نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

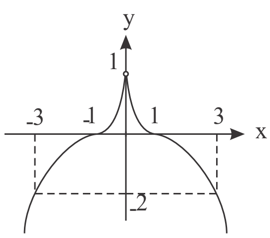
۱ - از میان ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۷ نفر فقط فوتبال و ۴ نفر فقط والیبال بازی می‌کنند، اگر ۳ دانش‌آموز در هیچ کدام از دو رشته بازی نکنند، چند دانش‌آموز فوتبال بازی می‌کنند؟

۲ - اگر مجموعه‌ی مرجع $U=\{-۳,-۱,۰,۱,۴,۷,۸,۹,۱۰\}$ باشد و $A=\{-۳,۴\}$، $B=\{-۱,۰,۱,۹,۱۰\}$ و $C=\{-۳,-۱,۱,۷,۹\}$ باشد، حاصل $(C-A)'\cap B$ کدام است؟

۳ - به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{x^۲+a}$ به‌صورت $(-\infty,۰)$ می‌باشد؟

۴ - اگر $f(x)=a^۲+\sqrt{\dfrac{a}{۲}x+۲}$ و مجموعه تمام مقادیری از x که به‌ازای آن تابع f قابل‌تعریف است، بازهٔ $(-\infty,۲]$ باشد، برد تابع f کدام است؟

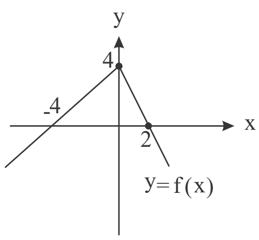
۵ - اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|f(x)|-۲}$ کدام است؟



۶- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+ax+1}$ همهٔ اعداد حقیقی باشد، a چند مقدار صحیح را می‌تواند بپذیرد؟

۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{[\frac{x}{2}]-1}$ به صورت $[a,b)$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{2-|f(x)|}$ کدام است؟



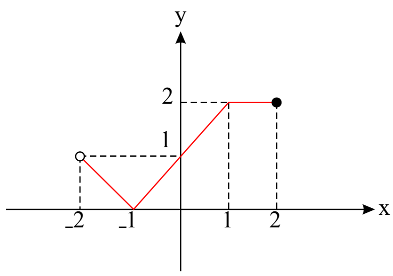
۹- اگر تابع $f(x)=\dfrac{2x+7}{mx^2-6x+n}$ به‌ازای مجموعه مقادیر $R-\{\frac{1}{2},1\}$ قابل تعریف باشد، $f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ $(m\,,n\in R)$

۱۰ - اگر تابع $f(x)=\dfrac{1-x}{(m-1)x^2+3x+1}$ تنها به‌ازای یک مقدار x قابل تعریف نباشد، m چند مقدار می‌تواند اختیار کند؟

۱۱ - اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x^2-6x+a}}$ به‌صورت $x\in(-\infty,1)\cup(b,+\infty)$ باشد، در این صورت $a\times b$ کدام است؟ $(b\geq 1)$

۱۲ - دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{-4x^2-3x+1}$ کدام است؟

۱۳ - اگر نمودار $y=f(x-1)$ به صورت مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x)-1}$ کدام است؟



۱۴ - اگر $U=\{-2,-1,1,2,4,7\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A=\{-2,1,7\}$ و $B=\{-1,1,2,4,7\}$ و $C=\{-2,1,4\}$ باشد، حاصل $(A\cup B)'\cap C$ کدام است؟

۱۵ - در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

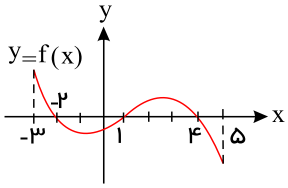
۱۶ - اگر $y=\sqrt{-x(x-1)^3}$، کدام مقادیر برای x قابل انتخاب است؟

۱۷ - اگر $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ دامنه‌ی تعریف تابع $f(1-2x)$ کدام است؟

۱۸ - اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sin \pi x}$، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف f شامل کدام بازه است؟

۱۹ - اگر $f(x)=3x-1$، نمودار تابع f با دامنه‌ی $\{0,1,2,3\}$ چگونه است؟

۲۰ - شکل مقابل نمودار تابع $y = f\left(x\right)$ است. دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf\left(x\right)}$ کدام است؟

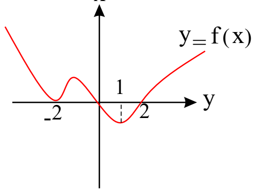


۲۱ - عبارت $\dfrac{۱}{[\sqrt{\log_{۲}^{x}}]}$ در کدام بازه قابل تعریف است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

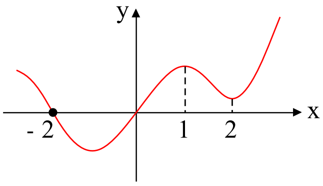
۲۲ - دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log_{۰/۲۵}^{(x-۳)}}$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۲۳ - دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sin(\log(x-۱))$ ، کدام است؟

۲۴ - شکل روبه‌رو نمودار $y = f(x)$ است دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{(۲x-۲)f(x)}$ کدام است؟



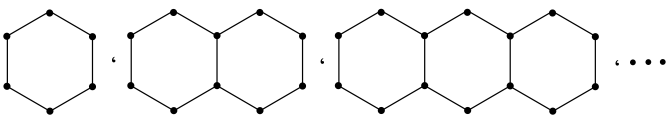
۲۵- اگر تابع $y=f(x)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $y=x\sqrt{\frac{۱}{-f(x)}}$ کدام است؟



۲۶- اگر دو تابع $f(x)=\frac{ax^۳+b}{۲x^۳-c}$ و $\begin{cases} g(x)=۲ \\ D_g=\mathbb{R}-\{-۱\} \end{cases}$ با هم مساوی باشند، $a+b+c$ کدام است؟

۲۷- نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_۴^x$ و $g(x)=\log_۲^{\sqrt{x}}$ نسبت به‌هم چگونه هستند؟

۲۸- باتوجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله دهم کدام است؟



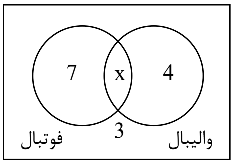
۲۹- اگر c_n جمله عمومی یک الگوی خطی، $c_۴=۱۷$ و $c_{۱۰}=۴۱$ باشد، c_n کدام است؟

۳۰ - کدام دو تابع با هم مساوی‌اند؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

اطلاعات مسئله را روی شکل روبرو نشان می‌دهیم:



$\to ۷ + x + ۴ + ۳ = ۲۰ \to x = ۶$

$۱۳ = ۶ + ۷$ = تعداد دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند.

۲ - گزینه ۳

$$\begin{matrix} C - A = \{-۱, ۱, ۷, ۹\} \\ (C - A)' = \{-۳, ۰, ۴, ۸, ۱۰\} \end{matrix} \to (C-A)' \cap B = \{۰, ۱۰\}$$

۳ - گزینه ۳ با توجه به عبارت $\sqrt{-x}$ باید $-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰$ یعنی دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty, ۰]$ بوده است که در سوال به‌صورت $(-\infty, ۰)$ داده شده است.

مشخص است که باید $x = ۰$ ریشهٔ مخرج باشد تا از دامنه حذف گردد، لذا:

$$x^۲ + a = ۰ \xrightarrow{x=۰} ۰^۲ + a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

۴ - گزینه ۲ تابع f در محدودهٔ $x \leq ۲$ قابل‌تعریف است. با توجه به ضابطهٔ تابع، برای به‌دست آوردن a عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{۲}x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow \frac{a}{۲}x \geq -۲ \Rightarrow ax \geq -۴ \quad (*)$$

با معادل‌سازی نابرابری $(*)$ با محدودهٔ داده شده در سؤال، مشخص است که علامت a منفی است. پس با تقسیم رابطهٔ $(*)$ بر a جهت نامساوی عوض می‌شود، پس:

$$ax \geq -۴ \xrightarrow{\div a} x \leq -\frac{۴}{a} \Rightarrow \frac{-۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x) = ۴ + \sqrt{-x + ۲}$ می‌باشد. حال با داشتن ضابطهٔ تابع برد را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{-x + ۲} \geq ۰ \to ۴ + \sqrt{-x + ۲} \geq ۴ \Rightarrow f(x) \geq ۴$$

پس برد تابع به‌صورت $[۴, +\infty)$ می‌باشد.

۵ - گزینه ۳

$$y = \sqrt{|f(x)| - ۲} \Rightarrow |f(x)| - ۲ \geq ۰ \Rightarrow |f(x)| \geq ۲ \Rightarrow f(x) \leq -۲ \text{ یا } f(x) \geq ۲$$

$f(x) \geq ۲$ یعنی قسمتی از نمودار f که نمودار بالاتر از خط $y = ۲$ قرار دارد که در نمودار تابع f چنین اتفاقی نمی‌افتد یعنی $f(x) \geq ۲$ جواب ندارد.

$f(x) \leq -۲$ یعنی قسمتی از نمودار f که در آن نمودار زیر خط $y = -۲$ قرار دارد که با توجه به نمودار f داریم:

$$f(x) \leq -۲ \Rightarrow x \leq -۳ \text{ یا } x \geq ۳ \Rightarrow |x| \geq ۳$$

۶ - گزینه ۳ از آنجائی که دامنهٔ تابع کل اعداد حقیقی است، پس مخرج نباید هیچگاه صفر شود، یعنی:

$$x^۲ + ax + ۱ = ۰ \Rightarrow \text{ریشه نداشته باشد} \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴ < ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ < ۴ \Rightarrow \sqrt{a^۲} < \sqrt{۴} \Rightarrow |a| < ۲ \Rightarrow -۲ < a < ۲$$

$$a \text{ مقدار صحیح } = -۱, ۰, ۱ \Rightarrow \text{ مقدار } ۳$$

توجه نمایید که قبل از ساده نمودن دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

۷ - گزینه ۳

زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

در ضمن مخرج نباشد صفر باشد:

$$[\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۴$$

$$D_f = [-۲, ۲] - [۲, ۴) = [-۲, ۲) = [a, b) \to b - a = ۲ - (-۲) = ۴$$

۸ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم، برای این کار معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۰, ۴)$ و $(۲, ۰)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۰, ۴)$ و $(-۴, ۰)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$(۰, ۴), (۲, ۰) \Rightarrow \frac{y - ۴}{x} = \frac{۴}{-۲} = -۲ \to y = -۲x + ۴$$

$$(۰, ۴), (-۴, ۰) \Rightarrow \frac{y - ۴}{x} = \frac{۴}{۴} = ۱ \to y = x + ۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x + ۴ & x < ۰ \\ -۲x + ۴ & x \geq ۰ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \sqrt{۲ - |f(x)|} \Rightarrow ۲ - |f(x)| \geq ۰ \Rightarrow |f(x)| \leq ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \leq f(x) \leq ۲$$

$x < ۰ \Rightarrow -۲ \leq x + ۴ \leq ۲ \Rightarrow -۲ - ۴ \leq x \leq ۲ - ۴ \Rightarrow -۶ \leq x \leq -۲ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x \leq -۲ \quad (۱)$

$x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq -۲x + ۴ \leq ۲ \Rightarrow -۶ \leq -۲x \leq -۲ \xrightarrow{\div(-۲)} ۳ \geq x \geq ۱ \xrightarrow{x\geq ۰} ۱ \leq x \leq ۳ \quad (۲)$

جواب نهایی : $(۱) \cup (۲) \Rightarrow [-۶, -۲] \cup [۱, ۳]$

۹ ـ گزینه ۳

در توابع گویا اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند در دامنهٔ تابع قرار ندارند. بنابراین اعداد $\frac{۱}{۲}$ و ۱ مخرج تابع $f(x)$ را صفر می‌کنند.

$x = ۱ \Rightarrow m \times ۱^۲ - ۶ \times ۱ + n = ۰ \Rightarrow m - ۶ + n = ۰ \Rightarrow m + n = ۶ \quad (۱)$

$x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m \times (\frac{۱}{۲})^۲ - ۶ \times \frac{۱}{۲} + n = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}m - ۳ + n = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}m + n = ۳ \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} m + n = ۶ \\ -\frac{۱}{۴}m - n = -۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۴}m = ۳ \Rightarrow m = ۴ \Rightarrow n = ۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{۲x + ۷}{۴x^۲ - ۶x + ۲}$ می‌باشد. اکنون به محاسبهٔ $f(-\frac{۱}{۲})$ می‌پردازیم:

$$f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲ \times (-\frac{۱}{۲}) + ۷}{۴ \times (-\frac{۱}{۲})^۲ - ۶ \times (-\frac{۱}{۲}) + ۲} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

۱۰ ـ گزینه ۲ دو حالت وجود دارد.

الف) مخرج عبارتی درجه اول باشد یعنی $m = ۱$ که داریم:

$$f(x) = \frac{۱ - x}{۳x + ۱} \Rightarrow ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$$

ب) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد یعنی:

$$(m - ۱)x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴(m - ۱) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱۳}{۴}$$

بنابراین برای m دو مقدار ۱ و $\frac{۱۳}{۴}$ وجود دارد.

۱۱ ـ گزینه ۳ برای محاسبهٔ پارامتر a و b ابتدا باید مراحل تعیین دامنهٔ تابع f را طی نماییم:

زیر رادیکال $> ۰ \rightarrow ۲x^۲ - ۶x + a > ۰$

عبارت درجه دو باید دو ریشه داشته باشد که یکی از آن‌ها $x = ۱$ خواهد بود. زیرا بر اساس دامنهٔ مطرح شده در متن سوال جدول تعیین علامت به صورت زیر می‌باشد:

x		1		b	
$2x^2-6x+a$	+	o	−	o	+

$۲x^۲ - ۶x + a \overset{x=۱}{=\!=} ۰ \rightarrow ۲ - ۶ + a = ۰ \rightarrow a = ۴$

$۲x^۲ - ۶x + ۴ = ۰ \rightarrow ۲(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰ \rightarrow ۲(x - ۱)(x - ۲) = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$

پس ریشهٔ دوم این عبارت درجه دو $x = ۲$ می‌باشد که همان پارامتر b است.

$$\begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a \times b = ۴ \times ۲ = ۸$$

۱۲ ـ گزینه ۱ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$-۴x^۲ - ۳x + ۱ \geq ۰ \rightarrow ۴x^۲ + ۳x - ۱ \leq ۰ \rightarrow$

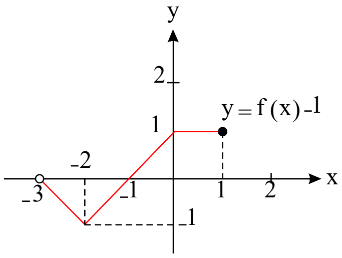
x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۴}$		$+\infty$
عبارت ≤ ۰		+	۰	−	۰	+	

$\rightarrow x \in [-۱, \frac{۱}{۴}]$

۱۳ ـ گزینه ۴ برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f(x) - ۱}$، باید زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x) - ۱ \geq ۰$

با استفاده از نمودار $y = f(x - ۱)$، نمودار $y = f(x) - ۱$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید نمودار داده شده را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم. نمودار حاصل به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به نمودار، نامعادله‌ی $f(x) - 1 \geq 0$ فقط در فاصله‌ی $[-1, 1]$ برقرار است، پس دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[-1, 1]$ است.

۱۴ - گزینه ۲

$$A \cup B = \{-2, 1, 7\} \cup \{-1, 1, 2, 4, 7\} = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\} \to (A \cup B)' = \phi$$

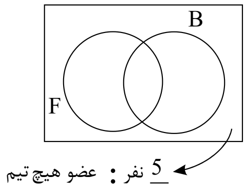
پس : $(A \cup B)' \cap C =$ تهی $\cap C =$ تهی $= \{\ \}$

مجموعه تهی، مجموعه‌ای بدون عضو است، بنابراین اشتراک آن با هر مجموعه‌ی دیگر، تهی است.

۱۵ - گزینه ۳

اگر فوتبال را با F و بسکتبال را با B نشان دهیم:

$$\begin{cases} n(F) = 15 \\ n(B) = 11 \end{cases} \Rightarrow n(F \cup B) = 25 - 5 = 20$$



از طرفی : $n(F \cup B) = n(F) + n(B) - \underbrace{n(F \cap B)}_{\text{تعداد اعضای هر دو تیم}} \Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(F \cap B)$

$$\Rightarrow n(F \cap B) = 15 + 11 - 20 = 6$$

۱۶ - گزینه ۲ زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$-x(x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline y & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow D_f = [0, 1]$$

۱۷ - گزینه ۴

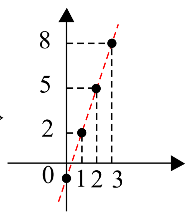
$$x - x^2 = x(1-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow D_f : 0 \leq x \leq 1$$

حال داریم: $0 \leq 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ یا $x \in [0, \frac{1}{2}]$

۱۸ - گزینه ۲ $\sin \pi x$ نباید صفر شود، یعنی باید هیچ عدد صحیحی در بازه نباشد، (اگر x صحیح باشد، $\sin \pi x$ صفر می‌شود) پس گزینه‌ی ۲ مناسب است.

۱۹ - گزینه ۳

$x = 0 \to f(0) = -1$
$x = 1 \to f(1) = 2$
$x = 2 \to f(2) = 5$
$x = 3 \to f(3) = 8$
$\to$



$\to$ شکل، شامل ۴ نقطه است.

۲۰ - گزینه ۱ با توجه به نمودار $f(x)$ و دامنهٔ تابع‌های رادیکالی داریم:

$$\sqrt{xf(x)} : \text{دامنه} \to xf(x) \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \xrightarrow{\text{باید هم‌علامت باشند } x,y} [-2, 0] \cup [1, 4]$$

۲۱ - گزینه ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس $x > 0$ است. عبارت داخل جزء صحیح به خاطر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌باشد در ضمن اگر عبارت داخل جزء صحیح، صفر یا بین صفر و یک باشد مخرج را صفر می‌کند پس عبارت داخل جزء صحیح باید بزرگتر مساوی یک باشد.

$$\sqrt{\log_2^x} \geq 1 \to \log_2^x \geq 1 \to \log_2^x \geq \log_2^2 \to x \geq 2$$

از اشتراک $x > 0$ و $x \geq 2$ به جواب $x \geq 2$ می‌رسیم که گزینه‌ی چهارم زیر مجموعه‌ای از جواب است.

۲۲ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \geq m \xrightarrow{0<a<1} A \leq a^m}$

برای پیدا کردن دامنه ی تعریف تابع، باید جلوی لگاریتم مثبت باشد و زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$x - 3 > 0 \to x > 3 \qquad (I)$$

$\log_{0/25}^{x-3} \geq 0 \to x-3 \leq (0/25)^{0} \to x-3 \leq 1 \to x \leq 4 \quad (II)$

از اشتراک I و II به جواب $3 < x \leq 4$ می‌رسیم که شامل یک عدد طبیعی $x=4$ است.

۲۳ – گزینه ۳ سینوس در تعیین دامنه هیچ نقشی ندارد و برای تعیین دامنه ی تعریف لگاریتم کافی است فقط عبارت جلوی لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار دهیم (در حالتی که مبنا یک عدد باشد)

$x-1>0 \to x>1$ یا $x \in (1,+\infty)$

۲۴ – گزینه ۳ باتوجه به شکل، دامنه‌ی تعریف تابع $y=f(x)$ برابر R است. برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف، زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$(2x-2)f(x) \geq 0 \to 2x-2=0 \to x=1$

$f(x)=0 \to x=-2\,,\ x=0\,,\ x=2$ (محل تلاقی تابع $y=f(x)$ با محور xها)

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-2)f(x) \geq 0$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x \in [0,1] \cup [2,+\infty) \cup \{-2\}$

۲۵ – گزینه ۴ کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$\dfrac{1}{-f(x)} \geq 0 \to f(x)<0 \to -2<x<0$ یا $x \in (-2,0)$

در فاصله‌ی $(-2,0)$ تابع $y=f(x)$ زیر محور xها بوده و منفی می‌باشد.

۲۶ – گزینه ۲ باید دامنهٔ دو تابع یکسان باشد یعنی $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ پس باید مخرج تابع f به‌ازای $x=-1$ صفر شود.

$2x^3-c=0 \xrightarrow{x=-1} -2-c=0 \Rightarrow c=-2$

باید ضابطهٔ دو تابع به‌ازای هر x از دامنهٔ تابع یکسان باشد.

$f(x)=g(x)=2 \Rightarrow \dfrac{ax^3+b}{2x^3+2}=2 \Rightarrow ax^3+b=4x^3+4 \Rightarrow a=4 \quad , \quad b=4$

پس: $a+b+c=4+4-2=6$

۲۷ – گزینه ۴

ضابطه‌ها یکسان هستند $f(x)=\log_4^x=\log_{2^2}^{\sqrt{x}^2}=\log_2^{\sqrt{x}}=g(x)$ دامنه‌ی تعریف هر دو تابع هم $(0,+\infty)$ است، پس نمودارها منطبق هستند.

۲۸ – گزینه ۲ دنباله‌ی تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله را می‌نویسیم. $6, 11, 16, \cdots$ ($+5$ ، $+5$)

این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است و می‌دانیم که جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$a_n=a_1+(n-1)d$

پس : $a_{10}=a_1+9d=6+9(5)=6+45=51$

۲۹ – گزینه ۲ روش اول

جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی بصورت $c_n=an+b$ است:

$$\begin{matrix} c_4=17 \Rightarrow 4a+b=17 \\ c_{10}=41 \Rightarrow 10a+b=41 \end{matrix} \Rightarrow a=4\,,\ b=1 \to c_n=4n+1$$

روش دوم: فقط در گزینهٔ دوم به ازای $n=4\,,\ n=10$ مقادیر ۱۷ و ۴۱ حاصل می‌گردد.

۳۰ – گزینه ۱ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنهٔ دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

گزینهٔ ۲) $D_f=\mathbb{R}\,,\ D_g: x \geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینهٔ ۳) $D_f: x\,|x| \geq 0 \xrightarrow{|x|\geq 0} x \geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)\,,\ D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینهٔ ۴) $D_f: x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\,,\ D_g: x \geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

جواب گزینهٔ ۱ می‌باشد زیر:

$f(x)=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

$g(x)=\sqrt{x\,|x|} \Rightarrow x\,|x| \geq 0 \xrightarrow{|x|\geq 0} x \geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty) \Rightarrow D_f=D_g=[0,+\infty)$

$x \geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow g(x)=\sqrt{x\,|x|}=\sqrt{x \cdot x}=\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2=f(x)$

f و g برابرند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۱	۱۷ - ۴	۲۲ - ۱	۲۷ - ۴
۳ - ۳	۸ - ۳	۱۳ - ۴	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۱	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱