سایت علی جبرا Aligebra com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^{x}-۱$، از دو نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(۱,۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۲ - برای نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ به‌ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف xهای منفی، قرینه نسبت به محور xها، دو برابر کردن برد، انتقال ۳ واحد به طرف yهای منفی، معادلهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۳ - در بازه‌ای که تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ روی آن اکیداً نزولی است، نمودار f با نمودار تابع $g(x)=۲x^{۲}-x-۱۰$، چند نقطه مشترک دارد؟

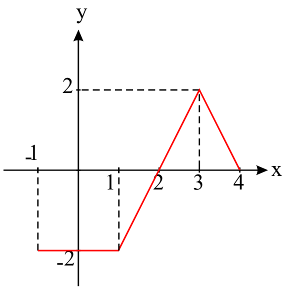
۴ - فرض کنید $f(x)=۲x^{۲}-x-۱$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x+۳)$ باشد، با کدام انتقال زیر، نمودار تابع $fog(x)$ محورxها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول‌های نامنفی قطع خواهد کرد؟

۵ - تابع $f(x)=\frac{۱}{[\cos \pi x]}$، در کدام بازه قابل تعریف است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۶- نمودار تابع $y=\left|\frac{۱}{۲}x\right|-۲$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۷- نمودار تابع $y=f(x)$ مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم، سپس آن را ۲ واحد در راستای محور xها به طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضریب ۲ آن را در راستای عمودی انبساط دهیم، کدام تابع به‌دست می‌آید؟

۸- اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌صورت زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ کدام است؟



۹- اگر $f(x)=x^{۲}+|x|$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$، آنگاه برد تابع $(f\cdot g)(x)$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱۰ - تابع $f(x) = |x(x^2+3x+3)+2|$ در بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

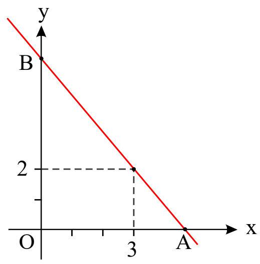
۱۱ - اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$، آن گاه $f(8)$ کدام است؟

۱۲ - اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد، حاصل $f(\sin \frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱۳ - اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟

۱۴ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a \cdot b^x \ ; \ b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$، مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

۱۵ - به‌ازای هر خط که از نقطه‌ی $(۳,۲)$ می‌گذرد و جهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط $A(x,۰)$ و $B(۰,y)$ قطع می‌کند، یک مثلث قائم‌الزاویه در ناحیه‌ی اول تشکیل می‌شود. تابعی که مساحت این مثلث را به عنوان تابعی از x به‌دست دهد، کدام است؟



۱۶ - M نقطه‌ای دلخواه روی خط $y=۳-۲x$ است. فاصلهٔ M تا خط $۳x-۴y=۸$ را به صورت تابعی از طول نقطهٔ M نوشته‌ایم. ضابطهٔ این تابع کدام است؟

۱۷ - برد تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۵}+۱$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌شود؟

۱۸ - اگر $g(x)=۵^x+\frac{۱}{۲}$ و $f(x)=\sqrt{x^۳g(x)}$، دامنه‌ی تعریف تابع f کدام است؟

۱۹ - اگر $f(x)=x^۳-۳x$ باشد دامنه‌ی تابع $h(x)=\sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟

۲۰ - دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f\left(x\right)=\sqrt{۱-\log\left(x^{۲}-۳x\right)}$ کدام است؟

۲۱ - دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟

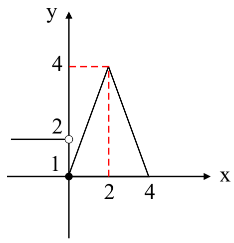
۲۲ - اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(۳-x)$، کدام است؟

۲۳ - دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^{۲}-۴)x^{۲}+ax+۶}$ بازهٔ $(-\infty,b]$ است. $a+b$ کدام است؟

۲۴ - در کدام گزینه، توابع f و g مساوی نیستند؟

۲۵ - تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$ با کدام تابع زیر مساوی نیست؟

۲۶ - شکل زیر نمودار تابع $y=۲f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(۲-x)$ کدام است؟



۲۷ - نمودار تابع $f(x)=\log(ax+b)$ با دامنه‌ی $(-\infty,۱)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. اگر طول نقطه‌ی برخورد نمودار حاصل با نمودار f، برابر $-\sqrt{۵}$ باشد، آنگاه $f(-۱۹)$ کدام است؟

۲۸ - روی نمودار تابع $f(x)=x^۲$ به‌ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف xهای منفی. قرینه نسبت به محور xها، دو برابر کردن عرض نقاط و انتقال ۳ واحد به طرف yهای منفی، ضابطهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۲۹ - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x+۱}$ از کدام ناحیه (نواحی) محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۳۰- اگر f و g دو تابع خطی باشند به‌طوری‌که $\begin{cases}(f+g)(x)=2x+1\\(g-f)(x)=x-2\end{cases}$، حاصل $f(1)+g(3)$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

دو نقطهٔ دادهشده را در تابع $f(x)=ab^x-1$ صدق می‌دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{1}{2}=ab^{-\frac{1}{2}}-1\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{a}{\sqrt{b}}\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{a^2}{b}\to a^2=\frac{9}{4}b\to a=\frac{3}{2}\sqrt{b}$$

$$B\left|\begin{matrix}1\\ 11\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 11=ab-1\ \Rightarrow ab=12\Rightarrow\frac{3}{2}\sqrt{b}b=12$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b}=8\ \Rightarrow b=4\Rightarrow a=3$$

پس: $f(x)=3\times 4^x-1\Rightarrow f(-1)=3\times 4^{-1}-1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$

۲ - گزینه ۳

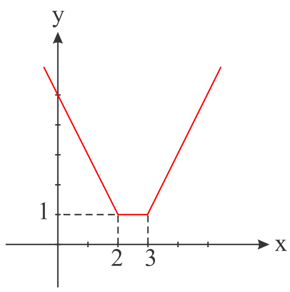
به‌ترتیب اعمال موردنظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x^2\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{ های منفی}}f_1(x)=(x+4)^2\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}}f_2(x)=-(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}}f_3(x)=-2(x+4)^2\xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}}f_4(x)=-2(x+4)^2-3$$

$$f_4(x)=-2(x^2+8x+16)-3\Rightarrow y=-2x^2-16x-35$$

۳ - گزینه ۱ تابع f یک تابع گلدانی است که در $x<2$ اکیداً نزولی است و ضابطهٔ آن در این بازه $f(x)=-2x+5$ است.



$$\begin{cases}f(x)=-2x+5\\ g(x)=2x^2-x-10\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}2x^2-x-10=-2x+5\Rightarrow 2x^2+x-15=(2x-5)(x+3)=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=1+120=121}\begin{cases}x=\dfrac{-1+11}{4}=\dfrac{5}{2}(x<2\ \ \text{غ ق ق (با توجه به}\\[2ex] x=\dfrac{-1-11}{4}=-3\qquad \text{ق ق}\end{cases}$$

تنها نقطه مشترک f و g در بازهٔ $(-\infty,2)$ نقطه $(-3,11)$ است.

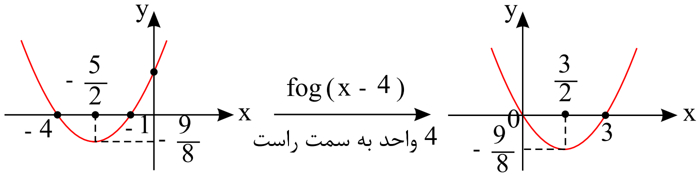
۴ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع $fog(x)$ را می‌یابیم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{2}(x+3))=2\times\left(\frac{1}{2}(x+3)\right)^2-\frac{1}{2}(x+3)-1$$

$$\Rightarrow fog(x)=2\times\frac{1}{4}(x^2+6x+9)-\frac{1}{2}(x+3)-1$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+6x+9)-\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-x-3-2)$$

$$\Rightarrow fog(x)=\frac{1}{2}(x^2+5x+4)=\frac{1}{2}(x+1)(x+4)\xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور } x \text{ ها}}x=-1,-4$$

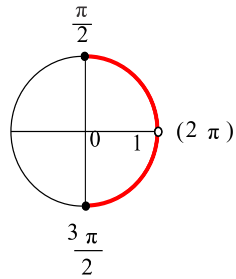


مشاهده می‌کنیم که نمودار تابع fog در $x=-4$ و $x=-1$ محورها را قطع کرده است، پس اگر نمودار تابع را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنیم، هر دو ریشه، نامنفی می‌شوند.

۵ - گزینه ۳

$$[\cos \pi x] = 0 \Rightarrow 0 \le \cos \pi x < 1$$

بازه‌ای را قبول می‌کنیم که در آن، $\cos \pi x$ در رابطهٔ $0 \le \cos \pi x < 1$ صدق نکند.



$$0 \le \cos \pi x < 1 \Rightarrow \text{با توجه به دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \pi x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \le \pi x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \le x < 2 \end{cases}$$

این بازه ریشه‌های مخرج هستند و می‌دانیم که در توابع کسری ریشه‌های مخرج نباید در دامنهٔ تابع باشند. با توجه به گزینه‌ها، در گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج وجود ندارد.

۶ - گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را ۴ واحد به‌سمت چپ منتقل کنیم معادله به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2+1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}} = |\frac{1}{2}x| - 2 \\ y_{\text{جدید}} = |\frac{1}{2}x+2| - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{1}{2}x| - 2 = |\frac{1}{2}x+2| - 1$$

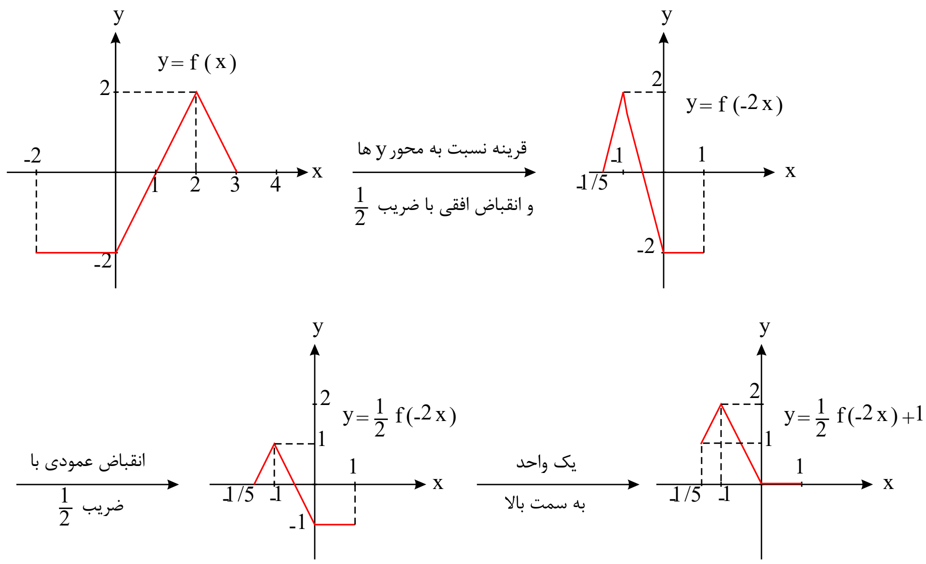
$$\xrightarrow{\times 2} |x| - 4 = |x+4| - 2 \Rightarrow |x| - |x+4| = 2 \xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x = -3$$

۷ - گزینه ۲ با توجه به مراحل گفته شده داریم:

$$y=f(x) \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به } y \text{ ها}} f(-x) \xrightarrow[x \to x-2]{\text{2 واحد به راست}} f(-(x-2)) = f(-x+2)$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب 2}} g(x) = 2f(-x+2)$$

۸ - گزینه ۲ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(-2x)+1$ را به دست می‌آوریم:



پس دامنهٔ تابع $y=\frac{1}{2}f(-2x)+1$ برابر با $[-1/5, 1]$ و برد آن $[0, 2]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[0, 1]$ می‌شود.

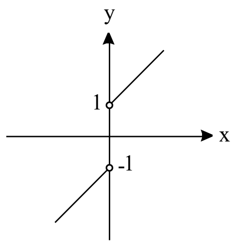
۹ - گزینه ۳

$$f(x)=x^{۲}+|x| \to D_f=\mathbb{R} \quad , \quad ,g(x)=\frac{۱}{x} \to D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{۰\})=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$\to (f\cdot g)(x)=\frac{x^{۲}+|x|}{x} \ ,D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$\to (f\cdot g)(x)=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x+۱ & ;x>۰ \\ x-۱ & ;x<۰\end{cases}$$



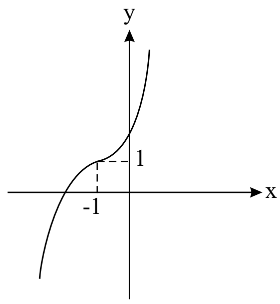
$\to$ برد: $R_{(f\cdot g)}=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

برد تابع $(f\cdot g)(x)$ شامل ۳ عدد صحیح $\{۱,۰,-۱\}$ نمی‌باشد.

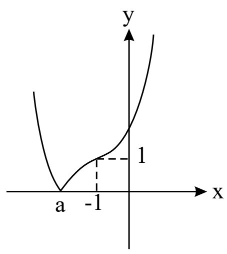
۱۰ - گزینه ۲ ابتدا ضابطهٔ f را ساده تر می‌کنیم:

$$f(x)=|x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱+۱|=|(x+۱)^{۳}+۱|$$

نمودار تابع $y=(x+۱)^{۳}+۱$ را به کمک انتقال تابع $y=x^{۳}$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xهاست حفظ کنیم:



برای به‌دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم:

$$(x+۱)^{۳}+۱=۰ \to (x+۱)^{۳}=-۱ \to x+۱=-۱ \to x=-۲$$

پس تابع f در بازهٔ $[-۲,+\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -۲ است.

۱۱ - گزینه ۳

$$f(x)=۳+\sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸)=۳+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷$$

۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=۲\cos^{۲}a-۱=۱-۲\sin^{۲}a}$

$$f(\sin\frac{\pi}{۱۲})=۱-۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\cos ۲(\frac{\pi}{۱۲})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳ - گزینه ۴ برای آن‌که $g(f(a))=۵$ باشد، باید مقدار $f(a)$ یعنی ورودی تابع g برابر با ۶ باشد، چون $g(۶)=۵$ است. برای این منظور ضابطه‌ی تابع f را برابر با ۶ قرار می‌دهیم. داریم.

$$f(a)=۶ \Rightarrow a+\sqrt{a}=۶ \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} a=۴$$

۱۴ - گزینه ۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ab^x$ ، $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$ است، پس داریم:

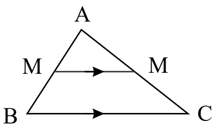
$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow ab^0=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{1}{b^2}=\frac{1}{16}\Rightarrow b^2=16\xrightarrow{b>0} b=4$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b، ضابطه‌ی تابع f را نوشته و سپس $f(\frac{3}{2})$ را به‌دست می‌آوریم:

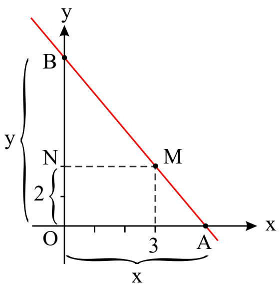
$$a=\frac{3}{2}\ ,\ b=4\ \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x\ \Rightarrow\ f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{4^3}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

۱۵ - گزینه ۳ با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، اگر MN موازی BC باشد، آنگاه:



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

در شکل روبه‌رو $MN \parallel OA$، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{BN}{OB}=\frac{MN}{OA}\Rightarrow\frac{y-2}{y}=\frac{3}{x}$$

حال از تساوی بالا y را بر حسب x به‌دست می‌آوریم:

$$xy-2x=3y\Rightarrow 2x=xy-3y\rightarrow 2x=y(x-3)\rightarrow y=\frac{2x}{x-3}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}x\times y=\frac{1}{2}x\times\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2}{x-3}$$

۱۶ - گزینه ۴ نقطهٔ کلی $M(x,y)$ را روی خط $y=3-2x$ در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$M(x,3-2x)$$

حال تابعی که فاصلهٔ نقطهٔ M را از خط $3x-4y-8=0$ بیان می‌کند به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{|3x-4(3-2x)-8|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3x-12+8x-8|}{5}=\frac{1}{5}|11x-20|$$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ از رابطهٔ $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به‌دست می‌آید.

۱۷ - گزینه ۲ ابتدا عبارت زیر رادیکال را به فرم مربع کامل تبدیل می‌کنیم و سپس با مشخص کردن محدودهٔ عبارت زیر رادیکال، برد تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$x^2-2x+5=\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}+4=(x-1)^2+4$$

$$(x-1)^2\geq 0\xrightarrow{+4}(x-1)^2+4\geq 4\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+4}\geq 2$$

$$\xrightarrow{+1}\sqrt{(x-1)^2+4}+1\geq 3\Rightarrow f(x)\geq 3\Rightarrow R_f=[3,+\infty)$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[3,+\infty)$ می‌باشد و اعداد طبیعی ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

۱۸ - گزینه ۱ برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$x^3\cdot g(x)\geq 0\rightarrow x^3(\underbrace{5^x+\frac{1}{2}}_{+})\geq 0\rightarrow x^3\geq 0\rightarrow x\geq 0\rightarrow x\in[0,+\infty)$$

۱۹ - گزینه ۱

تابع $\sqrt{x-f(x)}=\sqrt{4x-x^3}$ وقتی با معنی است که $4x-x^3\geq 0$ باشد

$۴x - x^۳ \geq \longrightarrow x(۴ - x^۲) \geq ۰ \longrightarrow$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
عبارت ≥ ۰		+	۰	−	۰	+	۰	−	

بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $(-\infty, -۲] \cup [۰, ۲]$ است.

۲۰ ـ گزینه ۳ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم:

$??^۲?۳?? > ۰ \Rightarrow x(x-۳) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ?? < ۰$ یا $x > ۳ \ (I)$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰ \rightarrow \log(x^۲ - ۳x) \leq ۱ \rightarrow \log(x^۲ - ۳x) \leq \log ۱۰$

$\rightarrow x^۲ - ۳x \leq ۱۰ \rightarrow x^۲ - ۳x - ۱۰ \leq ۰ \rightarrow (x-۵)(x+۲) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ \leq x \leq ۵ \quad (II)$

از اشتراک I , II به نتیجه‌ی $-۲ \leq x < ۰$ یا $۳ < x \leq ۵$ می‌رسیم. یعنی: $x \in [-۲, ۰) \cup (۳, ۵]$

۲۱ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases} \sqrt{x-۱} : x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ (۱) \\ \sqrt{۳ - \sqrt{x-۱}} : ۳ - \sqrt{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq \sqrt{x-۱} \rightarrow ۹ \geq x - ۱ \Rightarrow x \leq ۱۰ (۲) \end{cases}$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $۱ \leq x \leq ۱۰$، پس $D_f = [۱, ۱۰]$

۲۲ ـ گزینه ۴

$۲x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۲ - x) \geq ۰$

$\Longrightarrow$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
عبارت > ۰		−	۰	+	۰	−	

$\Longrightarrow ۰ \leq x \leq ۲$

حال برای پیدا کردن دامنهٔ $f(۳-x)$ کافی است $۳ - x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$۰ \leq ۳ - x \leq ۲ \Rightarrow -۳ \leq -x \leq -۱ \Rightarrow ۳ \geq x \geq ۱ \Rightarrow x \in [۱, ۳]$

البته می‌توانید ابتدا ضابطهٔ $f(۳-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

۲۳ ـ گزینه ۴

زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$f(x) = \sqrt{(a^۲ - ۴)x^۲ + ax + ۶} \rightarrow (a^۲ - ۴)x^۲ + ax + ۶ \geq ۰$

جواب یک نامعادلهٔ درجهٔ دوم هیچ‌گاه نمی‌تواند کوچکتر مساوی یک ریشه اش باشد (می‌تواند $\mathbb{R}$ یا یک تک عدد یا تهی یا بین دو ریشه یا اجتماع خارج دو ریشه باشد) پس عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند درجهٔ دوم باشد و ضریب $x^۲$ باید صفر باشد، داریم:

$a^۲ - ۴ = ۰ \rightarrow a = \pm ۲$

$۱)\ a = ۲ \rightarrow f(x) = \sqrt{۲x + ۶} \rightarrow ۲x + ۶ \geq ۰ \rightarrow ۲x \geq -۶ \rightarrow x \geq -۳$

$\rightarrow D_f = [-۳, +\infty)$ (غیر قابل قبول)

$۲)\ a = -۲ \rightarrow f(x) = \sqrt{-۲x + ۶} \rightarrow -۲x + ۶ \geq ۰ \rightarrow ۶ \geq ۲x \rightarrow ۳ \geq x$

$\rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$

پس $a = -۲$، $b = ۳$ و در نتیجه $a + b = ۱$ است.

۲۴ ـ گزینه ۳ دو تابع f و g به‌شرطی باهم برابرند که اولاً دامنه‌هایشان برابر باشند و ثانیاً به‌ازای هر x از دامنه‌ها $f(x) = g(x)$ باشد.

(گزینهٔ ۱) $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۳}} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

پس $f(x) = g(x)$ است.

(گزینهٔ ۲) $f(x) = \sqrt{۱ - x} + \sqrt{x - ۱} \rightarrow \begin{cases} ۱ - x \geq ۰ \\ x - ۱ \geq ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱ \geq x \\ x \geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۱ \rightarrow D_f = \{۱\} \rightarrow f(x) = ۰$

$g(x) = \sqrt{۱ - x} \times \sqrt{x - ۱} \rightarrow \begin{cases} ۱ - x \geq ۰ \\ x - ۱ \geq ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱ \geq x \\ x \geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۱ \rightarrow D_g = \{۱\} \rightarrow g(x) = ۰$

پس $f(x)=g(x)$ است.

گزینهٔ ۳) $f(x)=\sqrt{x^2-x}\to x^2-x\ge 0\to x(x-1)\ge 0\to D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

$$g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-1}\to \begin{cases}x\ge 0\\ x-1\ge 0\to x\ge 1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ge 1\to D_g=[1,+\infty)$$

$D_f\neq D_g$ در نتیجه داریم: $f(x)\neq g(x)$.

گزینهٔ ۴) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$, $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\ ,\ g(x)=\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}$$

پس $f(x)=g(x)$ است.

۲۵ - گزینه ۴ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم، هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشد.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $f(x)=1$ است.

حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $g(x)=1$ است.

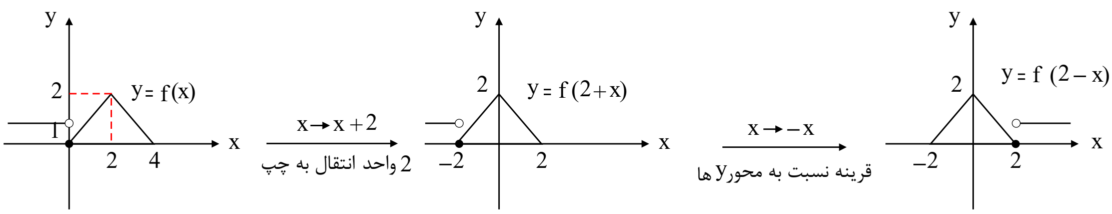
گزینهٔ ۲: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $h(x)=1$ است. ($|x|\overset{x>0}{=\!=}x$)

گزینهٔ ۳: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $s(x)=1$ است.

گزینهٔ ۴: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty)-\{4\}$ و ضابطهٔ $t(x)=1$ است.

دامنهٔ تابع گزینهٔ ۴ با دامنهٔ $f(x)$ متفاوت است بنابراین $t(x)$ با $f(x)$ برابر نیست.

۲۶ - گزینه ۳ برای رسم تابع $y=f(x)$ از روی تابع $y=2f(x)$ کافی است که عرض نقاط را در تابع $y=2f(x)$ نصف کنیم.



۲۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$ax+b>0\to ax>-b\to\begin{cases}a>0\to x>\frac{-b}{a}\\ a<0\to x<\frac{-b}{a}\xrightarrow{x<1}\frac{-b}{a}=1\to b=-a\end{cases}$$

$$f(x)=\log(ax-a)\to f(x)=\log a(x-1)\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت چپ}} g(x)=\log a(x+2-1)$$

$$=\log a(x+1)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} h(x)=-\log a(x+1)$$

دو منحنی را تلاقی می‌دهیم $\to \log a(x-1)=-\log a(x+1)\to \log a(x-1)+\log a(x+1)=0$

$$\to \log a^2(x+1)(x-1)=0\to \log a^2(x^2-1)=0\xrightarrow{x=\sqrt{5}}\log 4a^2=0$$

$$\xrightarrow{\log 1=0}4a^2=1\to a^2=\frac{1}{4}\to\begin{cases}a=\frac{1}{2} & \text{غ‌ق(باتوجه به دامنه)}\\ a=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

پس: $f(x)=\log\frac{-1}{2}(x-1)\to f(-19)=\log\frac{1}{2}(20)=\log 10=1$

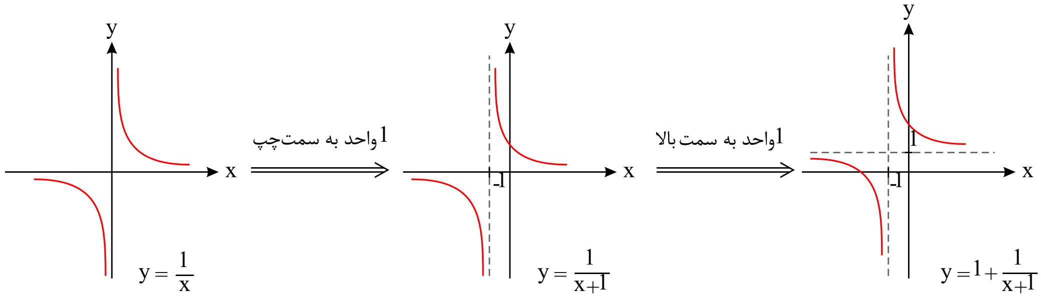
۲۸ - گزینه ۳ به‌ترتیب اعمال موردنظر داریم:

$$f(x)=x^2\xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به طرف } x\text{های منفی}}f_1(x)=(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}}f_2(x)=-(x+4)^2\xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض نقاط}}f_3(x)=-2(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به طرف } y\text{های منفی}}f_4(x)=-2(x+4)^2-3=-2(x^2+8x+16)-3=-2x^2-16x-35$$

اکنون نمودار $f(x) = \frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ و پس از آن یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



۳۰ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases} (f+g)(x) = ۲x + ۱ \\ (g-f)(x) = x - ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = ۲x + ۱ \\ g(x) - f(x) = x - ۲ \end{cases} \rightarrow ۲g(x) = ۳x - ۱ \rightarrow g(x) = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

$$f(x) + g(x) = ۲x + ۱ \rightarrow f(x) + \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲} = ۲x + ۱ \rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$

پس: $f(۱) + g(۳) = \frac{۱}{۲}(۱) + \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}(۳) - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} + \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۶$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۳	۲۵ - ۴	۳۰ - ۴