نام آزمون: تابع وارون

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - توابع $f=\{(۰,۱),(-۱,۲),(۱,۳),(۳,۴)\}$ و $g(x)=۱+\frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og)(a)=f(۰)$ باشد، a کدام است؟

① ۱۶

② ۱۷

③ ۴

④ ۵

۲ - اگر تابع $f(x)=ax+۲$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

① ۱

② -۱

③ ۵

④ -۵

۳ - اگر $f(x)=x^۲-\sqrt{۳x}$ و $g=\{(-۲,۰),(۰,۳),(۱,-۱),(۳,-۲)\}$ باشند، آنگاه حاصل $(fog^{-۱})(-۲)$ کدام است؟

① صفر

② ۳

③ ۶

④ تعریف نشده

۴ - ضابطهٔ وارون تابع $y=۲x-۳|x-۱|$ در بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۵}; x<۲$

② $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۵}; x\leq ۳$

③ $f^{-۱}(x)=x-۳; x\geq ۲$

④ $f^{-۱}(x)=x-۳; x\geq ۳$

۵- اگر $f(x)=x+x\,|x|$ با دامنهٔ $[-۱,۲)$ در نظر گرفته شود، تعداد اعداد صحیح در دامنهٔ تابع $f^{-۱}of$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) ۸
(۳) ۲
(۴) ۶

۶- اگر $f(x)=-۲x+b$ تابعی خطی باشد و نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ از نقطهٔ $(۶,۸)$ بگذرد و $g(x)=-۱/۵x+۶$ باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x)$ و وارون تابع $f(x)$ در نقطه‌ای با کدام طول یکدیگر را قطع می‌کنند؟

(۱) ۵
(۲) -۵
(۳) ۳۲
(۴) -۳۲

۷- دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۶),(۴,۷)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ مفروض‌اند. به‌ازای چند مقدار a، $f^{-۱}(g(۳a))=۳$ می‌باشد؟

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۸- مجموعهٔ طول نقاط مشترک نمودار توابع $f(x)=\sqrt[۳]{۴-x^۳}$ و $f^{-۱}(x)$، چند عضو دارد؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) این مجموعه نامتناهی است.

۹- اگر $f(x)=\sqrt{4-x}+2$ و نقاط A و B ابتدا و انتهای نمودار تابع $h(x)=(fof^{-1})(x)+(f^{-1}of)(x)$ باشند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$

۲) $2\sqrt{5}$

۳) $4\sqrt{5}$

۴) $9\sqrt{5}$

۱۰- اگر $f=\{(1,5),(2,0),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(-1,4),(2,1),(0,3)\}$ باشند، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $\dfrac{2f}{g^{-1}}$ کدام است؟

۱) -7

۲) -60

۳) صفر

۴) ۳۶

۱۱- نمودار وارون تابع $f(x)=1-\sqrt{x+3}$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

۱۲- اگر تابع اکیداً صعودی $f(x)=\dfrac{mx-2}{3}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$، نمودار تابع وارون خود را قطع کند، ضابطهٔ تابع وارون کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+2}{5}$

۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{5}$

۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{5x-2}{3}$

۴) $f^{-1}(x)=\dfrac{5x+2}{3}$

۱۳ - اگر $f=\{(-۱,۳),(۰,۲),(۲,۱),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱,-۲),(-۲,۰),(۳,-۱),(۰,۱)\}$ باشند و داشته باشیم: $(gof^{-۱})(a)=۱$، آنگاه مقدار $(fog)(-a)$ کدام است؟

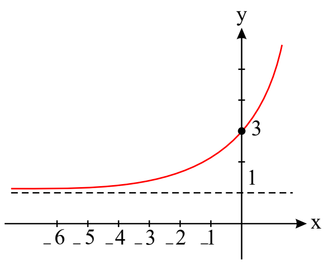
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۱۴ - شکل مقابل، مربوط به نمودار وارون تابع $f(x)=\log_{۲}^{(x+a)}+b$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۲

۲) -۲

۳) صفر

۴) -۱

۱۵ - محل برخورد وارون تابع $f(x)=۲x-|x|+۳$ با محور yها از نیمساز ربع اول و سوم چقدر فاصله دارد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۱۶ - اگر $f(x)=\frac{۱}{۴}x-۸\ ,\ g(x)=x^{۳}$ باشد، حاصل $(fog)^{-۱}(۸)-(f^{-۱}og^{-۱})(۸)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) -۱۶

۳) ۳۶

۴) -۳۶

۱۷ - نمودار تابع $f(x) = |۲x - ۸| - |x + ۳|$ در یک بازه اکیداً صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

(۱) $f^{-۱}(x) = x + ۱۱ \; ; \; x > -۷$

(۲) $f^{-۱}(x) = x - ۱۱ \; ; \; x > -۵$

(۳) $f^{-۱}(x) = x + ۱۱ \; ; \; x > -۵$

(۴) $f^{-۱}(x) = x - ۱۱ \; ; \; x > -۷$

۱۸ - اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ \; ; \; x \geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}(x)$ و $g(x) = \dfrac{x - ۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۸

(۴) ۲۱

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$(f^{-1}og)(a)=f(\text{۰})\xrightarrow{f(\text{۰})=\text{۱}}(f^{-1}og)(a)=\text{۱}\Rightarrow f^{-1}(g(a))=\text{۱}\Rightarrow f(\text{۱})=g(a)$$

$$f(\text{۱})=\text{۳}\Rightarrow g(a)=\text{۳}\Rightarrow \text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sqrt{a-\text{۱}}=\text{۳}\Rightarrow \sqrt{a-\text{۱}}=\text{۴}\Rightarrow a-\text{۱}=\text{۱۶}\Rightarrow a=\text{۱۷}$$

۲ - گزینه ۲ وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y=ax+\text{۲}\Rightarrow x=\frac{y-\text{۲}}{a}\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y}y=\frac{x-\text{۲}}{a}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\text{۱}}{a}x-\frac{\text{۲}}{a}$$

اگر f و f^{-1} در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هردو توابع خطی هستند، باید برهم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow ax+\text{۲}=\frac{\text{۱}}{a}x-\frac{\text{۲}}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\text{۱}}{a}\\ \text{۲}=-\frac{\text{۲}}{a}\end{cases}\Rightarrow a=-\text{۱}$$

پس ضابطهٔ f و f^{-1} به‌صورت $f(x)=f^{-1}(x)=-x+\text{۲}$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-1}(\text{۳})=-\text{۳}+\text{۲}=-\text{۱}$$

۳ - گزینه ۳

$$g=\{(-\text{۲},\text{۰}),(\text{۰},\text{۳}),(\text{۱},-\text{۱}),(\text{۳},-\text{۲})\}\rightarrow g^{-1}=\{(\text{۰},-\text{۲}),(\text{۳},\text{۰}),(-\text{۱},\text{۱}),(-\text{۲},\text{۳})\}$$

پس : $(fog^{-1})(-\text{۲})=f(g^{-1}(-\text{۲}))=f(\text{۳})=\text{۹}-\sqrt{\text{۹}}=\text{۹}-\text{۳}=\text{۶}$

۴ - گزینه ۱ در ابتدا شرط گذاشته و قدرمطلق را از بین می‌بریم.

$x\geq\text{۱}\rightarrow y=\text{۲}x-\text{۳}(x-\text{۱})\rightarrow y=-x+\text{۳}\rightarrow m=-\text{۱}\rightarrow$ نزولی

$x<\text{۱}\rightarrow y=\text{۲}x-\text{۳}(-x+\text{۱})\rightarrow y=\text{۵}x-\text{۳}\rightarrow m=\text{۵}\rightarrow$ صعودی

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع معکوس، x را برحسب y بدست می‌آوریم سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=\text{۵}x-\text{۳}\rightarrow \text{۵}x=y+\text{۳}\rightarrow x=\frac{y+\text{۳}}{\text{۵}}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+\text{۳}}{\text{۵}}$$

توجه کنید که دامنهٔ تابع معکوس، برد تابع اصلی است پس باید برد تابع $y=\text{۵}x-\text{۳}$ را با شرط $x<\text{۱}$ بدست آوریم.

$$x<\text{۱}\rightarrow \text{۵}x<\text{۵}\rightarrow \text{۵}x-\text{۳}<\text{۲}\rightarrow y<\text{۲}$$

پس دامنهٔ تابع معکوس، $x<\text{۲}$ است.

۵ - گزینه ۱ می‌دانیم که $D_{f^{-1}of}=D_f$ است پس تعداد اعداد صحیح در این بازه برابر با ۳ است. یعنی اعداد: $(-\text{۱},\text{۰},\text{۱})$.

۶ - گزینه ۲

می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$\left|\begin{matrix}\text{۸}\\ \text{۶}\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=-\text{۲}x+b}\text{۶}=-\text{۱۶}+b\rightarrow b=\text{۲۲}\rightarrow f(x)=-\text{۲}x+\text{۲۲}$$

$$y=-\text{۲}x+\text{۲۲}\rightarrow \text{۲}x=-y+\text{۲۲}\rightarrow x=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}y+\text{۱۱}\rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x+\text{۱۱}$$

$$f^{-1}(x)=g(x)\rightarrow -\frac{x}{\text{۲}}+\text{۱۱}=-\text{۱٫۵}x+\text{۶}\rightarrow \text{۱٫۵}x-\text{۰٫۵}x=\text{۶}-\text{۱۱}\rightarrow x=-\text{۵}$$

۷ - گزینه ۲

اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$f^{-1}(g(\text{۳}a))=\text{۳}\Rightarrow f(\text{۳})=g(\text{۳}a)\Rightarrow g(\text{۳}a)=\text{۶}\Rightarrow \text{۳}a+\sqrt{\text{۳}a}=\text{۶}\ *$$

$$\Rightarrow\sqrt{\text{۳}a}=\text{۶}-\text{۳}a\Rightarrow \text{۳}a=\text{۳۶}-\text{۳۶}a+\text{۹}a^{\text{۲}}\Rightarrow \text{۹}a^{\text{۲}}-\text{۳۹}a+\text{۳۶}=\text{۰}$$

$$\Rightarrow \text{۳}a^{\text{۲}}-\text{۱۳}a+\text{۱۲}=\text{۰}\Rightarrow(\text{۳}a-\text{۴})(a-\text{۳})=\text{۰}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\\ a=\text{۳}\end{cases}$$

$a = ۳ \xrightarrow{*} ۹ + \sqrt{۹} = ۶ \Rightarrow ۹ + ۳ = ۶$ غلط $\Rightarrow a = ۳$ غیرقابل‌قبول

$a = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{*} ۴ + \sqrt{۴} = ۶ \Rightarrow ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow a = \frac{۴}{۳}$ قابل‌قبول

۸ - گزینه ۴ ابتدا تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۴ - x^۳}$ را می‌یابیم.

$$y = \sqrt[۳]{۴ - x^۳} \Rightarrow y^۳ = ۴ - x^۳ \Rightarrow x^۳ = ۴ - y^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۴ - y^۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۴ - x^۳}$$

باتوجه به این‌که وارون تابع f برابر با خود تابع f می‌باشد، پس معادلهٔ $f(x) = f^{-۱}(x)$ بی‌شمار جواب دارد.

۹ - گزینه ۲ می‌دانیم ترکیب هرتابع وارون‌پذیر با تابع وارونش، تابع همانی است و داریم:

$$(f^{-۱}of)(x) = x \ , \ x \in D_f \qquad , \qquad (fof^{-۱})(x) = x \ , \ x \in R_f$$

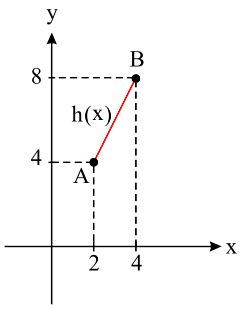
ابتدا دامنه و برد تابع را می‌یابیم.

$$f(x) = \sqrt{۴ - x} + ۲ \ , \ ۴ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۴ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۴]$$

$$\sqrt{۴ - x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۴ - x} + ۲ \geq ۲ \Rightarrow f(x) \geq ۲ \Rightarrow R_f = [۲, +\infty)$$

$$h(x) = (fof^{-۱})(x) + (f^{-۱}of)(x) \Rightarrow D_h = D_{fof^{-۱}} \cap D_{f^{-۱}of} = D_{f^{-۱}} \cap D_f = R_f \cap D_f = [۲, ۴]$$

$$\Rightarrow h(x) = x + x = ۲x \ , \ x \in [۲, ۴]$$



$$\Rightarrow AB = \sqrt{(۴ - ۲)^۲ + (۸ - ۴)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۰ - گزینه ۲

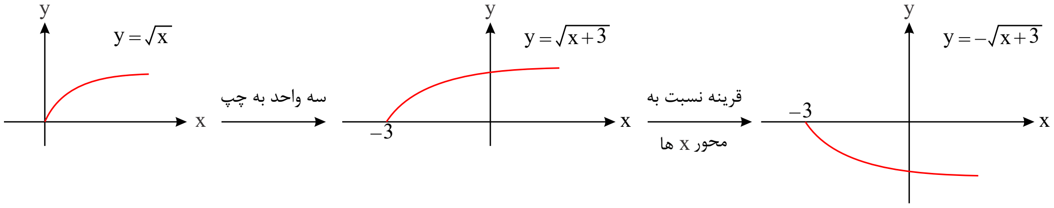
$$۲f = \{(۱, ۱۰), (۲, ۰), (۳, ۸), (۴, ۱۲)\} \quad ، \quad g^{-۱} = \{(۴, -۱), (۱, ۲), (۳, ۰)\}$$

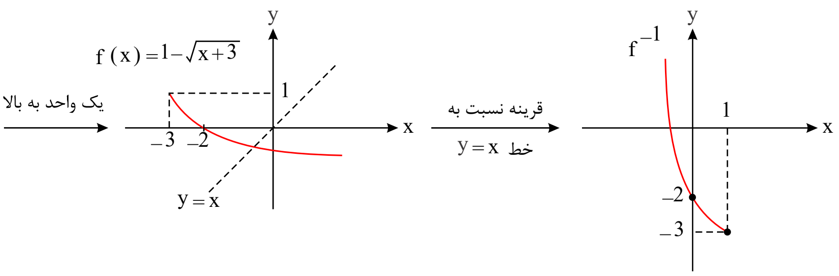
$$D_{۲f} \cap D_{g^{-۱}} = \{۱, ۳, ۴\}$$

$$\frac{۲f}{g^{-۱}} = \{(۱, \frac{۱۰}{۲}), (۳, \frac{۸}{۰}), (۴, \frac{۱۲}{-۱})\} \to \frac{۲f}{g^{-۱}} = \{(۱, ۵), (۴, -۱۲)\}$$

$\frac{۲f}{g^{-۱}}$ حاصل‌ضرب اعضای برد $= ۵ \times (-۱۲) = -۶۰$

۱۱ - گزینه ۱ نمودار تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x + ۳}$ را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و سپس نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست آید.





پس f^{-1} از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند.

۱۲ - گزینه ۱ اگر نمودار یک تابع اکیداً صعودی و وارونش، نقطهٔ تلاقی داشته باشند، این نقطه روی نیم‌ساز ناحیهٔ اول و سوم ($y=x$) خواهد بود، زیرا تابع اکیدّ صعودی و وارونش همواره نقطهٔ تلاقی ندارند. پس در این نقطه خواهیم داشت:

$$f(x)=x\Rightarrow \frac{mx-۲}{۳}=x\xrightarrow{x=۱}\frac{m-۲}{۳}=۱\Rightarrow m=۵$$

درنتیجه برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\dfrac{۵x-۲}{۳}$ داریم:

$$y=\frac{۵x-۲}{۳}\to ۳y+۲=۵x\to x=\frac{۳y+۲}{۵}\to f^{-۱}(x)=\frac{۳x+۲}{۵}$$

۱۳ - گزینه ۲

$$(gof^{-۱})(a)=۱\to g(f^{-۱}(a))=۱$$

می‌دانیم اگر $g(m)=n$، آنگاه $g^{-۱}(n)=m$، پس:

$$g(f^{-۱}(a))=۱\to g^{-۱}(۱)=f^{-۱}(a)\Rightarrow ۰=f^{-۱}(a)\Rightarrow ۲=a$$

حال مقدار $(fog)(-a)$ را با جای‌گذاری $a=۲$ حساب می‌کنیم:

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$

۱۴ - گزینه ۲ کافی است ضابطهٔ معکوس تابع داده‌شده را به‌دست آورید. برای این کار x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنید.

$$y=\log_۲^{x+a}+b\to y-b=\log_۲^{x+a}\xrightarrow{\log_b^a=c\to b^c=a}x+a=۲^{y-b}$$

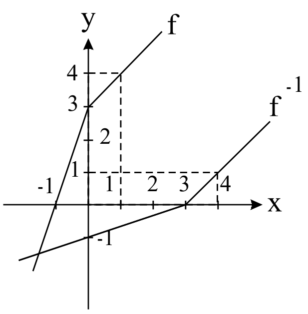
$$\to x=۲^{y-b}-a\to f^{-۱}(x)=۲^{x-b}-a$$

شکل داده‌شده مربوط به $y=۲^{x+۱}+۱$ است بنابراین $a=b=-۱$ و درنتیجه $a+b=-۲$ است.

۱۵ - گزینه ۱

$$f(x)=۲x-|x|+۳=\begin{cases}x+۳ & ,\ x\geq ۰\\ ۳x+۳ & ,\ x<۰\end{cases}$$

محل برخورد وارون تابع با محور yها، متناظر با نقطهٔ برخورد تابع با محور xها است. با توجه به شکل مقابل داریم:



$f^{-۱}$ محل برخورد با محور y ها $\Rightarrow A(۰,-۱)$

$y=x\Rightarrow x-y=۰\Rightarrow x-y=۰$ نیم‌ساز ربع اول و سوم از A فاصله $=\dfrac{|۰-(-۱)|}{\sqrt{۱+۱}}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ از رابطهٔ $AH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به‌دست می‌آید.

۱۶ - گزینه ۴ اگر $f(a)=b$ باشد در این صورت $f^{-1}(b)=a$ است و $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ است.

$$(fog)^{-1}(8)=a\to(fog)(a)=8\to f(g(a))=8\to\frac{1}{4}a^3-8=8$$

$$\to\frac{1}{4}a^3=16\to a^3=64\to a=4$$

$$(f^{-1}og^{-1})(8)=b\to(gof)^{-1}(8)=b\to(gof)(b)=8\to g(f(b))=8$$

$$\to(\frac{1}{4}b-8)^3=8\to\frac{1}{4}b-8=2\to\frac{1}{4}b=10\to b=40$$

پس : $(fog)^{-1}(8)-(f^{-1}og^{-1})(8)=4-40=-36$

۱۷ - گزینه ۱ ابتدا قدرمطلق‌ها را از بین می‌بریم.

$$f(x)=\begin{cases}-(2x-8)+(x+3)=-x+11 & ,\ x<-3\\ -(2x-8)-(x+3)-3x+5 & ,\ -3\le x\le 4\\ (2x-8)-(x+3)=x-11 & ,\ x>4\end{cases}$$

بنابراین تابع در بازهٔ $x>4$ اکیداً صعودی است (خط با شیب مثبت)

$$y=x-11\Rightarrow x=y+11\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ راعوض می‌کنیم.}}y=x+11\Rightarrow f^{-1}(x)=x+11$$

برای تعیین دامنهٔ f^{-1}، برد f را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$y=x-11\xrightarrow{x>4}x-11>4-11\Rightarrow x-11>-7\Rightarrow f(x)>-7$$

برد تابع f در این بازه، همان دامنهٔ f^{-1} می‌باشد.

۱۸ - گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y=f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4\Rightarrow(x-1)^2=y+4$$

$$\xrightarrow{x\ge1}x-1=\sqrt{y+4}\Rightarrow x=1+\sqrt{y+4}\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}}f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+4}$$

حال با خط $g(x)=\dfrac{x-a}{2}$ قطع می‌دهیم:

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow1+\sqrt{x+4}=\frac{x-9}{2}\xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}}x=21$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4}=x-11\xrightarrow{\text{توان } 2}4x+16=x^2+121-22x\Rightarrow x^2-26x+105=0$$

$$\Rightarrow(x-21)(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=21 & \text{ق‌ق}\\ x=5\ (\text{در معادله صدق نمی‌کند}) & \text{غ‌ق}\end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۴ - ۱	۷ - ۲	۱۰ - ۲	۱۳ - ۲	۱۶ - ۴
۲ - ۲	۵ - ۱	۸ - ۴	۱۱ - ۱	۱۴ - ۲	۱۷ - ۱
۳ - ۳	۶ - ۲	۹ - ۲	۱۲ - ۱	۱۵ - ۱	۱۸ - ۴