علی هاشمی

نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - با کدام دامنه دو تابع $f(x) = x\sqrt{۱ - x}$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - x^۳}$ با یکدیگر مساوی هستند؟

۱) $D = (-\infty, ۱]$

۲) $D = [۰, +\infty)$

۳) $D = [۰, ۱]$

۴) $D = \{-۱, ۰, ۱\}$

۲ - کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

۱) $g(x) = x|x + ۱|\,,\; f(x) = x(x + ۱)$

۲) $g(x) = \dfrac{|x + ۱|}{x}\,,\; f(x) = \dfrac{x + ۱}{|x|}$

۳) $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱}\,,\; f(x) = |x| - ۱$

۴) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}\,,\; f(x) = ۱$

۳ - اگر توابع $f(x) = \sqrt{(x - a)^۲(x - b)}$ و $g(x) = |x - a|\sqrt{x + ۲}$ با هم برابر باشند، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۳

۲) -۵

۳) -۷

۴) -۹

۴ - کدام تابع با بقیه مساوی نیست؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y = \sin^۲\dfrac{۱}{x} + \cos^۲\dfrac{۱}{x}$

۲) $y = \dfrac{|x|}{|x|}$

۳) $y = \dfrac{[x]}{[x]}$

۴) $y = \dfrac{۲^x - ۱}{۲^x - ۱}$

۵- در دنباله‌ای که از یک الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله‌ی چهارم برابر ۹ و جمله‌ی هشتم برابر ۳ باشد، چند جمله‌ی این دنباله مثبت است؟

(۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰

۶- در یک الگوی خطی جمله‌ی سوم برابر با ۷ و جمله‌ی هفتم برابر با ۱۵ است. جمله‌ی عمومی این الگو کدام است؟

(۱) $t_n = n + ۸$
(۲) $t_n = ۳n - ۲$
(۳) $t_n = n + ۴$
(۴) $t_n = ۲n + ۱$

۷- در کدام‌یک از گزینه‌های زیر توابع داده‌شده باهم مساوی هستند؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

(۱) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{۱}{x+۲} \\ g(x) = \dfrac{x-۲}{x^۲-۴} \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} \\ g(x) = \sqrt{۲+x} \times \sqrt{۲-x} \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۵x + ۶} \\ g(x) = \sqrt{x-۲} \times \sqrt{x-۳} \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} f(x) = [x^۲] \\ g(x) = [x]^۲ \end{cases}$

۸- اگر دو تابع $f = \{(۲, -۱), (c, d)\}$ و $g = \{(۲a^۲ - ۱, b^۲ + ۱), (b + ۱, ۲a - ۱)\}$ برابر باشند، $c + d$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) ۱

۹ - تابع $f(x) = (x - ۱)\sqrt{۱ - x}$ با کدام‌یک از توابع زیر مساوی است؟

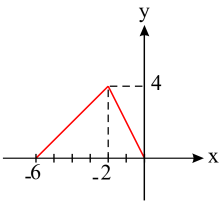
(۱) $g(x) = \sqrt{-(۱ - x)^۲}$

(۲) $g(x) = \sqrt{(۱ - x)^۳}$

(۳) $g(x) = \sqrt{(x - ۱)^۳}$

(۴) $g(x) = -\sqrt{(۱ - x)^۳}$

۱۰ - اگر نمودار تابع $y = f(۲x + ۵)$ به‌صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $y = ۳f(-۴x + ۱)$ و محور xها کدام است؟



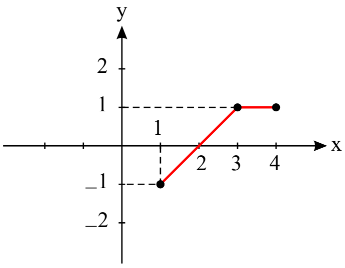
(۱) ۱۰

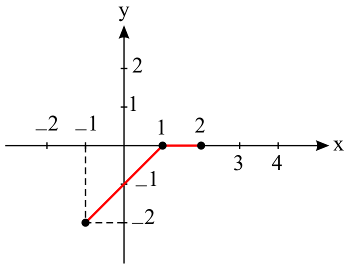
(۲) ۱۲

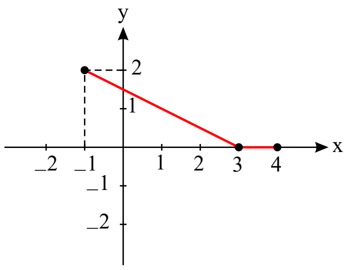
(۳) ۱۸

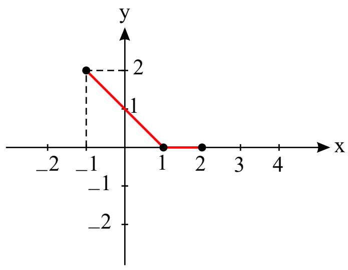
(۴) ۲۴

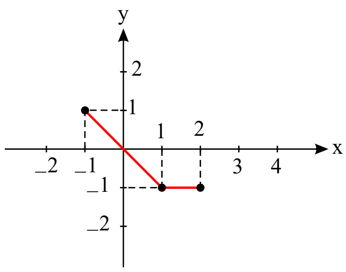
۱۱ - شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x - ۲) + ۱$ را نشان می‌دهد. نمودار تابع $y = -f(x)$ کدام است؟



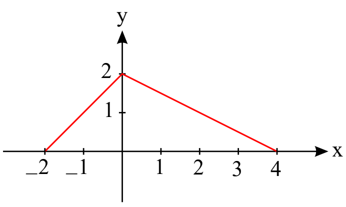
① 

② 

③ 

④ 

۱۲ - اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x - |x|)$، محور xها و خط $x = ۵$ کدام است؟



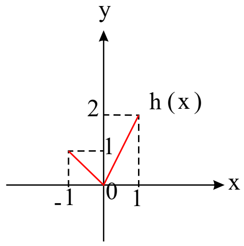
① ۹

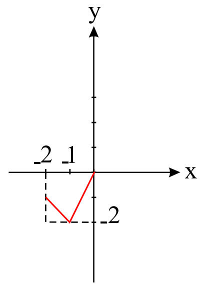
② ۱۱

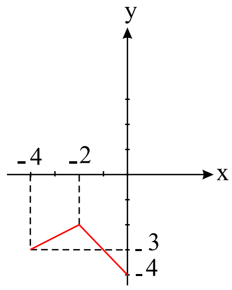
③ ۸

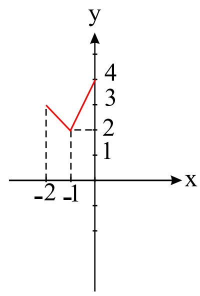
④ ۱۰

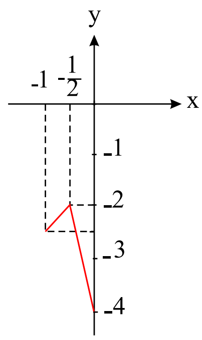
۱۳ – نمودار تابع $h(x) = f(x-۱) - ۲$ مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع $y = -f(\frac{x}{۲})$ را به‌درستی نشان می‌دهد؟



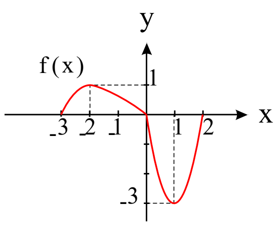
۱) 

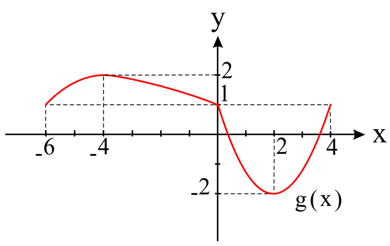
۲) 

۳) 

۴) 

۱۴ – با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟





۱) $g(x) = f\left(\frac{x+۲}{۲}\right)$

۲) $g(x) = f(۲x) + ۱$

۳) $g(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$

۴) $g(x) = f(x+۲) + ۲$

۱۵ـ نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۲$ را در راستای محورهای مختصات دو واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل کرده‌ایم تا نمودار تابع $g(x)$ به دست آید. عرض نقطهٔ تلاقی دو نمودار f و g کدام است؟

① $\frac{۱}{۴}$

② $\frac{۳}{۴}$

③ $\frac{۳}{۲}$

④ $\frac{۹}{۱۶}$

۱۶ـ اگر دامنهٔ تعریف تابع $y=f(۲-x)$ بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=f(۳x+۴)$ کدام است؟

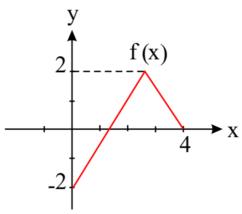
① $\left[-\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right]$

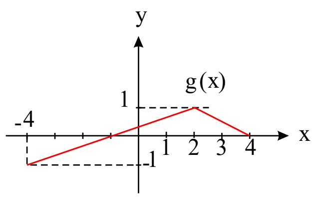
② $[۰,۱]$

③ $[۰,۳]$

④ $[۱,۲]$

۱۷ـ با توجه به نمودارهای داده شده، اگر دامنه و برد دو تابع $y_۱=\frac{۱}{۲}f(x+a)+۱$ و $y_۲=g(۲x)+b$، دوبه‌دو با هم برابر باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟





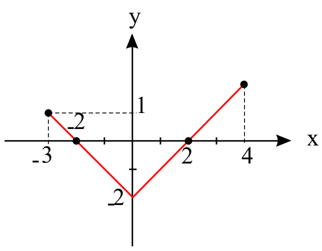
① ۲

② ۳

③ -۲

④ -۳

۱۸ـ اگر شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y=\sqrt{|۳f(x)-۱|}$ کدام است؟



① $[۰,\sqrt{۵}]$

② $[-۲,۳]$

③ $[۰,\sqrt{۸}]$

④ $[۰,\sqrt{۷}]$

۱۹ـ اگر نقطهٔ $(2x_0\,,y_0)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار داشته باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع $y=-2f(\frac{x-3}{2})+y_0$ قرار دارد؟

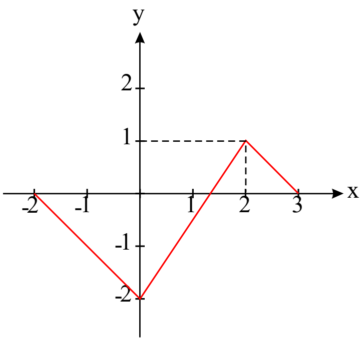
۱) $(4x_0+3,y_0)$

۲) $(4x_0+3,-y_0)$

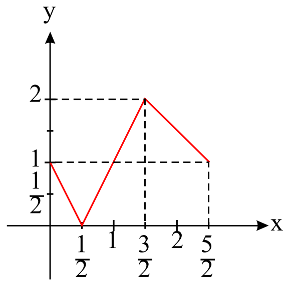
۳) $(\frac{2x_0-3}{2},-y_0)$

۴) $(\frac{2x_0-3}{2},y_0)$

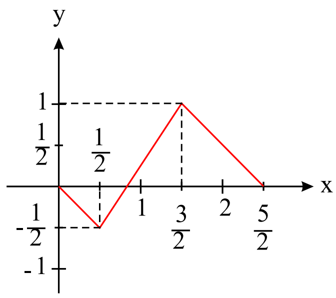
۲۰ـ نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(3-2x)+1$ کدام است؟



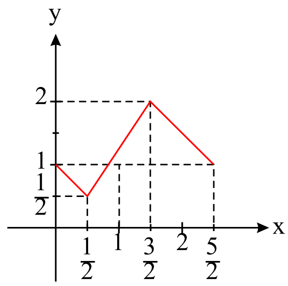
۱)



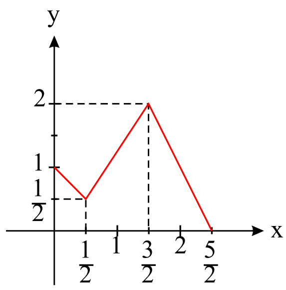
۲)



۳)



۴)



۲۱- اگر a عددی حقیقی و نمودار توابع $f(x)=(۴a-۲)^x$ و $g(x)=(۱-\frac{a}{۲})^x$ نسبت به محور yها قرینهٔ هم باشند، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

① ۱٫۵

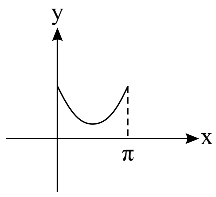
② ۲

③ ۲٫۵

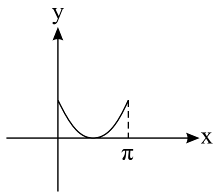
④ ۳

۲۲- نمودار تابع $y=-\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)+۲$ در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ شبیه به کدام گزینه است؟

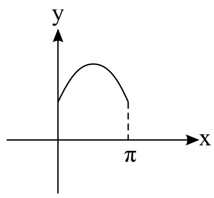
①



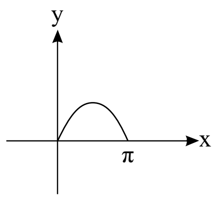
②



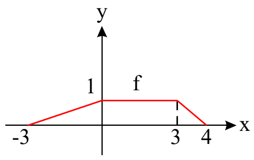
③



④



۲۳ - اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر و $g(x)=\begin{cases} f(x+۱) & ; x\geq ۰ \\ f(۲x) & ; x<۰ \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع g و محور xها کدام است؟



① $\frac{۷}{۴}$

② $\frac{۱۱}{۴}$

③ $\frac{۱۳}{۴}$

④ $\frac{۱۵}{۴}$

۲۴ - دامنهٔ تابع $g(x)=f(۲x-۱)$، بازهٔ $[-۱,۳]$ است. دامنهٔ تابع $h(x)=f(۳x+۲)$ کدام است؟

① $[۰,۲]$

② $[۰,۸]$

③ $\left[-\frac{۵}{۳},۲\right]$

④ $\left[-\frac{۵}{۳},۱\right]$

۲۵ - برای رسم نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}(۲x+۴)$، به ترتیب باید چه انتقال‌هایی را روی تابع $y=\log_{۲}(x-۱)$ انجام دهیم؟

① ۵ واحد در راستای افقی به چپ، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

② ۳ واحد در راستای افقی به چپ، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

③ ۵ واحد در راستای افقی به راست، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

④ ۳ واحددر راستای افقی به راست، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

۲۶ - نمودار تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ را یک واحد به چپ، سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار جدید خط $y=x+۹$ را در نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ قطع می‌کند. حاصل $\alpha+\beta$ چقدر است؟

① -۲۰

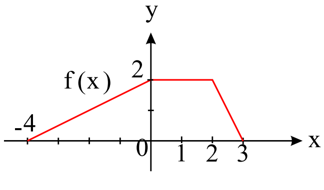
② ۹

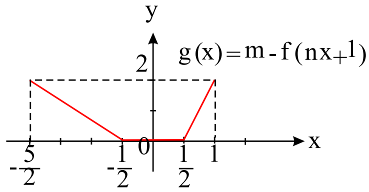
③ -۱

④ ۳

تابع

۲۷- با توجه به نمودارهای $f(x)$ و $g(x)=m-f(nx+1)$، حاصل $2m+n$ کدام است؟





① ۴

② ۲

③ ۶

④ ۳

۲۸- نمودار تابع $y=f(2x-1)$ را یک واحد به چپ منتقل کرده، سپس آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و طول نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

① $y=f(1-x)$

② $y=f(2-x)$

③ $y=f(-x)$

④ $y=f(3-4x)$

۲۹- نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده‌ایم و سپس قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور xها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده‌ایم و تابع $y=-|3x-12|$ به‌دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

① $y=9|x-6|$

② $y=\frac{1}{3}|2-x|$

③ $y=|x-6|$

④ $y=|x-2|$

۳۰- با اعمال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع $y=f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y=-\frac{1}{4}f(1-x)$ می‌شود؟

① انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

② انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

③ انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

④ انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ دو تابع f و g برابرند، هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان، داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

$$g(x)=\sqrt{x^{۲}-x^{۳}}=\sqrt{x^{۲}(۱-x)}=\sqrt{x^{۲}}\times\sqrt{۱-x}=|x|\sqrt{۱-x}$$

طبق فرض این تابع با تابع $f(x)=x\sqrt{۱-x}$ برابر است. پس باید داشته باشیم:

$$|x|=x\Rightarrow x\geq ۰ \quad (*)$$

از طرفی باید عبارت $\sqrt{۱-x}$ تعریف شده باشد. پس:

$$۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱ \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌گیریم: $۰\leq x\leq ۱$

۲ - گزینه ۳ شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱ – دامنهٔ دو تابع یکسان باشد.

۲ – برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

$$۱)D_f=D_g=R\ ,\ \ f(-۲)=۲\ ,\ g(-۲)=-۲\Rightarrow f(-۲)\neq g(-۲)$$

$$۲)D_f=D_g=R-\{۰\}\ \ ,\ \ f(-\frac{۱}{۲})=۱\ ,\ g(-\frac{۱}{۲})=-۱\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})\neq g(-\frac{۱}{۲})$$

$$۴)D_f=R\ ,\ D_g=R-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g$$

$۳)D_f=R\ ,\ |x|+۱=۰\Rightarrow |x|=-۱$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_g=R\Rightarrow D_f=D_g=R$

$$f(x)=|x|-۱\ \ ,\ \ g(x)=\frac{x^{۲}-۱}{|x|+۱}\xrightarrow{x^{۲}=|x|^{۲}}g(x)=\frac{|x|^{۲}-۱}{|x|+۱}=\frac{(|x|-۱)(|x|+۱)}{|x|+۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=|x|-۱\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۳ - گزینه ۱ از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b=-۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنهٔ دو تابع باشد. دامنهٔ تابع f را در دو حالت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) $a\geq -۲$

x	-∞		b=-2		a		+∞
(x-a)²(x-b)		−	۰	+	۰	+	

$\rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$

۲) $a<-۲$

x	-∞		a		b=-2		+∞
(x-a)²(x-b)		−	۰	−	۰	+	

$\rightarrow D_f=\{a\}\cup[-۲,+\infty)$

از طرفی چون $D_g=[-۲,+\infty)$ است، پس برای آن‌که $D_f=D_g$ باشد، باید $a\in[-۲,+\infty)$ باشد، پس:

$$a\geq -۲\xrightarrow{+b}a+b\geq\underbrace{-۲+b}_{-۴}\Rightarrow a+b\geq -۴$$

۴ - گزینه ۳ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) به ازای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $y=\sin^{۲}\frac{۱}{x}+\cos^{۲}\frac{۱}{x}\Rightarrow y=۱:D=\mathbb{R}-\{۰\}$

گزینهٔ ۲: $y=\frac{|x|}{|x|}\Rightarrow y=۱:D=\mathbb{R}-\{x\,\|\,x|=۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}$

گزینهٔ ۳: $y=\frac{[x]}{[x]}\Rightarrow y=۱:D=\mathbb{R}-\{x|\,[x]=۰\}=\mathbb{R}-[۰,۱)$

گزینهٔ ۴ : $y=\dfrac{۲^x-۱}{۲^x-۱}\Rightarrow y=۱:D=\mathbb{R}-\{x|۲^x-۱=۰\}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰\}$

بنابراین گزینهٔ «۳» با سایر گزینه‌ها برابر نیست؛ زیرا دامنهٔ متفاوتی دارد.

۵ ـ گزینه ۳ جملهٔ عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n=an+b$ است.

$$\begin{matrix} t_۴=۹\Rightarrow ۴a+b=۹ \\ t_۸=۳\Rightarrow ۸a+b=۳ \end{matrix}\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\,,\,b=۱۵\to t_n=-\frac{۳}{۲}n+۱۵$$

با حل نامعادله‌ی $t(n)>۰$ تعداد جملات مثبت این الگو بدست می‌آید:

$$-\frac{۳}{۲}n+۱۵>۰\Rightarrow \frac{۳}{۲}n<۱۵\to ۳n<۳۰\to n<۱۰$$

پس ۹ جمله‌ی اول دنباله، مثبت هستند.

۶ ـ گزینه ۴

روش اول: جملهٔ عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n=an+b$ است.

$$\begin{matrix} t_۳=۷\Rightarrow ۳a+b=۷ \\ t_۷=۱۵\Rightarrow ۷a+b=۱۵ \end{matrix}\Rightarrow a=۲\,,\,b=۱\to t_n=۲n+۱$$

روش دوم: فقط در گزینهٔ چهارم به ازای $n=۳$, $n=۷$ مقادیر ۷ و ۱۵ حاصل می‌گردد.

۷ ـ گزینه ۲ برای تساوی دو تابع باید دامنه‌های آنها یکسان و ضابطه‌هایشان نیز برابر باشد. پس با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ ۱: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{۱}{x+۲}\Rightarrow x+۲\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۲\} \\ g(x)=\dfrac{x-۲}{x^۲-۴}\Rightarrow x^۲-۴\neq ۰\Rightarrow x\neq \pm ۲\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm ۲\} \end{cases}$

چون $D_f\neq D_g$، پس f و g برابر نیستند.

گزینهٔ ۲: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۴-x^۲}\,,\,۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲\Rightarrow D_f=[-۲,۲] \\ g(x)=\sqrt{۲+x}\times\sqrt{۲-x}\Rightarrow \begin{cases} ۲+x\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲ \\ ۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲ \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\leq x\leq ۲\Rightarrow D_g=[-۲,۲] \end{cases}$

$D_f=D_g$، پس داریم:

$g(x)=\sqrt{۲+x}\times\sqrt{۲-x}=\sqrt{(۲+x)(۲-x)}=\sqrt{۴-x^۲}=f(x)\Rightarrow$ f و g برابرند.

گزینهٔ ۳: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲-۵x+۶}\,,\,x^۲-۵x+۶\geq ۰\Rightarrow (x-۲)(x-۳)\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲ \text{ یا } x\geq ۳ \\ \Rightarrow D_f=(-\infty,۲]\cup[۳,+\infty) \\ g(x)=\sqrt{x-۲}\times\sqrt{x-۳}\Rightarrow \begin{cases} x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲ \\ x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳ \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq ۳\Rightarrow D_g=[۳,+\infty) \end{cases}$

چون $D_f\neq D_g$، پس g و f برابر نیستند.

گزینهٔ ۴: $\begin{cases} f(x)=[x^۲]\Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=[x]^۲\Rightarrow D_g=\mathbb{R} \end{cases}$

$$x=\sqrt{۲}\Rightarrow f(\sqrt{۲})=[(\sqrt{۲})^۲]=[۲]=۲\quad,\quad g(\sqrt{۲})=[\sqrt{۲}]^۲=۱^۲=۱$$

چون $f(\sqrt{۲})\neq g(\sqrt{۲})$، پس f و g برابر نیستند.

۸ ـ گزینه ۴

$$f=g\Rightarrow\{(۲,-۱),(c,d)\}=\{(۲a^۲-۱,b^۲+۱),(b+۱,۲a-۱)\}$$

با توجه به اینکه $b^۲+۱=-۱$ غیر ممکن است، پس داریم:

$$(b+۱,۲a-۱)=(۲,-۱)\Rightarrow b+۱=۲\Rightarrow b=۱\quad,\quad ۲a-۱=-۱\Rightarrow a=۰$$
$$(c,d)=(۲a^۲-۱,b^۲+۱)\Rightarrow(c,d)=(-۱,۲)\Rightarrow c=-۱\quad,\quad d=۲\Rightarrow c+d=-۱+۲=۱$$

۹ ـ گزینه ۴

$$f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$

گزینهٔ ۱) $g(x)=\sqrt{-(۱-x)^۲}\Rightarrow -(۱-x)^۲\geq ۰\Rightarrow(۱-x)^۲\leq ۰\Rightarrow(۱-x)^۲=۰$

$\Rightarrow ۱-x=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_g=\{۱\}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ f و g مساوی نیستند.

گزینهٔ ۲) $g(x)=\sqrt{(۱-x)^۳}\Rightarrow(۱-x)^۳\geq ۰\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_g=(-\infty,۱]=D_f$

$g(x)=\sqrt{(۱-x)^۲(۱-x)}=|۱-x|\sqrt{۱-x}\xrightarrow{x\leq ۱} g(x)=(۱-x)\sqrt{۱-x}\neq f(x)$

$\Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

گزینهٔ ۳) $g(x)=\sqrt{(x-۱)^۳}\Rightarrow (x-۱)^۳\geq ۰\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

$\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

گزینهٔ ۴) $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۳}\Rightarrow D_g=D_f=(-\infty,۱]$

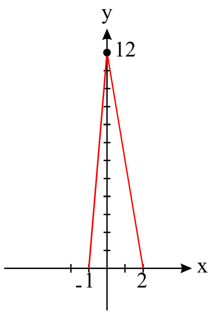
$g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۲(۱-x)}=-|۱-x|\sqrt{۱-x}\xrightarrow{x\leq ۱} g(x)=-(۱-x)\sqrt{۱-x}$

$\Rightarrow g(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}=f(x)\Rightarrow$ g و f برابرند.

۱۰ - گزینه ۳ اول مشخص می‌کنیم که چگونه $y=f(۲x+۵)$ به $y=۳f(-۴x+۱)$ تبدیل شده است.

$$y=f(۲x+۵)\xrightarrow[x\to \frac{۱}{۲}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} y_۱=f(x+۵)\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد راست}} y_۲=f(x+۱)\xrightarrow{\text{طول‌ها } -\frac{۱}{۴} \text{ برابر}} y_۳=f(-۴x+۱)\xrightarrow{\text{عرض‌ها ۳ برابر}} y=۳f(-۴x+۱)$$

پس نمودار $y=۳f(-۴x+۱)$ بدین صورت می‌شود:



$\longrightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۳=۱۸$

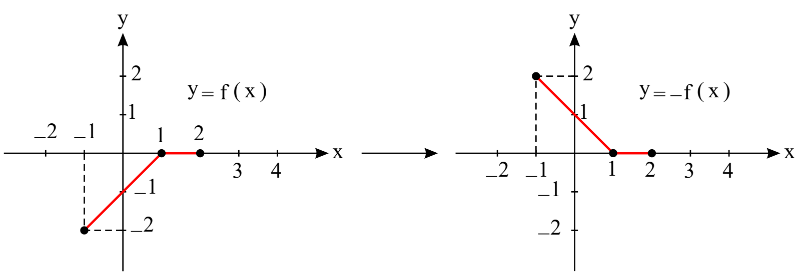
البته می‌توان نقاط متناظر $\Big|^{۰}_{۰}$ و $\Big|^{-۲}_{۴}$ و $\Big|^{-۶}_{۰}$ از تابع $y=f(۲x+۵)$ را روی تابع $y=۳f(-۴x+۱)$ بیابیم.

$\Big|^{۰}_{۰}\xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۵)=۰\xrightarrow[x=-۱]{y=۳f(-۴x+۱)} y=۳f(۵)=۳(۰)=۰\to \Big|^{-۱}_{۰}$

$\Big|^{-۲}_{۴}\xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۱)=۴\xrightarrow[x=۰]{y=۳f(-۴x+۱)} y=۳f(۱)=۳(۴)=۱۲\to \Big|^{۱۲}_{۰}$

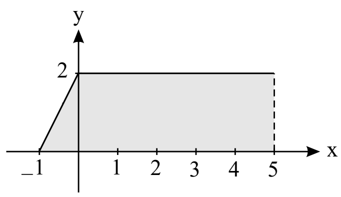
$\Big|^{-۶}_{۰}\xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(-۷)=۰\xrightarrow[x=۲]{y=۳f(-۴x+۱)} y=۳f(-۷)=۳(۰)=۰\to \Big|^{۲}_{۰}$

۱۱ - گزینه ۳ برای پیدا کردن نمودار $y=f(x)$ از روی نمودار $y=f(x-۲)+۱$، ابتدا نمودار را دو واحد به‌طرف چپ و سپس یک واحد به‌طرف پایین انتقال می‌دهیم. در نهایت نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید.



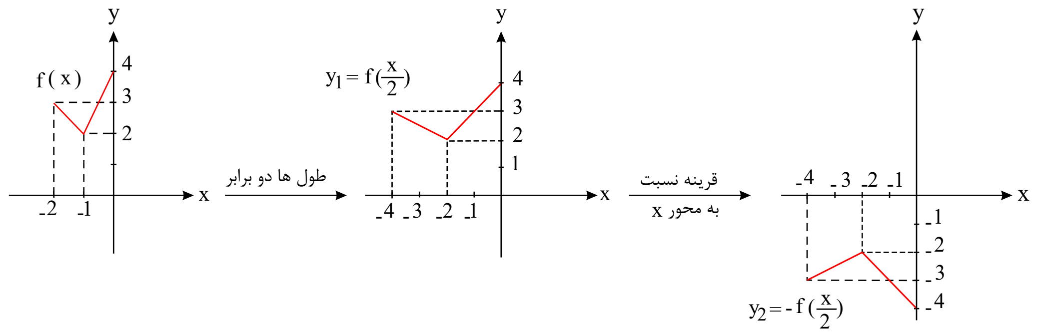
۱۲ - گزینه ۲

$$\begin{array}{l} x\geq ۰\Rightarrow y=f(x-x)=f(۰)=۲\\ x<۰\Rightarrow y=f(x-(-x))=f(۲x)\end{array}\Rightarrow y=\begin{cases}۲ & x\geq ۰\\ f(۲x) & x<۰\end{cases}\Rightarrow$$



مساحت $S=\frac{۱}{۲}(۵+۶)\times ۲=۱۱$

۱۳ - **گزینه ۲** نمودار $h(x)=f(x-۱)-۲$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



۱۴ - **گزینه ۳** نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$f(x)\xrightarrow{x\to\frac{۱}{۲}x} f\left(\frac{۱}{۲}x\right)\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱\Rightarrow g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$$

۱۵ - **گزینه ۴**

$$f(x)=(x+۱)^۲\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲واحد به راست}} y=(x-۲+۱)^۲=(x-۱)^۲\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} g(x)=(x-۱)^۲-۱$$

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x+۱)^۲=(x-۱)^۲-۱\Rightarrow x^۲+۲x+۱=x^۲-۲x+۱-۱\Rightarrow ۴x=-۱$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(-\frac{۱}{۴})=(-\frac{۱}{۴}+۱)^۲=(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۹}{۱۶}$$

۱۶ - **گزینه ۱**

$$y=f(۲-x)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y_۱=f(x+۲)\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}} y_۲=f(x+۴)\xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} g(x)=f(۳x+۴)$$

پس: $-۱\le x\le ۲\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} -۲\le x\le ۱\xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} -۴\le x\le -۱\xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} -\frac{۴}{۳}\le x\le -\frac{۱}{۳}$

۱۷ - **گزینه ۲**

$$\begin{cases} y=f(x)\to\begin{cases}D_f=[۰,۴]\\ R_f=[-۲,۲]\end{cases}\\ y_۱=\frac{۱}{۲}f(x+a)+۱\to\begin{cases}D_{y_۱}=[-a,۴-a]\\ R_{y_۱}=[\frac{۱}{۲}(-۲)+۱,\frac{۱}{۲}(۲)+۱]=[۰,۲]\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases} y=g(x)\to\begin{cases}D_f=[-۴,۴]\\ R_f=[-۱,۱]\end{cases}\\ y_۲=g(۲x)+b\to\begin{cases}D_{y_۲}=[-۲,۲]\\ R_{y_۲}=[-۱+b,۱+b]\end{cases}\end{cases}$$

$D_{y_۱}=D_{y_۲}\to -a=-۲\to a=۲$ یا $۴-a=۲\to a=۲$

$R_{y_۱}=R_{y_۲}\to ۰=-۱+b\to b=۱$ یا $۲=۱+b\to b=۱$

پس $a+b=۳$ است.

۱۸ - **گزینه ۴** ابتدا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\ ۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\ -۲\end{matrix}\right.$ می‌گذرد:

$$AB:\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x-۲}=\frac{۲}{۲}=۱\to y=x-۲\xrightarrow{x=۴} y=۲$$

برد تابع $f(x-۲)$ با تابع $f(x)$ برابر است. بنابراین:

$$R_{f(x)}=[-۲,۲]\Rightarrow R_{۳f(x)}=[-۶,۶]\Rightarrow R_{۳f(x)-۱}=[-۷,۵]$$

$$\Rightarrow ۰\le|۳f(x)-۱|\le ۷\Rightarrow ۰\le\sqrt{|۳f(x)-۱|}\le\sqrt{۷}$$

۱۹ - **گزینه ۲** باید مشخص کنیم با چه انتقال‌هایی تابع $y=f(x)$ به $y=-۲f(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲})+y_۰$ تبدیل می‌شود.

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-\frac{۳}{۲}]{\text{به سمت راست } \frac{۳}{۲}} y_۱=f(x-\frac{۳}{۲})\xrightarrow[x\to\frac{۱}{۲}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} y_۲=f(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲})\xrightarrow{\text{عرض‌ها } -۲ \text{ برابر}} y_۳=-۲f(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲})\xrightarrow[\text{یا پایین}]{\text{به سمت بالا } y_۰} y=-۲f(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲})+y_۰$$

پس: $\begin{vmatrix} ۲x_۰ \\ y_۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{۳}{۲}\ \text{به سمت راست}} \begin{vmatrix} ۲x_۰ + \frac{۳}{۲} \\ y_۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{طول‌ها دو برابر}} \begin{vmatrix} ۴x_۰ + ۳ \\ y_۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{عرض‌ها}\ -۲\ \text{برابر}} \begin{vmatrix} ۴x_۰ + ۳ \\ -۲y_۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{عرض با}\ y_۰\ \text{جمع شود}} \begin{vmatrix} ۴x_۰ + ۳ \\ -y_۰ \end{vmatrix}$

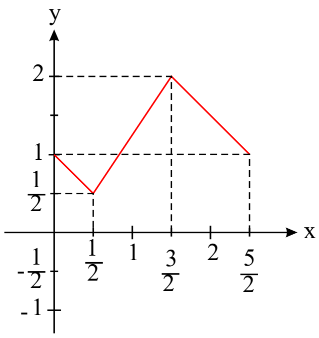
۲۰ - گزینه ۳ با توجه به مراحل زیر داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x \to x+۳} y_۱ = f(x+۳) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور}\ y\text{ها}]{x \to -x} y_۲ = f(-x+۳) \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۲}]{x \to ۲x} y_۳ = f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}\ x\ \text{ها}} y_۴ = -f(-۲x+۳) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب}\ \frac{۱}{۲}} y_۵ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_۶ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳) + ۱$$

با انجام مراحل بالا نمودار $y = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳) + ۱$ به صورت زیر است.



۲۱ - گزینه ۳ نمودار دو تابع $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ $(y = (\frac{۱}{a})^x)$ نسبت به محور yها قرینه هستند، پس داریم:

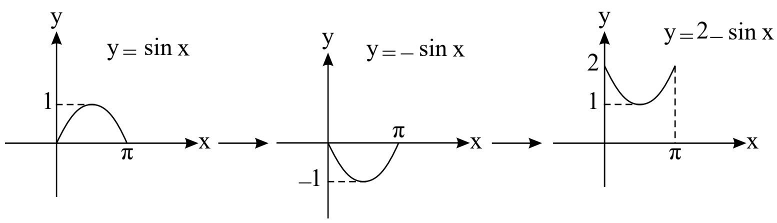
$$(۴a - ۲)(۱ - \frac{a}{۲}) = ۱ \to ۴a - ۲a^۲ - ۲ + a - ۱ = ۰ \to -۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰$$

$$\to ۲a^۲ - ۵a + ۳ = ۰ \to \text{مجموع ریشه‌ها:}\ S = \frac{-b}{a} = -\frac{-۵}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

۲۲ - گزینه ۱

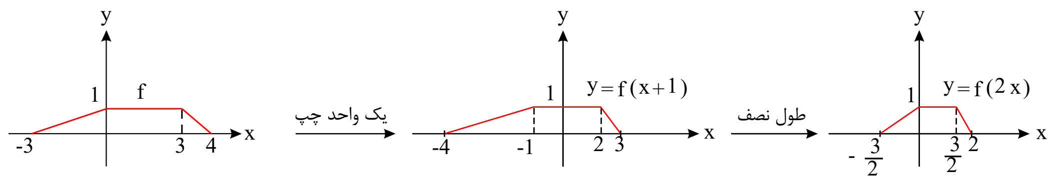
$$y = -\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۲ = -\sin x + ۲$$

حال به کمک انتقال نمودار $y = \sin x$، نمودار تابع $y = ۲ - \sin x$ را در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ رسم می‌کنیم.

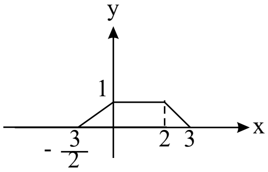


۲۳ - گزینه ۳

برای رسم $f(x+۱)$ باید $f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، همچنین برای رسم $f(۲x)$ باید طول نقاط $f(x)$ را بر ۲ تقسیم کنیم، پس داریم:



$g(x)=\begin{cases} f(x+۱) & ;\ x\ge ۰\\ f(۲x) & ;\ x<۰\end{cases} \longrightarrow$



$\longrightarrow S=\frac{(۴٫۵+۲)\times ۱}{۲}=\frac{۶٫۵}{۲}=\frac{۱۳}{۴}$

۲۴ - گزینه ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$-۱\le x\le ۳ \to -۲\le ۲x\le ۶ \to -۳\le ۲x-۱\le ۵$$

حال به کمک دامنهٔ تابع $y=f(x)$ به دامنهٔ $h(x)=f(۳x+۲)$ می‌رسیم.

$$-۳\le ۳x+۲\le ۵ \to -۵\le ۳x\le ۳\to -\frac{۵}{۳}\le x\le ۱$$

۲۵ - گزینه ۲

$$f(x)=\log_۲(۲x+۴)=\log_۲ ۲(x+۲)=\log_۲^۲+\log_۲(x+۲)=۱+\log_۲(x+۲)$$

اکنون بررسی می کنیم که نمودار $y=\log_۲(x-۱)$ را چگونه به نمودار $y=۱+\log_۲(x+۲)$ تبدیل کنیم:

$$y=۱+\log(x-۱)\xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x\to x+۳} y=\log_۲(x+۲)$$

$$\xrightarrow[\text{۱ واحد به سمت بالا}]{y\to y+۱} y=۱+\log_۲(x+۲)$$

۲۶ - گزینه ۳

$$y=\sqrt{۱-۲x}\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y_۱=\sqrt{۱-۲(x+۱)}\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_۲=\sqrt{-۲x-۱}+۱$$

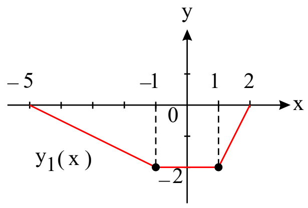
$$\begin{cases}y_۲=\sqrt{-۲x-۱}+۱\\ y=x+۹\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\sqrt{-۲x-۱}+۱=x+۹\longrightarrow\sqrt{-۲x-۱}=x+۸$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲x-۱=x^۲+۶۴+۱۶x\longrightarrow x^۲+۱۸x+۶۵=۰\longrightarrow(x+۵)(x+۱۳)=۰$$

$$\begin{cases}x=-۱۳\ \text{(در معادله صدق نمی‌کند.) غقق}\\ x=-۵\xrightarrow{y=x+۹} y=۴\to A\left|\begin{matrix}-۵:\alpha\\ ۴\ \ :\beta\end{matrix}\right.\to\alpha+\beta=-۱\end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۳

اگر نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به نمودار تابع $y_۱(x)=-f(x+۱)$ خواهیم رسید:



حال با دقت به دو نمودار $g(x)$ و $y_۱(x)$ درمی‌یابیم که برای رسیدن به نمودار تابع $g(x)$، $y_۱(x)$ را باید در راستای افقی، دو برابر منقبض کنیم و سپس دو واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم. یعنی:

$$g(x)=۲+y_۱(۲x)\Rightarrow g(x)=۲-f(۲x+۱)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ n=۲\end{cases}\Rightarrow ۲m+n=۶$$

۲۸ - گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x+۱)-۱)=f(۲x+۱)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-۲x+۱)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای x جملهٔ $\frac{۱}{۲}x$ قرار می‌دهیم. نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ به دست می‌آید.

۲۹ - گزینه ۴ باید مراحل گفته شده را به‌صورت برعکس از انتها به ابتدا انجام دهیم، که داریم:

$$y=-|۳x-۱۲|=-۳|x-۴| \xrightarrow{\text{انقباض در راستای عمودی با ضریب } \frac{۱}{۳}} y=\frac{۱}{۳}\times(-۳)|x-۴|=-|x-۴|$$

$$\xrightarrow[\text{محور } x\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=|x-۴| \xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد انتقال به چپ}} y=|x+۲-۴|=|x-۲|$$

۳۰ - گزینه ۲

$$y=f(x) \xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد انتقال به چپ}} f(x+۱) \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ها}} f(-x+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ها}} -f(-x+۱) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۴}} y=-\frac{۱}{۴}f(-x+۱)$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۳	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۱	۲۷ - ۳
۳ - ۱	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۴	۲۳ - ۳	۲۸ - ۱
۴ - ۳	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۴
۵ - ۳	۱۰ - ۳	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲