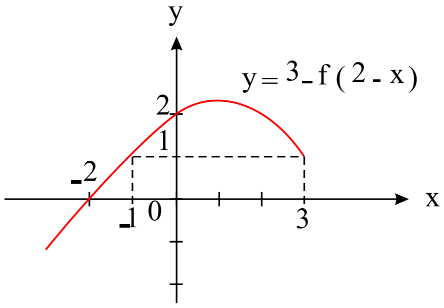
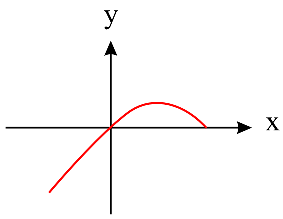
سایت: ALIGEBRA.COM

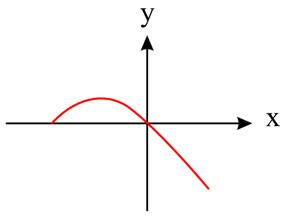
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

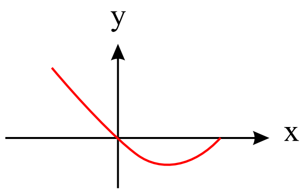
علی هاشمی

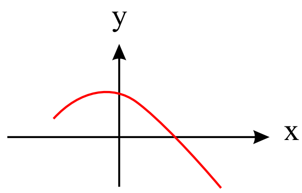
۱ - با توجه به نمودار $y = ۳ - f(۲ - x)$، نمودار تابع $y = ۲ - f(x + ۳)$ کدام است؟



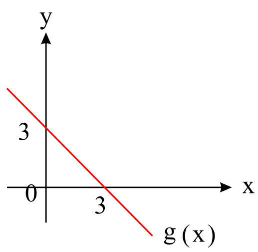
① 

② 

③ 

④ 

۲ - نمودار $g(x) = f(x) - ۲$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $h(x) = ۳f(۲x - ۱)$ و محورهای مختصات چقدر است؟



① ۱۵

② ۱۲

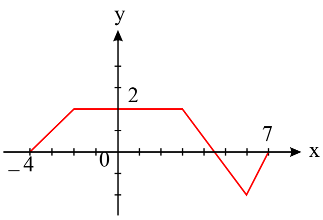
③ ۱۸

④ ۲۷

۳- نقطهٔ $A(-۱,۳)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A^{'}(a,b)$ روی نمودار تابع $y=۳f(۲x-۵)-۷$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

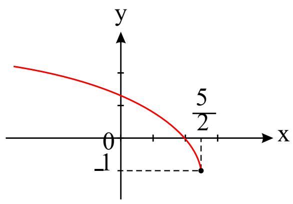
(۱) -۲
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۴

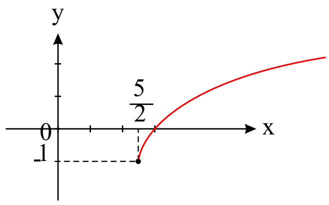
۴- نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y=۲f(۲x-۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟

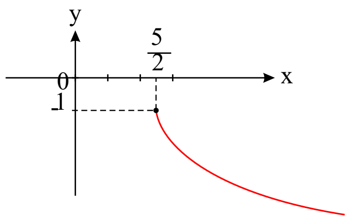


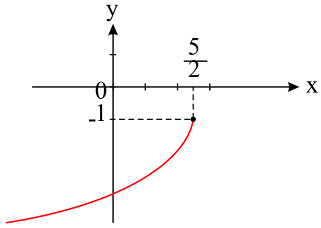
(۱) ۴
(۲) ۱۲
(۳) ۶
(۴) ۸

۵- نمودار تابع $y=\sqrt{۵-۲x}-۱$ کدام است؟

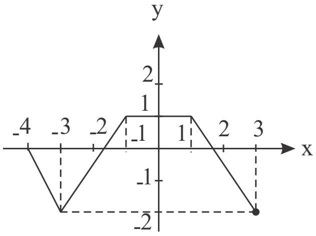
(۱)


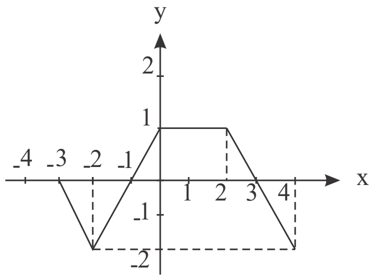
(۲)


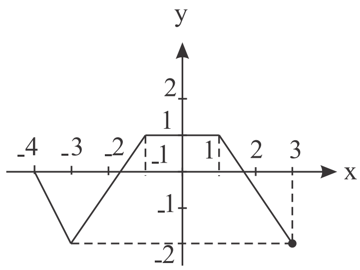
(۳)


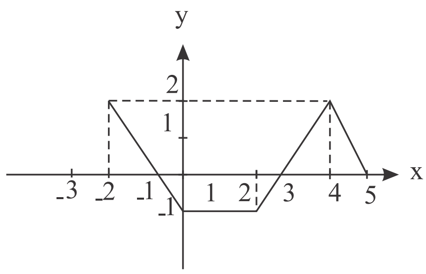
(۴)


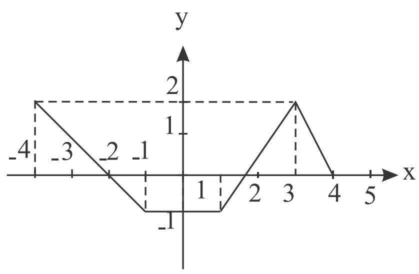
۶- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار $y=-f(-x+1)$ کدام است؟



① 

② 

③ 

④ 

۷- نمودار تابع $y=|x-۲|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

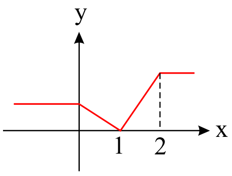
① -۱

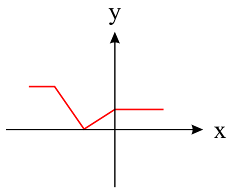
② ۱

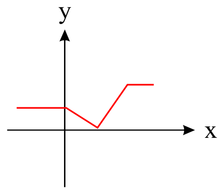
③ ۳

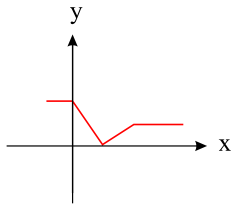
④ ۴

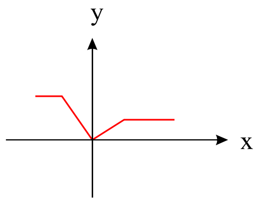
۸ – نمودار تابع $y = f(x - ۱)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(۱ - x)$ کدام است؟



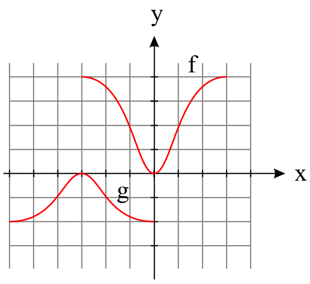
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹ – در شکل مقابل، نمودار g از طریق تعدادی عملیات انبساط، انقباض، انتقال و قرینه روی تابع f به دست آمده است. ضابطهٔ تابع g کدام است؟



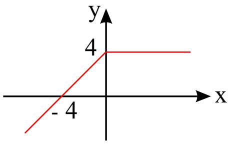
۱) $\frac{f(-x-۳)}{۲}$

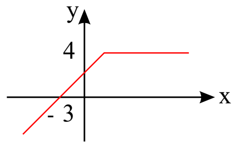
۲) $\frac{f(۲-x)}{۲}$

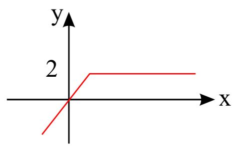
۳) $\frac{-f(x+۳)}{۲}$

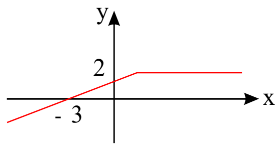
۴) $\frac{-f(۳-x)}{۲}$

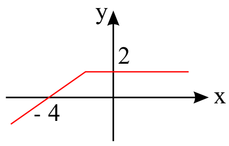
۱۰- نمودار تابع $y=۲f(x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-۱)$ کدام است؟



(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


۱۱- برای رسم نمودار $y=\sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱}$ از روی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را یک واحد به طرف راست می‌بریم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

(۲) ابتدا نمودار f را یک واحد به طرف چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

(۳) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها آن را یک واحد به طرف چپ می‌بریم.

(۴) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها ۳ واحد به طرف راست می‌بریم.

۱۲- نمودار تابع $f(x)=|x|-۱$ را به ۲ واحد به سمت xهای منفی و ۲ واحد به سمت yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع هستند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

۱۳ – نمودار تابع $f(x)=۴x^۲+۱$ را ۳ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع هستند؟

① $-\frac{۳}{۲}$

② $-\frac{۳۷}{۲۴}$

③ $-\frac{۱۹}{۱۲}$

④ $-\frac{۱۳}{۸}$

۱۴ – نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^۲+۶x-۴۵$ را حداقل چند واحد به طرف xهای منفی انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها مثبت نباشد؟

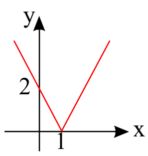
① ۸

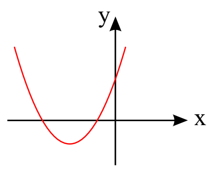
② ۵

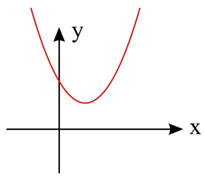
③ ۳

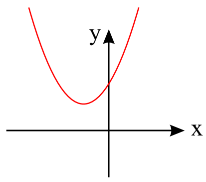
④ ۴

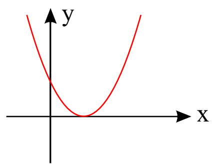
۱۵ – نمودار تابع $f(x)=a|x+b|$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x)=(x-a)^۲-b$ کدام است؟



①


②


③


④


۱۶ – نمودار تابع $f(x) = |x|$ را ابتدا ۴ واحد به سمت x های منفی برده، سپس ۲ واحد به سمت y های مثبت منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل در چند نقطه با نمودار تابع اولیه متقاطع است؟

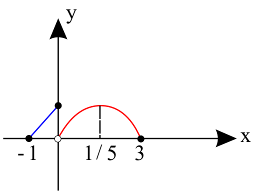
① صفر

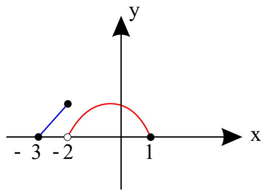
② ۱

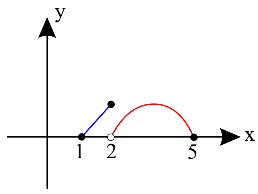
③ ۲

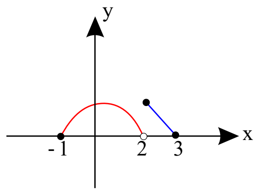
④ بی شمار

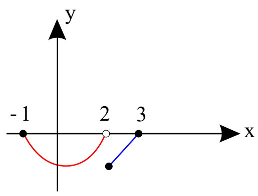
۱۷ – اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(۲ - x)$ به کدام شکل است؟



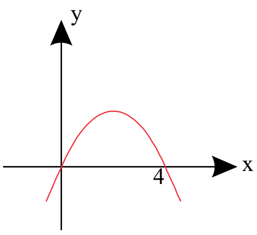
① 

② 

③ 

④ 

۱۸ – نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به شکل مقابل است. معادله‌ی محور تقارن تابع $y = f(x - ۲)$ کدام است؟



① $x = ۲$

② $x = ۰$

③ $x = ۴$

④ $x = -۲$

۱۹- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = (x-۱)^{۲}$ حاصل می‌شود. در این صورت تابع fog محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

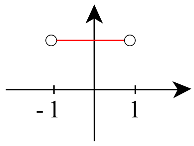
① ۱

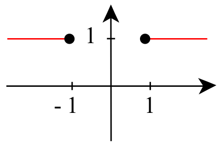
② ۲

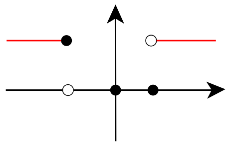
③ ۳

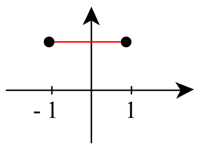
④ ۴

۲۰- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^{۲} - ۱}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^{۲} - ۱}$ باشد آن‌گاه نمودار $(f \cdot g)(x)$ کدام است؟

①


②


③


④


۲۱- اگر $\{(۰,-۱),(۱,۰),(۴,۱)(۲,۵)\}$ $f =$ باشد، آن‌گاه تابع $\dfrac{f}{f-۱}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴۴

۲۲- اگر $f=\{(۲,۷),(۳,۱),(۱,۴),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۰,۳),(۴,۲),(۱,۲)\}$ برد تابع $f+g$ کدام است؟

(۱) $\{۵,۶\}$

(۲) $\{۵,۶,۲\}$

(۳) $\{۵,۶,۳\}$

(۴) $\{۶,۵,۴\}$

۲۳- اگر $f(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f-g$ کدام است؟

(۱) $[-۲,۱]\cup[-۱,۱]$

(۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$

(۳) $R-[-۱,۱]$

(۴) $[-۱,۱]-[-۲,۲]$

۲۴- اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-۲x}$ باشند، مقدار $(۲f-g)(-۴)$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) ۳

(۳) -۹

(۴) ۹

۲۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log(x+۲)$ کدام عدد عضو دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ است؟

(۱) ۳

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

۲۶- اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=۳\sqrt{۶-۲x}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع $\dfrac{g}{f}$ کدام است؟

① $D=(-\infty,۳]-\left\{\dfrac{-۱}{۲}\right\}$

② $D=(-\infty,۳)-\left\{\dfrac{-۱}{۲}\right\}$

③ $D=(-\infty,۳)-\left\{\dfrac{-۱}{۲},۲\right\}$

④ $D=(-\infty,۳]-\left\{\dfrac{-۱}{۲},۲\right\}$

۲۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۳+۲ & ;x\leq ۰ \\ \sqrt{x+۳} & ;x>۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳x^۲+۲ & ;x\geq ۲ \\ \sqrt{۲-x} & ;x<۲ \end{cases}$ مفروض باشند، آن‌گاه، حاصل $(۲g-\dfrac{۱}{۲}f)(x)$ به‌ازای $x=f(-۱)$ کدام است؟

① ۱۵

② ۲

③ ۱۱

④ ۱

۲۸- اگر $f(x)=\dfrac{x-۳}{x-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳}$، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $\dfrac{g}{f}$ چند عدد طبیعی را شامل نمی‌شود؟

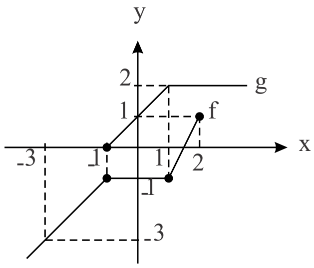
① ۲

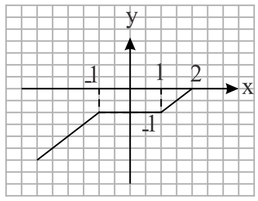
② ۳

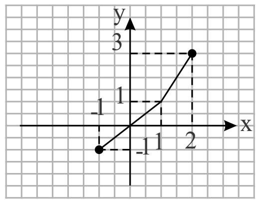
③ ۴

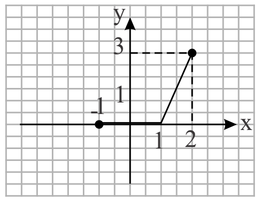
④ ۵

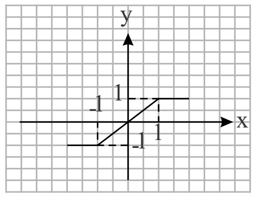
۲۹- نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار $f+g$ در کدام گزینه آمده است؟



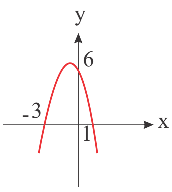
① 

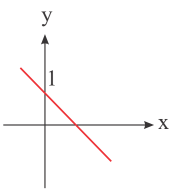
② 

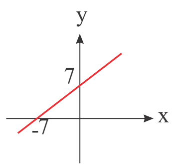
③ 

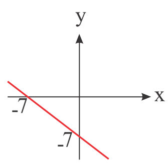
④ 

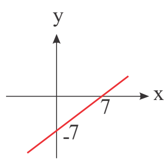
۳۰- اگر نمودار توابع f و $f \cdot g$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟ (تابع $f \cdot g$ یک تابع درجه دو است.)

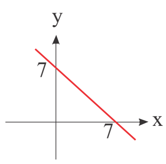




① 

② 

③ 

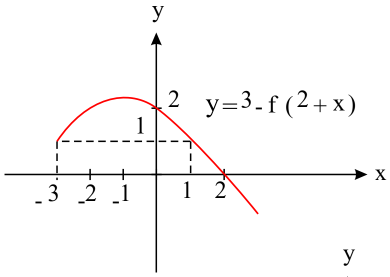
④ 

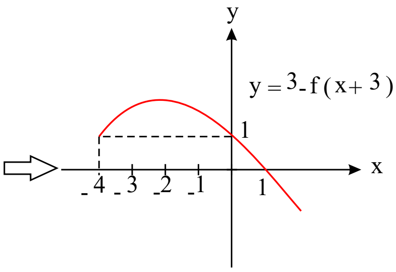
پاسخنامه تشریحی

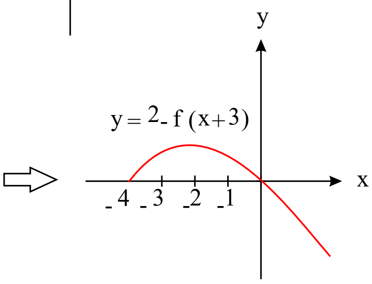
۱ - گزینه ۲

$$y=\text{۳}-f(\text{۲}-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y\text{ها}]{x\to -x} y=\text{۳}-f(\text{۲}+x)\xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+\text{۱}} y=\text{۳}-f(\text{۲}+x+\text{۱})$$

$$\Rightarrow y=\text{۳}-f(x+\text{۳})\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y=\text{۲}-f(x+\text{۳})$$







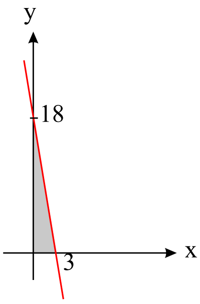
۲ - گزینه ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع خطی $g(x)$ را به دست می‌آوریم. برای این کار باید معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه $A(\text{۰},\text{۳})$ و $B(\text{۳},\text{۰})$ را به دست آوریم.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y-\text{۳}}{x}=\frac{\text{۳}}{-\text{۳}}=-\text{۱}\to y-\text{۳}=-x\to y=-x+\text{۳}\to g(x)=-x+\text{۳}\to f(x)=-x+\text{۵}$$

پس: $h(x)=\text{۳}(-(\text{۲}x-\text{۱})+\text{۵})\to h(x)=-\text{۶}x+\text{۱۸}$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$x=\text{۰}\to y=\text{۱۸}\ ,\ \ y=\text{۰}\to x=\text{۳}$



$$\longrightarrow S=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\text{۳}\times\text{۱۸}=\text{۲۷}$$

۳ - گزینه ۲

روش اول:

$A(-\text{۱},\text{۳})\in f\Rightarrow f(-\text{۱})=\text{۳}\quad ,\quad \text{۲}x-\text{۵}=-\text{۱}\Rightarrow x=\text{۲}$

$y(\text{۲})=\text{۳}f(-\text{۱})-\text{۷}=\text{۳}\times\text{۳}-\text{۷}=\text{۲}\Rightarrow A'(\text{۲},\text{۲})\Rightarrow a=\text{۲}\ ,\ b=\text{۲}\Rightarrow a-b=\text{۰}$

پس: $y(\text{۲})=\text{۳}f(-\text{۱})-\text{۷}=\text{۳}(\text{۳})-\text{۷}=\text{۲}\to A'\Big|_{\text{۲}}^{\text{۲}}\xrightarrow{a=\text{۲}\ ,\ b=\text{۲}} a-b=\text{۰}$

روش دوم: تابع f پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول‌هایش نصف شده و عرض‌هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\begin{vmatrix}-\text{۱}\\ \text{۳}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{پنج واحد راست}}\begin{vmatrix}\text{۴}\\ \text{۳}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}}\begin{vmatrix}\text{۲}\\ \text{۳}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{عرض سه برابر}}\begin{vmatrix}\text{۲}\\ \text{۹}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}}A'\begin{vmatrix}\text{۲}\\ \text{۲}\end{vmatrix}$$

پس $a-b=\text{۰}$ است.

۴ - گزینه ۳ روش اول: با توجه به نمودار تابع f، دامنهٔ آن بصورت $D_f=[-۴,۷]$ می‌باشد. پس داریم:

$$y=۲f(۲x-۱)\Rightarrow -۴\le ۲x-۱\le ۷\Rightarrow -۴+۱\le ۲x-۱+۱\le ۷+۱\Rightarrow -۳\le ۲x\le ۸$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le x\le ۴\Rightarrow \text{اعداد صحیح}: -۱,۰,۱,۲,۳,۴\Rightarrow ۶\ \text{عدد}$$

روش دوم: تابع f را باید یک واحد به سمت راست برده و سپس طول‌های نقاطش را نصف و عرض‌ها را دو برابر کنیم (دو برابر کردن عرض‌ها روی دامنه تاثیر ندارد).

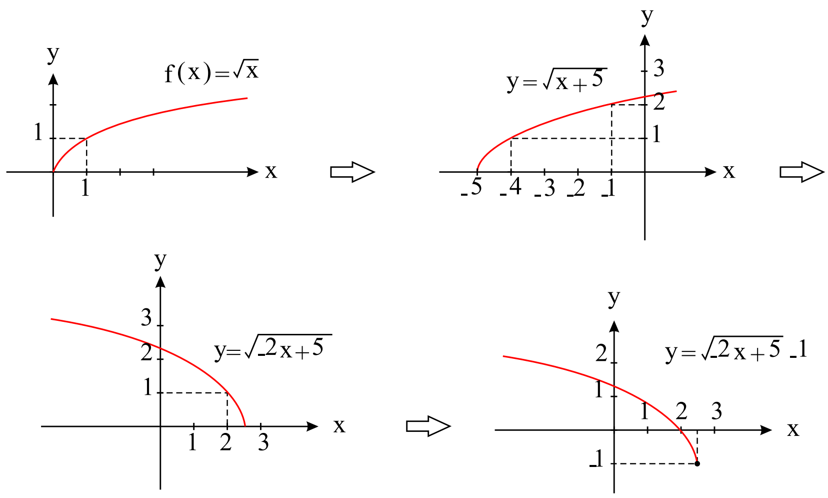
$$-۴\le x\le ۷\xrightarrow{\text{یک واحد راست}}-۳\le x\le ۸\xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}}-\frac{۳}{۲}\le x\le ۴$$

که اعداد صحیح آن عبارتند از $-۱,۰,۱,۲,۳,۴$

۵ - گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{x\to x+۵}y=\sqrt{x+۵}\xrightarrow{x\to -۲x}y=\sqrt{-۲x+۵}\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{یک واحد}}y=\sqrt{-۲x+۵}-۱$$

نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا ۵ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y=\sqrt{x+۵}$ حاصل شود. در نمودار حاصل، طول نقاط را بر -۲ تقسیم می‌کنیم تا $y=\sqrt{-۲x+۵}$ به‌دست آید. سپس در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



۶ - گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x+۱)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود، تا به تابع $y=f(x+۱)$ برسیم و نمودار نسبت به محور yها قرینه شودتا به نمودار $y=f(-x+۱)$ برسیم.

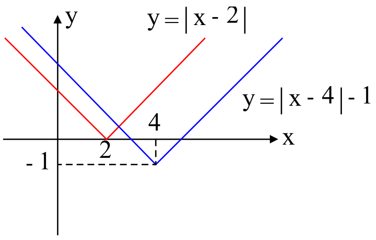
سپس برای اینکه نمودار $y=-f(-x+۱)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید. که در نهایت به گزینهٔ «۳» می‌رسیم.

۷ - گزینه ۳

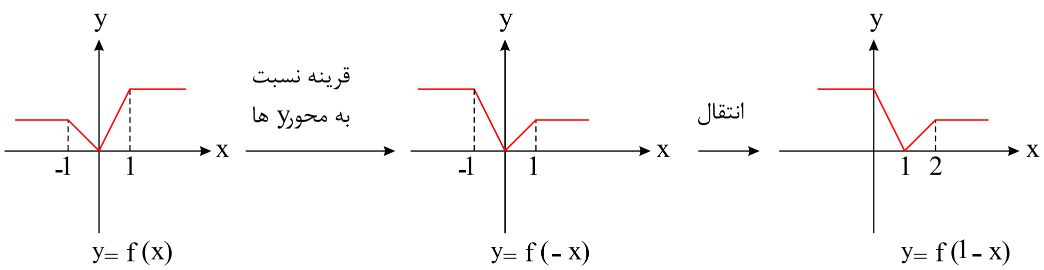
$$y=|x-۲|\xrightarrow{\text{دو واحد به راست}}y=|x-۲-۲|\xrightarrow{\text{یک واحد پایین}}y=|x-۴|-۱$$

برای به‌دست آوردن محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها، کافی است $x=۰$ را در معادله قرار دهیم: $y=|۰-۴|-۱=۳$

در ضمن برای درک بیش‌تر به شکل روبه‌رو دقت کنید.



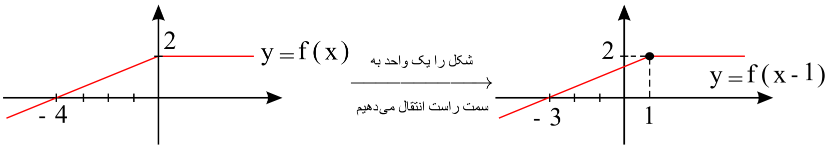
۸ - گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را با انتقال نمودار $y=f(x-۱)$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم. پس نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و نمودار حاصل را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست رسم می‌کنیم.



۹ - گزینه ۳ ابتدا در مرحلهٔ اول، نمودار f را در راستای محور yها، با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض کرده و در مرحلهٔ دوم، آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در مرحلهٔ سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=\frac{f(x)}{2}\xrightarrow{(2)}y=\frac{-f(x)}{2}\xrightarrow{(3)}y=\frac{-f(x+3)}{2}$$

۱۰ - گزینه ۳ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. (عرض نقاط را نصف کنید.)



۱۱ - گزینه ۳ با توجه به صورت سوال دستور همهٔ گزینه‌ها را اجرا می‌کنیم.

گزینهٔ «۱» :
$$\begin{cases} x\to -x \Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{-x} \\ x\to x-1 \Rightarrow \sqrt{-x}\to\sqrt{-(x-1)}=\sqrt{-x+1} \\ x\to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1}\Rightarrow\sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

گزینهٔ «۲» :
$$\begin{cases} x\to x+1 \Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{x+1} \\ x\to -x \Rightarrow \sqrt{x+1}\to\sqrt{-x+1} \\ x\to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1}\to\sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

گزینهٔ «۳» :
$$\begin{cases} x\to -x \Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{-x} \\ x\to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x}\to\sqrt{-\frac{1}{3}x} \\ x\to x+1 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x}\to\sqrt{-\frac{1}{3}(x+1)}=\sqrt{-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

گزینهٔ «۴» :
$$\begin{cases} x\to -x \Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{-x} \\ x\to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x}\to\sqrt{-\frac{1}{3}x} \\ x\to x-3 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x}\to\sqrt{-\frac{1}{3}(x-3)}=\sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۴

$$f(x)=|x|-1\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت } x \text{ های منفی}}y_1=|x+2|-1\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت } y \text{ های مثبت}}y_2=|x+2|-1+2$$
$$\to y_2=|x+2|+1$$

حال، معادلات قدیم و جدید را تلاقی می‌دهیم و در نتیجه داریم :

$$|x|-1=|x+2|+1\to|x|-|x+2|=2$$

اکنون داخل قدر مطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

$x<-2: -x-(-x-2)=\to 2=2\to$ بی‌شمار جواب دارد $(-\infty-2)$ در بازه‌ی

$-2\le x\le 0: -x-(x+2)=2\to -2x=4\to x=-2$ قق

$x>0: x-(x+2)=2\to -2=2$: امکان ندارد

بنابراین این معادله بی‌شمار جواب دارد. $(x\in(-\infty,-2])$

۱۳ - گزینه ۲

$$f(x)=4x^2+1\xrightarrow{\text{۳واحد به طرف } x\text{های منفی}}g(x)=4(x+3)^2+1$$

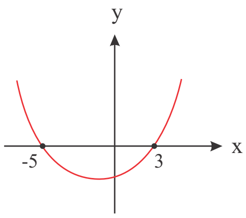
$$\xrightarrow{\text{یک واحد به طرف } y\text{های مثبت}}h(x)=4(x+3)^2+1+1\to h(x)=4(x+3)^2+2$$

تلاقی: $f(x)=h(x)\to 4x^2+1=4(x+3)^2+2\to 4x^2+1=4x^2+24x+36+2$

$\rightarrow ۲۴x = -۳۷ \rightarrow x = -\dfrac{۳۷}{۲۴}$

۱۴ ـ گزینه ۳

$f(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۴۵ = ۳(x^۲ + ۲x - ۱۵) = ۳(x + ۵)(x - ۳)$



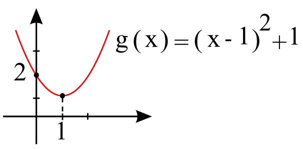
باتوجه به شکل، مشخص است که اگر نمودار تابع را حداقل ۳ واحد به سمت xهای منفی انتقال دهیم طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها مثبت نخواهد بود.

۱۵ ـ گزینه ۲ از روی شکل واضح است که $f(۱) = ۰$ و $f(۰) = ۲$ است.

$f(۱) = ۰ \rightarrow a|۱ + b| = ۰ \xrightarrow{a \neq ۰} b = -۱$

$f(۰) = ۲ \rightarrow a|b| = ۲ \rightarrow a|-۱| = ۲ \rightarrow a = ۲$

حال باید نمودار تابع $g(x) = (x - ۲)^۲ + ۱$ را رسم کنیم. برای این‌کار نمودار تابع $y = x^۲$ را رسم کرده و آن را یک واحد به سمت راست برده و سپس شکل را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۱۶ ـ گزینه ۲

$y = |x| \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت } x \text{ های منفی}} y = |x + ۴| \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت } y \text{ های مثبت}} y = |x + ۴| + ۲$

اکنون باید معادله‌ی $۲ + |x + ۴| = |x|$ را حل کنیم،برای این منظور کافی است که عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها را تعیین علامت کنیم.

x	$-\infty$		-۴		۰		∞
x		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۴$		$-$	۰	$+$		$+$	

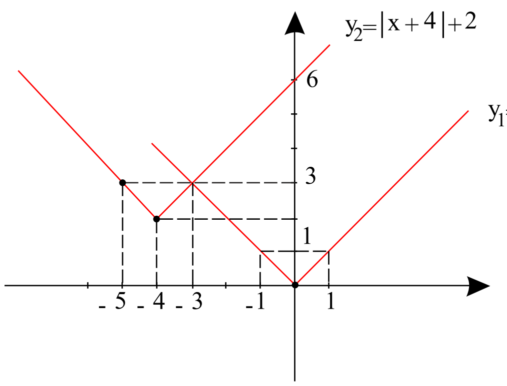
$x < -۴ : -x = -x - ۴ + ۲ \rightarrow ۰ = -۲$ امکان ندارد

$-۴ \leq x \leq ۰ : -x = x + ۴ + ۲ \rightarrow -۲x = ۶ \rightarrow x = -۳$ ق ق (با توجه به شرط)

$x > ۴ : x = x + ۴ + ۲ \rightarrow ۰ = ۶$ امکان ندارد

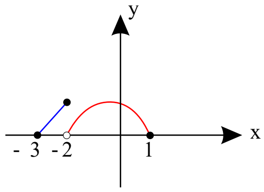
بنابراین این دو نمودار در یک نقطه متقاطع هستند.

البته می‌توان نمودارهای دو تابع $y_۱ = |x|$, $y_۲ = |x + ۴| + ۲$ را رسم کرده و تعداد نقاط تلاقی آنها را مشخص کنیم.

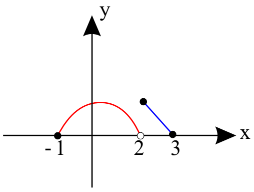


از روش شکل واضح است که دو نمودار همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۷ ـ گزینه ۳ ابتدا تابع $y = f(x + ۲)$ را رسم می‌کنیم (برای این منظور، نمودار تابع $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم)



اکنون برای رسم تابع $y=f(2-x)$ باید نمودار بالا را نسبت به محور yها قرینه کنیم (x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم).



۱۸ - گزینه ۳ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول را در $x=0$ و $x=4$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x-0)(x-4)=ax^2-4ax$ نشان داد.

معادله‌ی محور تقارن : $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{4a}{2a}=2$

برای رسم تابع $y=f(x-2)$ کافی است تابع $y=f(x)$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم بنابراین معادله‌ی محور تقارن در این حالت برابر $x=2+2=4$ است.

۱۹ - گزینه ۳ برای آنکه ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ را پیدا کنیم کافی است نمودار تابع $g(x)$ را دو واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ ببریم.

$$g(x)=(x-1)^2\xrightarrow{\text{دو واحد به سمت بالا}}y=(x-1)^2+2\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت چپ}}f(x)=(x-1+1)^2+2\to f(x)=x^2+2$$

$$fog(x)=f\left(g(x)\right)=(x-1)^4+2\xrightarrow{x=0}\text{محل تلاقی با محور } y\text{ها}=1+2=3$$

۲۰ - گزینه ۲

$$y=(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=x^2-x^2+1=1\to \text{خط افقی}$$

از طرفی: $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

$$\to\begin{cases}g(x)=x-\sqrt{x^2-1}\\ f(x)=x+\sqrt{x^2-1}\end{cases}\Rightarrow x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow |x|\geq 1\Rightarrow x\leq -1\ \text{ یا }\ x\geq 1$$

۲۱ - گزینه ۳ دقت کنید عملیات روی مولفه‌ی دوم تابع انجام می‌شود.

$$f=\{(0,-1),(1,0),(4,1)(2,5)\}\to f-1=\{(0,-2),(1,-1),(4,0),(2,4)\}$$

دامنه‌ی مشترک f , $f-1$ را پیدا کرده و تقسیم را روی مؤلفه‌ی دوم آن‌ها انجام می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\frac{f}{f-1}=\{(0,\frac{1}{2}),(1,0),(2,\frac{5}{4})\}\to \text{شامل ۳ زوج مرتب است}$$

۲۲ - گزینه ۱

$$\begin{matrix}f=\{(2,7)(3,1)(1,4)(0,2)\}\\ g=\{(3,4)(0,3)(4,2)(1,2)\}\end{matrix}\ \to\ f+g=\{(3,5)(1,6)(0,5)\}$$

برد تابع، مجموعه‌ی $\{5,6\}$ است. دقت کنید زوج‌های مرتبی از دو تابع را در نظر بگیرید که دارای xهای برابر باشند. سپس xهای آن‌ها را نوشته و عرض های آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

۲۳ - گزینه ۲ کافی است دامنه‌ی تعریف دو تابع را پیدا کرده و سپس از آن‌ها اشتراک بگیریم (زیرا رادیکال‌ها باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشند.)

$$D_f:\ x^2-1\geq 0\to x^2\geq 1\ \to x\geq 1,\ x\leq -1\quad (I)$$
$$D_g:\ 4-x^2\geq 0\ \to x^2\leq 4\to\ -2\leq x\leq 2\quad (II)$$

از اشتراک I , II جواب $-2\leq x\leq -1\cup 1\leq x\leq 2$ حاصل می‌شود یعنی $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$

۲۴ - گزینه ۳ باتوجه به ضابطه‌های توابع f و g داریم:

$$\begin{cases}f(-4)=-4+1=-3\\ g(-4)=\sqrt{1-2(-4)}=\sqrt{9}=3\end{cases}\Rightarrow (2f-g)(-4)=2f(-4)-g(-4)=2(-3)-3=-9$$

۲۵ - گزینه ۲ $x=3$ زیر رادیکال در تابع $f(x)$ را منفی می‌کند، پس عضو D_f نیست.

$x=-2$ جلوی لگاریتم در تابع $g(x)$ را صفر می‌کند، پس عضو D_g نیست.

$x=-1$ حاصل $g(x)$ را صفر می‌کند، پس در دامنه‌ی $\dfrac{f}{g}$ قرار نمی‌گیرد.

بنابراین بین گزینه‌ها فقط $x=1$ مناسب است.

تذکر: دامنه‌ی $\dfrac{f}{g}$ در این تست به‌صورت $(-2,2]-\{-1\}$ است. زیرا

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = x \leq ۲ \cap x > -۲ - \{x = -۱\} = (-۲\,,\,۲] - \{-۱\}$$

۲۶ - گزینه ۴ دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ بصورت مقابل تعریف می‌شود.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = ۰\}$$

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۲} \Rightarrow x - ۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۲ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$$

$$g(x) = ۳\sqrt{۶ - ۲x} \Rightarrow ۶ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow ۲x \leq ۶ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۳]$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x-۲} = ۰ \Rightarrow ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

$$D_f \cap D_g = (-\infty, ۳] - \{۲\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = (-\infty, ۳] - \left\{۲, -\frac{۱}{۲}\right\}$$

۲۷ - گزینه ۴

$$x = f(-۱) = (-۱)^۳ + ۲ = -۱ + ۲ = ۱$$

$$(۲g - \frac{۱}{۲}f)(x) = (۲g - \frac{۱}{۲}f)(۱) = ۲g(۱) - \frac{۱}{۲}f(۱)$$

$$= ۲ \times \sqrt{۲ - ۱} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۳} = ۲ \times (۱) - \frac{۱}{۲} \times (۲) = ۲ - ۱ = ۱$$

۲۸ - گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x-۳}{x-۴} \to D_f = \mathbb{R} - \{۴\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - ۳} \to D_g : x - ۳ \geq ۰ \to x \geq ۳$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = ۰\} = x \geq ۳ \cap \mathbb{R} - \{۴\} - \{۳\} = x > ۳ - \{۴\}$$

پس دامنهٔی $\frac{g}{f}$ اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را شامل نمی‌شود.

۲۹ - گزینه ۲ اگر f و g دو تابع باشند، دامنهٔ تابع $f+g$ به صورت $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ و ضابطهٔ آن به صورت $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ است.

ابتدا دامنهٔ تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

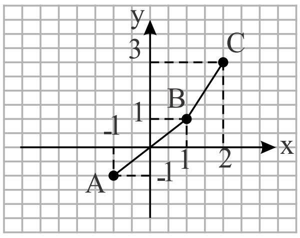
$$D_{f+g} = (-\infty, ۲] \cap [-۱, +\infty) = [-۱, ۲]$$

در این دامنه با توجه به خطی بودن هر دو تابع، جمع آن‌ها نیز یک تابع خطی است، پس کافی است نقاطی از تابع را مشخص کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم.

$$\begin{cases} f(-۱) = -۱ \\ g(-۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(-۱) = -۱ \Rightarrow A(-۱, -۱)$$

$$\begin{cases} f(۱) = -۱ \\ g(۱) = ۲ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(۱) = ۱ \Rightarrow B(۱, ۱)$$

$$\begin{cases} f(۲) = ۱ \\ g(۲) = ۲ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(۲) = ۳ \Rightarrow C(۲, ۳)$$



۳۰ - گزینه ۱ ریشه‌های تابع $f \cdot g$ برابر با -۳ و ۱ هستند، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $y = k(x-۱)(x+۳)$ است. این تابع از نقطهٔ $(۰, ۶)$ می گذرد، پس:

$$۶ = k(-۱)(۳) \Rightarrow k = -۲$$

پس ضابطهٔ $f \cdot g$ به‌صورت $(f \cdot g)(x) = -۲(x-۱)(x+۳)$ است.

از طرفی تابع f یک تابع خطی است که از نقطهٔ $(۰, ۱)$ می‌گذرد. ریشهٔ f با یکی از ریشه‌های $f \cdot g$ برابر است. چون ریشهٔ f عددی مثبت است، پس عدد ۱ ریشهٔ f است. بنابراین f از نقطهٔ $(۱, ۰)$ نیز می گذرد. معادلهٔ f را می نویسیم:

$$\begin{cases} A \Big| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \\ B \Big| \begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases} \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \to \frac{y-۱}{x} = \frac{۱}{-۱} \to y = -x + ۱ \to f(x) = -x + ۱$$

با داشتن ضابطهٔ f و $f \cdot g$، ضابطهٔ g را به‌دست می‌آوریم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow -۲(x-۱)(x+۳) = -(x-۱) \times g \Rightarrow g = ۲(x+۳) = ۲x + ۶$$

ضابطهٔ $f+g$ برابر است با:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -x + ۱ + ۲x + ۶ = x + ۷$$

نمودار $f+g$ در گزینهٔ «۱» آمده است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۲	۲۱ - ۳	۲۶ - ۴
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۱	۲۷ - ۴
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۳	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۱	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱