نام آزمون: نقطه عطف

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ – طول نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = \dfrac{x}{۱ + |x|}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) فاقد نقطهٔ عطف

۲ – مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & ; \ x \geq -۱ \\ -۱۳ - \dfrac{۹}{x} & ; \ x < -۱ \end{cases}$، کدام است؟

(۱) $\varnothing$

(۲) $\{۱\}$

(۳) $\{-۱, ۱\}$

(۴) $\{-۱\}$

۳ – مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x\left|x^۲ - ۴x\right|$، کدام است؟

(۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$

(۲) $\{۰, \frac{۴}{۳}, ۴\}$

(۳) $\{\frac{۴}{۳}, ۴\}$

(۴) $\{۰, \frac{۴}{۳}\}$

۴ – طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (۵ - x)\sqrt[۳]{x^۲}$، کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۵ – طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳-x^{۲}}{۲} & ; \ x<۱\\ \dfrac{۱}{x} & ; \ x\geq ۱\end{cases}$، در صورت وجود، کدام است؟

① -۱
② صفر
③ ۱
④ فاقد عطف

۶ – تابع $f(x)=x^{۴}+(k-۱)x^{۳}+(k+۳)x$ فاقد نقطهٔ عطف است. عرض می‌نیمم تابع کدام است؟

① ۱
② -۱
③ ۳
④ -۳

۷ – نقطهٔ ماکسیمم تابع $y=\dfrac{x^{۲}+۳}{x+۱}$ همان نقطهٔ عطف تابع $y=\sqrt[۳]{x+a+b}$ است. $b+a$ کدام است؟

① ۳
② ۱۶
③ ۶
④ ۹

۸ – اگر نقطهٔ $A(۱,۵)$، نقطهٔ عطف تابع $f(x)=ax^{۲}+\dfrac{۸}{x+۱}+b$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

① ۲
② صفر
③ ۳
④ ۱

۹ - تابع $f(x)=x\left|x^2-9x\right|$ چند نقطهٔ عطف و چند اکسترمم نسبی دارد؟

① ۱ و ۲
② ۲ و ۱
③ ۲ و ۲
④ ۱ و ۱

۱۰ - به‌ازای کدام مجموعه مقادیر k تابع $f(x)=3x^2-k\cos x+1$ فاقد عطف است؟

① $(-6,6)$
② $[-6,6]$
③ $(-\infty,-6)\cup(6+\infty)$
④ $(-\infty,-6]\cup[6+\infty)$

۱۱ - مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y=x\left|x^3-36x\right|$ کدام است؟

① $\{\pm 6,\pm\sqrt{6}\}$
② $\{\pm 6,\pm\sqrt{6},0\}$
③ $\{\pm\sqrt{6},0\}$
④ $\{\pm\sqrt{6}\}$

۱۲ - مجموعه‌ی نقاط عطف نمودار تابع $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

① $\{-1\}$
② $\{0,-1\}$
③ $\{0\}$
④ $\varnothing$

۱۳ - اگر تابع $y=\frac{x^{۳}}{۶}-mx^{۲}+x$ دارای اکسترمم نسبی نباشد، حداقل طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $-\sqrt{۲}$

③ -۲

④ -۱

۱۴ - به ازای چند مقدار صحیح k، تابع $f(x)=x^{۴}-kx^{۳}+۶x^{۲}$، نقطه‌ی عطف ندارد؟

① ۷

② ۸

③ ۹

④ ۱۰

۱۵ - طول نقاط عطف تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱-\cos x}$ در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

① $\frac{\pi}{۲}$

② عطف ندارد.

③ π

④ $\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+۱} & x\ge ۰\\ \dfrac{x}{۱-x} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{(۱+x)^۲} & x>۰\\ \dfrac{۱}{(۱-x)^۲} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-۲}{(x+۱)^۳} & x>۰\\ \dfrac{۲}{(۱-x)^۳} & x<۰\end{cases}$$

چون $f''_-(۰)=۲, f''_+(۰)=-۲$ پس f'' در $x=۰$ تغییر علامت می‌دهد ضمناً خط مماس نیز در صفر وجود دارد. درنتیجه $x=۰$ طول نقطهٔ عطف f خواهد بود. توجه کنید که $f'_+(۰)=f'_-(۰)=۱$، در ضمن تابع در $x=۰$ پیوسته هم هست.

$(\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)=۰)$.

۲ ـ گزینه ۳ $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم؛ لذا داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & x\ge -۱\\ -۱۳-\dfrac{۹}{x} & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۶x & x\ge -۱\\ \dfrac{۹}{x^۲} & x<-۱\end{cases}\qquad f'_+(-۱)=f'_-(-۱)=۹$$

$$f''(x)=\begin{cases}۶x-۶ & x>-۱\\ \dfrac{-۱۸}{x^۳} & x<-۱\end{cases}\to f''(x)=۰\to ۶x-۶=۰\to x=۱$$

x		-1		1	
$f''(x)$	+	‖	−	۰	+
$f(x)$	∪		∩		∪

از طرفی در $x=-۱$، مشتق دوم وجود ندارد زیرا:

$$f''_+(-۱)\neq f''_-(-۱)$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت $f''(x)$ مشاهده می‌شود تقعر تابع $f(x)$ در نقاط $x=-۱$ و $x=۱$ تغییر می‌کند و در هر نقطه خط مماس واحد وجود دارد، لذا دو نقطه عطف دارد.

۳ ـ گزینه ۴ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس دو بار مشتق می‌گیریم:

$$y=x\left|x^۲-۴x\right|=\begin{cases}x^۳-۴x^۲ & ;\ x<۰, x>۴\\ -x^۳+۴x^۲ & ;\ ۰\le x\le ۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}۳x^۲-۸x & ;\ x<۰, x>۴\\ -۳x^۲+۸x & ;\ ۰\le x<۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow y''=\begin{cases}۶x-۸ & ;\ x<۰, x>۴\\ -۶x+۸ & ;\ ۰<x<۴\end{cases}$$

مشتق دوم به‌ازای $۶x-۸=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$ صفر است و حول آن تغییر علامت می‌دهد. همچنین مشتق دوم در $x=۰$ تعریف نشده ولی مماس در آن وجود دارد و مشتق دوم حول آن تغییر علامت می‌دهد. $(f''_+(۰)=۸\ ,\ f''_-(۰)=-۸)$، درنتیجه $x=۰$ نیز نقطه عطف به شمار می‌آید.

توجه داشته باشید که در $x=۴$ مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند پس $x=۴$ زاویه‌دار است پس نمی‌تواند عطف باشد.

۴ ـ گزینه ۱

$$y=(۵-x)x^{\frac{۲}{۳}}\to y=۵x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}}$$

$$y'=\frac{۱۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}\to y''=-\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}-\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$y''=\frac{-۱۰-۱۰x}{۹x\sqrt[۳]{x}}$$

$$-۱۰-۱۰x=۰\to x=-۱,\quad ۹x\sqrt[۳]{x}=۰\to x=۰$$

توجه کنید که $x=۰$ نقطه بازگشتی است، پس $x=-۱$ نقطهٔ عطف است.

۵ ـ گزینه ۳ می‌دانیم تابع درجه دوم و تابع هموگرافیک فاقد نقطه عطف هستند، یعنی هر دو ضابطه به تنهایی فاقد نقطه عطف هستند؛ بنابراین تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳-x^۲}{۲} & ;\ x<۱\\ \dfrac{۱}{x} & ;\ x\ge ۱\end{cases}$$

فقط در نقطه مرزی $(x=۱)$ می‌تواند نقطه عطف داشته باشد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) مسلماً نادرست هستند. حال به بررسی نقطه $x=۱$ می‌پردازیم:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow$ تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}-x & ; \quad x<1\\ -\dfrac{1}{x^2} & ; \quad x>1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to1^+} f'(x)=\lim_{x\to1^-} f'(x)=-1\Rightarrow f'(x)=-1$$

بنابراین تابع f در نقطه ۱ $x=$ دارای خط مماس واحد است. درنتیجه شرایط اولیه وجود عطف (دارا بودن خط مماس واحد) را دارد. با تشکیل ضابطه f''، داریم:

$$f''(x)=\begin{cases}-1 & ; \quad x<1\to f''_-(1)<0\\ \dfrac{2}{x^3} & ; \quad x>1\to f''_+(1)>0\end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع f'' در اطراف $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $x=1$ طول نقطه عطف است.

۶ ـ گزینه ۴ تابع $f(x)$ در صورتی فاقد عطف است که مشتق دوم فاقد ریشه باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$f'(x)=4x^3+3(k-1)x^2+k+3$

$f''(x)=12x^2+6(k-1)x$

اگر $k=1$ آن‌گاه $f''(x)=12x^2$ و تقعر تابع همواره رو به بالاست و تابع فاقد نقطهٔ عطف خواهد بود. در غیر این صورت معادله $f''(x)$ دارای دو ریشهٔ ساده می‌شود که این نقاط طول نقاط عطف تابع خواهند بود.

$k=1\to f(x)=x^4+4x \quad , \quad f'(x)=4x^3+4$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

بنابراین طول مینیمم نسبی تابع $x=-1$ و عرض آن $f(-1)=-3$ است.

۷ ـ گزینه ۱

$$y=\frac{x^2+3}{x+1}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)(1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0\to x=1\ ,\ x=-3$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y′		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-6 Max	↘	‖	↘	2	↗	

$\to A\Big|^{-3}_{-6}$ نقطهٔ Max

ریشهٔ سادهٔ زیر رادیکال با فرجهٔ ۳ همان طول نقطهٔ عطف قائم منحنی است. $\Rightarrow x+a+b=0\xrightarrow{x=-3} a+b=3$

۸ ـ گزینه ۳ تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق دوم تابع در $x=1$ وجود دارد، بنابراین $f''(1)=0$.

$$f(x)=ax^2+\frac{8}{x+1}+b\Rightarrow f(1)=a+\frac{8}{2}+b=a+b+4=5\Rightarrow a+b=1$$

$$f'(x)=2ax+\frac{-8}{(x+1)^2}\Rightarrow f''(x)=2a+\frac{16}{(x+1)^3}$$

$$f''(1)=2a+\frac{16}{2^3}=2a+2=0\Rightarrow a=-1\ \ ,\ \ b=2\Rightarrow b-a=3$$

۹ ـ گزینه ۳

برای به دست آوردن اکسترمم‌های نسبی، مشتق تابع را حول نقاط بحرانی آن تعیین علامت می‌کنیم:

$f(x)=x\left|x^2-9x\right|=x\left|x(x-9)\right|$

$x^2-9x=0\to x(x-9)=0$

x		0		9	
x^2-9x	$+$	0	$-$	0	$+$

تابع را ضابطه‌بندی می‌کنیم، لذا داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^2-9x)=x^3-9x^2 & x\le0\ ,\ x\ge9\\ x(9x-x^2)=-x^3+9x^2 & 0<x<9\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-18x & x\le0\ ,\ x>9\\ -3x^2+18x & 0\le x<9\end{cases}$$

$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-18x=0\Rightarrow x^2=6x\Rightarrow x=0\ ,\ 6\ ,\ x=9$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$		0		6		9		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	ت‌ن	$+$	
$f(x)$		↗		↗	max	↘	min	↗	

درنتیجه $x=6$ نقطه ماکزیمم نسبی و نقطه $x=9$ نقطه مینیمم نسبی تابع است. حال $f''(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f''(x)=\begin{cases}6x-18 & x<0\ ,\ x>9\\ -6x+18 & 0<x<9\end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \Rightarrow f'' > 0 \\ x > 3 \Rightarrow f'' < 0 \end{cases} \Rightarrow$$ نقطه عطف است. $x = 3$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f'' > 0 \\ x < 0 \Rightarrow f'' < 0 \end{cases} \Rightarrow$$ نقطه عطف است. $x = 0$

$$x = 9 \Rightarrow \begin{cases} x > 9 \Rightarrow f'' > 0 \\ x < 9 \Rightarrow f'' < 0 \end{cases} \Rightarrow$$ خط مماس در $x = 9$ قابل رسم نیست لذا نقطه عطف نیست.

لذا تابع دو اکسترمم نسبی و دو نقطه عطف دارد.

۱۰ - گزینه ۲ نمودار f در هیچ نقطه‌ای نباید تغییر تقعر دهد. به‌عبارت دیگر f'' نباید ریشه ساده داشته باشد:

$$f(x) = 3x^2 - k\cos x + 1 \xrightarrow{f'(x) = 6x + k\sin x} f''(x) = 6 + k\cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -\frac{6}{k}$$

$$\xrightarrow{\text{برای عدم وجود ریشه}} \begin{cases} -\frac{6}{k} > 1 \\ -\frac{6}{k} < -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{به زبان ریاضی}} |-\frac{6}{k}| > 1 \Rightarrow -6 < k < 6 \Rightarrow k \in (-6, 6)$$

ریشه‌های معادلات $\sin u = \pm 1$ و $\cos u = \pm 1$، همواره مضاعف هستند. پارامتر k می‌تواند ± 6 هم باشد چون در این صورت $\cos x = \pm 1$ است و y'' ریشهٔ مضاعف خواهد داشت و عطف موجود نیست. معادله‌ای که ریشه مضاعف داشته باشد، در اطراف آن ریشه تغییر علامت نخواهد داد.

۱۱ - گزینه ۳ با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق و حذف قدر مطلق، تابع را به صورت چند ضابطه‌ای نوشته و با دو بار مشتق گیری، نقاط عطف را می‌یابیم.

$$x^3 - 36x = 0$$

$$x(x^2 - 36) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 6 \end{array}$$

	-6		0		+6	
x	−		−	0 +		+
x^2-36	+	0	−		− 0	+
x^3-36x	−	0	+	0	− 0	+

$$y = \begin{cases} x(x^3 - 36x) = x^4 - 36x^2 & -6 \leq x \leq 0 \quad \text{یا} \quad x \geq 6 \\ -x(x^3 - 36x) = -x^4 + 36x^2 & x < -6 \quad \text{یا} \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 4x^3 - 72x & -6 < x \leq 0 \quad \text{یا} \quad x > 6 \\ -4x^3 + 72x & x < -6 \quad \text{یا} \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

تابع f در ریشه ساده قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است یعنی در $x = \pm 6$

تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است زیرا هرچند که $x = 0$ ریشه ساده قدرمطلق است اما چون ریشه عبارت بیرون قدر مطلق است، پس در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

$$y'' = \begin{cases} 12x^2 - 72 & -6 < x < 0 \quad \text{یا} \quad x > 6 \\ -12x^2 + 72 & x < -6 \quad \text{یا} \quad 0 < x < 6 \end{cases} \Rightarrow y''_-(0) \neq y''_+(0)$$

پس مشتق دوم در صفر وجود ندارد.

$$y'' = 0 \rightarrow \begin{cases} 12x^2 - 72 = 0 \\ -12x^2 + 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

x		-6		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		6	
y''	−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	‖	+
y	∩	0	∪		∩		∪		∩		∪
				عطف				عطف			

۱۲ - گزینه ۱ یادآوری: برای محاسبه‌ی نقطه‌ی عطف نمودار تابع $y = f(x)$ از روی ضابطه، مشتق دوم آن‌را (f'') محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. در هر نقطه که در همسایگی آن f'' تغییر علامت دهد به شرطی که مماس واحد در آن نقطه موجود باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ در آن نقطه‌ی دارای عطف می‌باشد.

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1) = \frac{10(x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

$$y'' = \frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ی مخرج: } x = 0 \\ \text{ریشه‌ی صورت: } x = -1 \end{cases}$$

x		-1		0	
y''	−	0	+	0	+
y	∩		∪		∪

$\Rightarrow$ طول نقطه‌ی عطف تابع $x = -1$

۱۳ - گزینه ۲ مشتق این تابع $y' = \frac{x^2}{2} - 2mx + 1$ است و برای اینکه فاقد اکسترمم باشد باید این معادله فاقد ریشه‌ی ساده باشد یعنی $\Delta \leq 0$ باشد.

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(\frac{1}{2}) \leq 0 \rightarrow m^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

توجه: طول نقطه‌ی عطف (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم) در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر $-\dfrac{b}{3a}$ است.

$$y = \frac{x^3}{6} - mx^2 + x$$

$$\text{طول عطف}: x = -\frac{b}{3a} = -\frac{-m}{3(\frac{1}{6})} = 2m$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} \leq 2m \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{کم‌ترین مقدار} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

۱۴ - گزینه ۳ در تابع پیوسته‌ی ریشه‌های ساده‌ی مشتق دوم طول نقطه‌ی عطف است.

مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 3kx^2 + 12x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6kx + 12 = 6(2x^2 - kx + 2)$$

برای این که این تابع عطف نداشته باشد، کافی است مشتق دوم تغییر علامت ندهد، پس باید در معادله‌ی $2x^2 - kx + 2 = 0$ داشته باشیم $\Delta \leq 0$ یعنی:

$$k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow 4 \leq k \leq 4$$

بنابراین به ازای ۹ مقدار صحیح k، تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۱۵ - گزینه ۳ برای محاسبه‌ی نقطه‌ی عطف، مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot (1 - \cos x) - \sin x \cdot (\sin x)}{(1 - \cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-1}{1 - \cos x}$$
$$f''(x) = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \pi$$

ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم طول نقطه‌ی عطف است

پاسخنامه کلیدی

۱	۲
۲	۳
۳	۴
۴	۱
۵	۳
۶	۴
۷	۱
۸	۳
۹	۳
۱۰	۲
۱۱	۳
۱۲	۱
۱۳	۲
۱۴	۳
۱۵	۳