}^{+}}{1-x^2}\ge 0\to 1-x^2>0\to x^2<1\to -1<x<1\qquad(II)$$
$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1\to\frac{1+x^2}{1-x^2}-1\le 0\to\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\le 0\to\frac{2x^2}{1-x^2}\le 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
عبارت ≤ 0		$-$	ت ن	$+$	0	$+$	ت ن	$-$	

$$\to x<-1\quad \text{یا}\quad x>1\quad\text{یا}\quad x=0\quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x=0$ می‌رسیم.

۳ - گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x)+\ f(\frac{1}{x})=\frac{x^2-12x+1}{2x}\to ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^2+bx+a+bx}{x}$$
$$=\frac{ax^2+2bx+a}{x}=\frac{2ax^2+4bx+2a}{2x}=\frac{x^2-12x+1}{2x}\xrightarrow{\text{مقایسه}}a=\frac{1}{2},\ 4b=-12\ ,\ b=-3$$
$$\text{بنابراین}\ f(x)=\frac{1}{2}x-3\ \to f(-4)=-2-3=-5$$

۴ - گزینه ۲ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

$$f(3x-1)+3f(1-x)=4\ \to a(3x-1)+b+3\,(a(1-x)+b)=4$$
$$\to 3ax-a+b+3a-3ax+3b=4\to 2a+4b=4\ \to a+2b=2$$
$$f(5)=2\ \to 5a+b=2\Rightarrow\begin{cases}a+2b=2\\5a+b=2\end{cases}\to a=\frac{2}{9},b=\frac{8}{9}\to f(x)=\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$$
$$\to f(14)=\frac{28}{9}+\frac{8}{9}=\frac{36}{9}=4$$

۵ - گزینه ۱

$$x-\frac{1}{x}=t\to x^2+\frac{1}{x^2}-2=t^2\to(x+\frac{1}{x})^2=t^2+4$$

$$f(t)=\pm\sqrt{t^2+4}+6\to f(x)=6\pm\sqrt{x^2+4}\to f(\sqrt{2})=6\pm\sqrt{6}$$

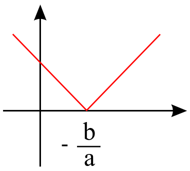
۶ - گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}\to f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3x(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

$$\to f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^{۳}-۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t} f(t)=t^{۳}-۳t \to f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^{۳}-۳\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}$$

۷ - گزینه ۳



در توابع $y=|ax+b|$ شکستگی تابع در $x=-\frac{b}{a}$ (ریشه‌ی داخل قدرمطلق) رخ می‌دهد.

برای این‌که تابع f بخواهد در فاصله‌ی $(-۱,۲)$ یک به یک باشد ریشه‌ی داخل قدرمطلق نباید در این فاصله باشد زیرا در این صورت یک خط افقی، شکل را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کرده و تابع یک به یک نمی‌باشد. برای این منظور ریشه‌ی داخل قدرمطلق را در بازه‌ی $(-۱,۲)$ قرار می‌دهیم و جواب را از R کم می‌کنیم.

ریشه‌ی داخل قدر مطلق: $۲x+a=۰ \to x=-\frac{a}{۲}$

$$-۱<-\frac{a}{۲}<۲ \to -۲<-a<۴ \to -۴<a<۲$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب برابر است با: $a\in R-(-۴,۲)$

۸ - گزینه ۴ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع f را به‌دست می‌آوریم برای این کار، زیر رادیکال را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$۶+x-x^{۲}\geq ۰ \to x^{۲}-x-۶\leq ۰ \to (x-۳)(x+۲)\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\leq x\leq ۳$$

حال، برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $y=f(۱-۲x)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$-۲\leq ۱-۲x\leq ۳ \to -۳\leq -۲x\leq ۲ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۳}{۲}\geq x\geq -۱ \to x\in\left[-۱,\frac{۳}{۲}\right]$$

البته می‌توانید ابتدا $f(۱-۲x)$ را تشکیل داده و سپس دامنه‌ی تعریف آن را به‌دست آورید.

۹ - گزینه ۳

$fog(x)$ را تشکیل داده و بدون ساده کردنش دامنه را پیدا می‌کنیم.

$$(fog)(x)=\frac{\sqrt{۱-\tan^{۲}x}}{\tan x}$$

$$\begin{cases} ۱-\tan^{۲}x\geq ۰ \Rightarrow \tan^{۲}x\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq \tan x\leq ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۴}\leq x\leq \frac{\pi}{۴} \quad (\text{از روی دایرهٔ مثلثاتی}) \\ \tan x\neq ۰ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\neq ۰ \Rightarrow \sin x\neq ۰ \Rightarrow x\neq k\pi \Rightarrow x\neq ۰,\ \pi,۲\pi,\cdots \end{cases}$$

$$D_{fog}=[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]-\{۰\}=[\frac{-\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$$

۱۰ - گزینه ۲ چون در صورت سؤال $f(۳)$ را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های $x-۲$ و $۲-x$ را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

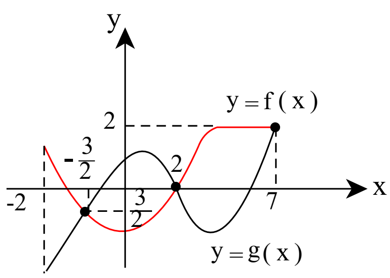
$$x-۲=۳ \to x=۵\ ,\ ۲-x=۳ \to x=-۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x=۵ \to ۵f(۳)+f(-۳)=۲۱ \\ x=-۱ \to ۵f(-۳)+f(۳)=-۳ \end{array}\right\}\times(-۵) \to -۲۴f(۳)=-۱۰۸ \to f(۳)=۴/۵$$

۱۱ - گزینه ۴ برای یافتن دامنه‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$، باید x هایی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل $f(x)-g(x)$ مثبت است، یعنی باید داشته باشیم $f(x)-g(x)>۰$ یا $f(x)>g(x)$.

توجه کنید که $f(x)-g(x)$ نمی‌تواند برابر صفر باشد چون باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود.

اگر نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم خواهیم داشت:



باتوجه به شکل به ازای مقادیری از x که به $(۲,۷)\cup[-۲,-\frac{۳}{۲})$ تعلق دارد $f(x)$ بزرگ‌تر از $g(x)$ است.

۱۲ - گزینه ۲ باتوجه به شکل داده شده، دامنه‌ی تعریف تابع $y=f(۲x)$ به‌صورت $[-۴,۴]$ است. بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)$ برابر $[-۸,۸]$ است. حال دامنه‌ی تعریف تابع $y=۳f(\sqrt{x})+۱$ را به‌دست می‌آوریم.

$$D_y=\{x\geq ۰,\sqrt{x}\in[-۸,۸]\}=\{x\geq ۰,\ -۸\leq\sqrt{x}\leq ۸\}$$

$$=\{x\geq ۰,\ ۰\leq\sqrt{x}\leq ۸\}=\{x\geq ۰,\ ۰\leq x\leq ۶۴\}=[۰\ ,۶۴]$$

۱۳ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنهٔ تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f : ۳ - x \geq ۰ \to x \leq ۳$$

$$D_g : x^۲ + ۲x = x(x+۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -۲ \text{ یا } x > ۰$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -۲ \text{ یا } x > ۰ \mid \log_۲^{x^۲+۲x} \leq ۳\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid x^۲ + ۲x \leq ۲^۳\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid x^۲ + ۲x - ۸ \leq ۰\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid (x+۴)(x-۲) \leq ۰\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid -۴ \leq x \leq ۲\}$$

$$= -۴ \leq x < -۲ \quad \text{یا} \quad ۰ < x \leq ۲ \Rightarrow D_{fog} = [-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

$x = -۱$: در دامنهٔ تعریف g قرار ندارد. بنابراین در دامنهٔ تعریف fog هم نباید باشد، یعنی هر گزینه‌ای که $x = -۱$ دارد نادرست است. پس فقط گزینهٔ چهارم درست است.

۱۴ - گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ تعریف توابع g, f را به‌دست می‌آوریم:

$$g(\frac{۱}{x}) = x + \frac{۱}{x} \to g(x) = \frac{۱}{x} + x \to D_g : \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$f(x) = \sqrt{۲x - x^۲} \to D_f : ۲x - x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} D_f : ۰ \leq x \leq ۲$$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g,\ g(x) \in D_f\} = \left\{x | x \neq ۰\ ,\ ۰ \leq x + \frac{۱}{x} \leq ۲\right\} = \left\{x | x \neq ۰\ ,\ ۰ \leq \frac{x^۲+۱}{x} \leq ۲\right\}$$

حال باید نامعادلهٔ $۰ \leq \frac{x^۲+۱}{x} \leq ۲$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\overbrace{x^۲+۱}^{+}}{x} \geq ۰ \to x > ۰ \\ \dfrac{x^۲+۱}{x} \leq ۲ \to \dfrac{x^۲+۱}{x} - ۲ \leq ۰ \to \dfrac{x^۲+۱-۲x}{x} \leq ۰ \to \dfrac{\overbrace{(x-۱)^۲}^{\text{نامنفی}}}{x} \leq ۰ \to x < ۰\ ,\ x = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۱$$

پس: $D_{fog} = \{x | x \neq ۰\ ,\ x = ۱\} = \{۱\}$

۱۵ - گزینه ۴

$$f(g(x)) = x^۲ - ۲x - ۱ \to (g(x))^۲ - ۲ = x^۲ - ۲x - ۱ \Rightarrow g^۲(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x-۱) \Rightarrow g(x) = x - ۱ \text{ یا } g(x) = ۱ - x$$

۱۶ - گزینه ۳

$$f(x) = |x|\ ,\ g(x) = (x+۱)^۲$$

$$fog(۱-\sqrt{۲}) = f(g(۱-\sqrt{۲})) = f((۱-\sqrt{۲}+۱)^۲) = f((۲-\sqrt{۲})^۲) = |(۲-\sqrt{۲})^۲|$$

$$= (۲-\sqrt{۲})^۲ = ۴ - ۴\sqrt{۲} + ۲ = ۶ - ۴\sqrt{۲}$$

$$gof(۱-\sqrt{۲}) = g(f(۱-\sqrt{۲})) = g(|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{-}|) = g(-۱+\sqrt{۲}) = (-۱+\sqrt{۲}+۱)^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow fog(۱-\sqrt{۲}) - gof(۱-\sqrt{۲}) = ۶ - ۴\sqrt{۲} - ۲ = ۴ - ۴\sqrt{۲} = ۴(۱-\sqrt{۲})$$

۱۷ - گزینه ۳

$$f = \{(x, ۲x-۱)\ ,\ x \in A\} \Rightarrow f = \{(۱,۱)(۲,۳)(۳,۵)(۴,۷)(۵,۹)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(f(۱)) = f(۱) = ۱ \\ f(f(۲)) = f(۳) = ۵ \\ f(f(۳)) = f(۵) = ۹ \\ f(f(۴)) = f(۷) = \varnothing \\ f(f(۵)) = f(۹) = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow f(f(x)) = \{(۱,۱), (۲,۵), (۳,۹)\} :$$ شامل سه زوج مرتب است.

۱۸ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} fog(x) = f(g(x) = a(x+a)^۲ + b(x+a) - c \\ = ax^۲ + ۲a^۲x + a^۳ + bx + ab - c \\ = ax^۲ + (۲a^۲ + b)x + a^۳ + ab - c \end{array}\right\}$$

با مقایسه‌ی این عبارت با $fog(x) = x^۲ + ۴x - ۵$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$a = ۱\ ,\ ۲a^۲ + b = ۴ \to ۲ + b = ۴ \to b = ۲\ ,\ a^۳ + ab - c = -۵ \to ۱ + ۲ - c = -۵ \to c = ۸$$

۱۹ - گزینه ۲

$$fog(x)+g(x)=x \to f(g(x))+g(x)=x \to f(\frac{x+1}{x})+\frac{x+1}{x}=x$$
$$\to f(\frac{x+1}{x})=x-\frac{x+1}{x} \to f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2-x-1}{x}$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $\frac{x+1}{x}$ را برابر t قرار دهیم.

$$\frac{x+1}{x}=t \to x+1=tx \to tx-x=1 \to x(t-1)=1 \to x=\frac{1}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}-1}{\frac{1}{t-1}} \overset{\text{تفکیک}}{=\!=} \frac{1}{t-1}-1-t+1=\frac{1}{t-1}-t=\frac{1-t^2+t}{t-1} \to f(x)=\frac{1-x^2+x}{x-1}$$

روش دوم:

ابتدای حل، مانند روش اول است تا به این‌جا می‌رسیم:

$$f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2-x-1}{x} \xrightarrow{\text{عددی دلخواه جای } x \text{ قرار دهید}} x=1 \to f(\frac{1+1}{1})=\frac{1-1-1}{1} \to f(2)=-1$$

گزینه‌ای درست است که اگر به جای x آن عدد ۲ قرار دهید حاصل برابر -1 شود. (گزینه‌ی دوم)

۲۰ - گزینه ۴ روش اول:

$$2x-3=t \Rightarrow 2x=t+3 \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$
$$=t^2+9+6t-7t-21+13=t^2-t+1 \Rightarrow f(x)=x^2-x+1 \Rightarrow f(t)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13=(t+3)^2-7(t+3)+13$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x=2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3)=4x^2-14x+13 \xrightarrow{x=2} f(1)=16-28+13 \to f(1)=1$$

تنها گزینهٔ چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیمT حاصل برابر یک می‌شود.

۲۱ - گزینه ۲

$$fog(x)=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x))=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(\frac{x-1}{x})=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x}=t \Rightarrow x-1=tx \Rightarrow x(1-t)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{1-t}$$

$$f(t)=\frac{\frac{2}{1-t}+1}{\frac{1}{1-t}-1}=\frac{2+1-t}{1-(1-t)}=\frac{3-t}{t} \Rightarrow f(x)=\frac{3-x}{x}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{3-x}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{3-x+x-1}{x}=\frac{2}{x}$$

۲۲ - گزینه ۴

$$g(f(x))=\frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}=\frac{6x}{3}=2x$$

۲۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \le m \xrightarrow{a>1} A \le a^m}$

ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع f و g را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\log_{\sqrt{2}}^{x^2+6x} \to D_f: x^2+6x>0 \to x(x+6)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-6 \text{ یا } x>0$$
$$g(x)=2\sqrt[4]{8-x} \to D_g: 8-x \ge 0 \to x \le 8$$
$$D_{gof}=\{x \in D_f \ ,\ f(x) \in D_g\}=\{x<-6 \text{ یا } x>0 \ ,\ \log_{\sqrt{2}}^{x^2+6x} \le 8\}$$
$$=\{x<-6 \text{ یا } x>0 \ ,\ x^2+6x \le \underbrace{(\sqrt{2})^8}_{16}\}=\left\{x<-6 \text{ یا } x>0 \ ,\ x^2+6x-16 \le 0\right\}$$

$= \{x < -۶$ یا $x > ۰ \ , \ (x+۸)(x-۲) \le ۰\} = \{x < -۶$ یا $x > ۰ \ , \ -۸ \le x \le ۲\}$

$= [-۸,-۶) \cup (۰,۲] \rightarrow$ **این بازه شامل ۴ عدد صحیح ۸- و ۷- و ۱ و ۲ می‌باشد**

۲۴ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱-۳x}{x+۲} \rightarrow f\left(g(x)\right) = \frac{۱-۳g(x)}{g(x)+۲}$$

از طرفی $f\left(g(x)\right) = \frac{x^۳}{x^۵+۱}$ **است. بنابراین داریم:**

$$\frac{۱-۳g(x)}{g(x)+۲} = \frac{x^۳}{x^۵+۱} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱-۳g(۱)}{g(۱)+۲} = \frac{۱}{۱+۱} \rightarrow \frac{۱-۳g(۱)}{g(۱)+۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow g(۱)+۲ = ۲-۶g(۱) \rightarrow ۷g(۱) = ۰ \rightarrow g(۱) = ۰$$

۲۵ - گزینه ۱

کافی است که معادله‌ی $fog(x) = ۰$ **را حل کنیم.**

$$f(g(x)) = ۰ \xrightarrow[\text{برابر } ۳,۱۲- \text{هستند}]{\text{ریشه‌های معادله‌ی } f(x)=۱۲} \begin{cases} x^۳+۲x = ۱۲ \rightarrow x^۳+۲x-۱۲ = ۰ \\ x^۳+۲x = -۳ \rightarrow x^۳+۲x+۳ = ۰ \end{cases}$$

اکنون هر یک از این معادلات را حل می کنیم.

$$x^۳+۲x-۱۲ = ۰ \rightarrow x^۳-۸+۲x-۴ = ۰ \rightarrow (x-۲)(x^۲+۴+۲x)+۲(x-۲) = ۰$$
$$\rightarrow \underbrace{(x-۲)}_{\text{فاکتور}}(x^۲+۴+۲x+۲) = ۰ \rightarrow (x-۲)(\underbrace{x^۲+۲x+۶}_{\Delta<۰}) = ۰ \rightarrow x = ۲$$

$$x^۳+۲x+۳ = ۰ \rightarrow x^۳+۱+۲x+۲ = ۰ \rightarrow (x+۱)(x^۲+۱-x)+۲(x+۱) = ۰$$
$$\rightarrow \underbrace{(x+۱)}_{\text{فاکتور}}(x^۲+۱-x+۲) = ۰ \rightarrow (x+۱)(\underbrace{x^۲-x+۳}_{\Delta<۰}) = ۰ \rightarrow x = -۱$$

البته می‌توانستیم معادلات را حل نکنیم و با جایگذاری گزینه‌ها در معادلات به جواب برسیم.

۲۶ - گزینه ۴

$$f(x) = |x|-x \rightarrow f(x) = \begin{cases} x-x & x \ge ۰ \\ -x-x & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x \ge ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x \ge ۰ \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow f(f(x)) = f(۰) = ۰ \\ x < ۰ \Rightarrow f(x) = -۲x \Rightarrow f(f(x)) = f(\underbrace{-۲x}_{+}) = ۰ \end{matrix}\right\} \rightarrow fof(x) = ۰$$

۲۷ - گزینه ۲

$$g(f(x)) = (f(x))^۲ - ۲f(x) = x^۲+۱$$
$$\xrightarrow{\text{به دو طرف یک اضافه می‌کنیم}} f^۲(x) - ۲f(x) + ۱ = x^۲+۲ \Rightarrow (f(x)-۱)^۲ = x^۲+۲$$

$\Rightarrow |f(x)-۱| = \sqrt{x^۲+۲} \xrightarrow{f(x)>۱} f(x)-۱ = \sqrt{x^۲+۲} \Rightarrow f(۰) = \sqrt{۲}+۱$ (محور عرض، طولش صفر است)

۲۸ - گزینه ۲

$$f(g(x)) = f(۲x-۱) \xrightarrow{f(g(x))=\frac{x}{x-۳}} f(۲x-۱) = \frac{x}{x-۳} \xrightarrow{۲x-۱=۳\rightarrow x=۲} f(۲) = \frac{۲}{۲-۳} = -۲$$

۲۹ - گزینه ۲ ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} ۰ \\ a \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} a \\ ۰ \end{matrix}\right.$ معادله‌ی خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \Rightarrow \frac{y-a}{x} = \frac{a}{-a} = -۱ \Rightarrow y-a = -x \Rightarrow f(x) = a-x$$

$$fof(x) = f(f(x)) = a-(a-x) = x$$

۳۰ - گزینه ۱

$$fog(x) = ۰ \Rightarrow f(g(x)) = ۲(x^۲-۱)-۲ = ۰ \Rightarrow ۲(x^۲-۱) = ۲$$
$$\Rightarrow x^۲-۱ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۴	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۴	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۲	۲۹ - ۲
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱