علی هاشمی

نام آزمون: فصل پنجم حسابان ۲

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۲ - ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطهٔ $(1, 2)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۳ - نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-1) = 5 \quad , \quad f(4) = -2 \quad , \quad f(0) = 0$$

نقطهٔ $(1, 1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۴ - یک برگهٔ کاغذی مستطیل‌شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100\,cm^2$ و $h = 2\,cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۵ - یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به‌دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۶- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$

ب) $f(x) = \dfrac{x}{x-۲}$

۷- نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

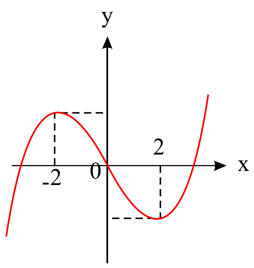
۸- برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

الف) نقطهٔ (۰,۰) ب) نقطهٔ (۱,۰) پ) نقطهٔ (۰,۱) ت) نقطهٔ (۲,۲)

۹- مقادیر a، b و c را در تابع $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + c$ طوری به‌دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(۰) = ۱$ و $f(۱) = ۲$ و $x = \dfrac{۱}{۲}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

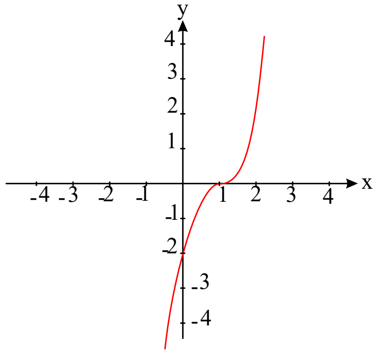
۱۰- اگر $(۰,۰)$ نقطهٔ عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



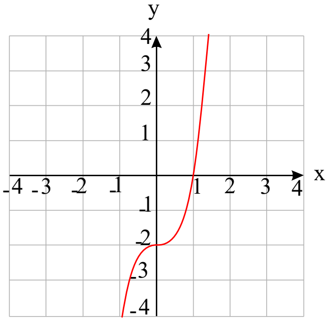
۱۱ – فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(2,1)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(-1,0)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به‌دست آورید.

۱۲ – کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x)=x^3+x-2$ است.

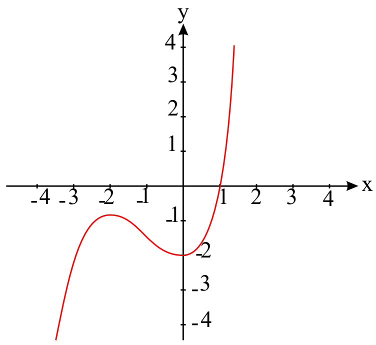
(الف)



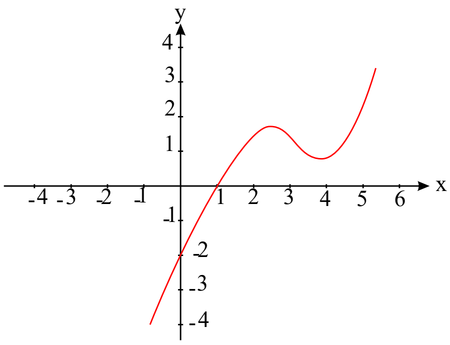
(ب)



(پ)



(ت)



۱۳ – نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به‌دست آورید.

الف

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad [-2, 1]$

ب

$f(x) = x^3 - 3x \quad [-1, 2]$

پ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

۱۴ - جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

ب

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

پ

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

۱۵ - جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

ب

$$f(x) = x^3 - 5x + 5$$

پ

$$f(x) = -x(x+2)^2$$

ت

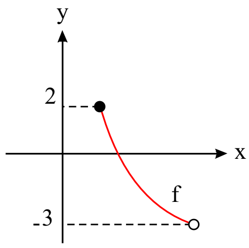
$$f(x) = \frac{۲x - ۱}{x - ۲}$$

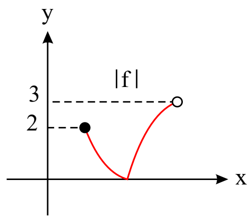
ث

$$f(x) = \frac{-x}{x + ۳}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ -





در نمودارهای بالا می‌بینیم که تابع f ماکزیمم مطلق دارد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق ندارد.

۲ -

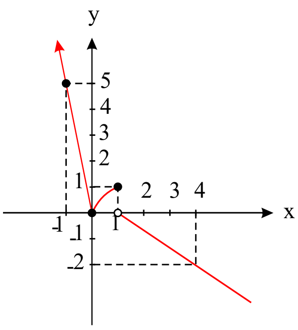
چون تابع f مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق به‌ازای طول نقطهٔ اکسترمم نسبی صفر است.

$f(x) = x^۳ + ax + b \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + a$

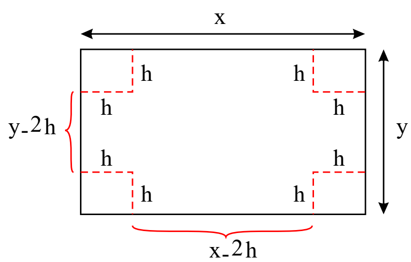
ماکزیمم نسبی $(۱,۲) \Rightarrow f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x + b$

نقطهٔ ماکزیمم نسبی در تابع صدق می‌کند. $f(۱) = ۲ \Rightarrow ۱ - ۳ + b = ۲ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x + ۴$

۳ -



۴ -



$xy = ۱۰۰ \ , \ h = ۲$

$V = (x - ۲h)(y - ۲h) \times h$

$V = (x - ۴)(y - ۴) \times ۲ = ۲(x - ۴)(y - ۴)$

$xy = ۱۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰}{x} \Rightarrow V = ۲(x - ۴)(\frac{۱۰۰}{x} - ۴) = (۲x - ۸)(\frac{۱۰۰}{x} - ۴)$

$x - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۴ \ (۱), y - ۴ \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۴ \xrightarrow{y = \frac{۱۰۰}{x}} \frac{۱۰۰}{x} \geq ۴ \Rightarrow \frac{۱۰۰ - ۴x}{x} \geq ۰$

x		۰		۲۵	
$\frac{۱۰۰ - ۴x}{x}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow ۰ < x \leq ۲۵ \xrightarrow{(۱)} ۴ \leq x \leq ۲۵ \Rightarrow$ دامنه $= [۴, ۲۵]$

$V(x) = (۲x - ۸)(\frac{۱۰۰}{x} - ۴) \quad ۴ \leq x \leq ۲۵$

$V'(x) = ۲(\frac{۱۰۰}{x} - ۴) + (-\frac{۱۰۰}{x^۲})(۲x - ۸) = ۲(\frac{۱۰۰ - ۴x}{x}) - \frac{۱۰۰(۲x - ۸)}{x^۲}$

$V'(x) = \frac{۲x(۱۰۰ - ۴x) - ۱۰۰(۲x - ۸)}{x^۲} = \frac{-۸x^۲ + ۸۰۰}{x^۲}$

$V'(x) = ۰ \Rightarrow -۸x^۲ + ۸۰۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x = \pm ۱۰ \xrightarrow{۴ \leq x \leq ۲۵} x = ۱۰$

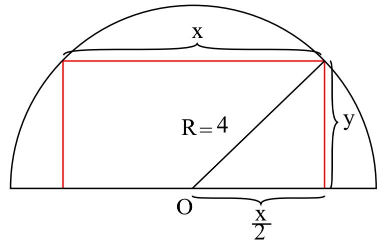
$x = 4 \Rightarrow V(4) = 0\ ,\ x = 10 \Rightarrow V(10) = (20-8)(10-4) = 12 \times 6 = 72$

$V(25) = 0$

به‌ازای $x = 10$، بیشترین حجم ایجاد می‌شود، پس داریم:

$$x = 10 \Rightarrow y = \frac{100}{10} = 10$$

۵ -



$$(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16 - \frac{x^2}{4} = \frac{64 - x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2}$$

$S = xy = x \times \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4}$

$y^2 \geq 0 \Rightarrow 16 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} \leq 16 \Rightarrow x^2 \leq 64 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8 \quad (1)$

$x \geq 0 \xrightarrow{(1)} 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4} \quad$ دامنه $= [0, 8]$

$S'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 128x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(32 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ ,\ x = \pm 4\sqrt{2}$

$x = 0 \Rightarrow S(0) = 0\ ,\ x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{64 \times 32 - 256 \times 4} = 16$

$x = 8 \Rightarrow S(8) = 0$, مقدار ماکزیمم مساحت $= 16$

به‌ازای $x = 4\sqrt{2}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - 32} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

۶ - الف)

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1\ ,\ x = 2$

حال مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

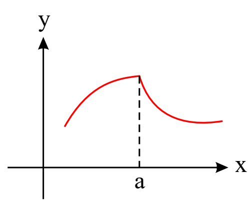
تابع f در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[-1, 2]$ اکیداً نزولی است.

ب) $\quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \qquad f(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1 \times x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$ مشتق همواره منفی است

توجه کنید که خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است و چون مشتق همواره منفی است، پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است. تابع در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R} - \{2\}$ غیریکنوا است.

۷ -



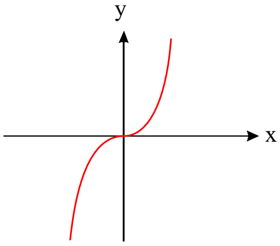
$x < a \Rightarrow$ تقعر رو به پایین

$x > a \Rightarrow$ تقعر رو به بالا

تقعر نمودار در $x = a$ عوض می‌شود ولی چون این نقطه مماس واحد بر نمودار تابع وجود ندارد، نقطهٔ $x = a$ عطف نیست.

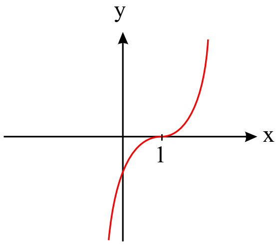
۸ -

الف) در تابع $y=x^3$ نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ عطف تابع است.



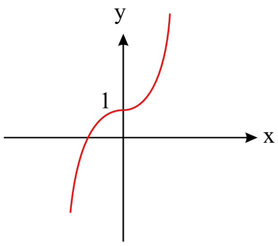
ب) با انتقال تابع $y=x^3$ به اندازهٔ یک واحد به راست، تابع درجه سومی به‌دست می‌آید که نقطهٔ $(1,0)$ عطف آن باشد.

$y=(x-1)^3 \Rightarrow$



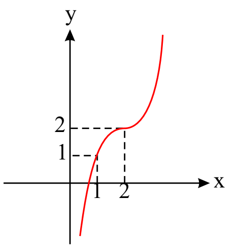
پ) اگر تابع $y=x^3$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم تابع درجه سومی به‌دست می‌آید که نقطهٔ $(0,1)$ عطف آن است.

$y=x^3+1$



ت) اگر تابع $y=x^3$ را دو واحد به راست و ۲ واحد هم به بالا انتقال دهیم، تابع درجه سومی به‌دست می‌آید که نقطهٔ $(2,2)$ عطف آن است.

$y=(x-2)^3+2$



۹ -

$f(x)=ax^3+bx^2+c$

$f(0)=1 \Rightarrow 0+0+c=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2+1$

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow a+b=1$

طول نقطهٔ عطف، ریشهٔ مشتق دوم تابع است، پس:

$$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow 6a\times\frac{1}{2}+2b=0 \Rightarrow 3a+2b=0$$

$$-2\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=-2 \\ 3a+2b=0 \end{cases}$$

$$a=-2 \Rightarrow b=3 \Rightarrow f(x)=-2x^3+3x^2+1$$

۱۰ -

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$(0,0) \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow 0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx$

طول نقطهٔ عطف، ریشهٔ مشتق دوم تابع است، پس:

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f''(x) = ۶x + ۲a \Rightarrow f''(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$

$\Rightarrow f(x) = x^۳ + bx$

طول نقاط اکسترمم نسبی، همان ریشهٔ مشتق اول تابع است، پس:

$$f'(x) = ۳x^۲ + b$$

$$x = \pm ۲ \Rightarrow f'(\pm ۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ + b = ۰ \Rightarrow b = -۱۲$$

۱۱ -

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow \frac{-a + b}{-c + d} = ۰ \Rightarrow -a + b = ۰ \Rightarrow a = b$$

طول نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها برابر با مجانب قائم و عرض این نقطه برابر با مجانب افقی است. پس داریم:

$y = ۱$:مجانب افقی $x = ۲$:مجانب قائم $\Rightarrow (۲, ۱)$ نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها

$$cx + d = ۰ \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = ۲ \Rightarrow d = -۲c$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c} = ۱ \Rightarrow a = c$$

$$d = -۲c \xrightarrow{c=a} d = -۲a$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax + a}{ax - ۲a} = \frac{a(x + ۱)}{a(x - ۲)} = \frac{x + ۱}{x - ۲}$$

۱۲ -

$$f(x) = x^۳ + x - ۲ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۱ > ۰$$

مشتق همواره مثبت است، پس تابع اکیداً صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد، بنابراین مورد «پ» و «ت» نمی‌توانند نمودار این تابع باشند.

$$f''(x) = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = f(۰) = -۲ \Rightarrow (۰, -۲)$$

نقطهٔ $(۰, -۲)$ نقطهٔ عطف تابع است، پس مورد «ب» نمودار این تابع است.

۱۳ -

الف

$f'(x) = ۶x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$ نقطهٔ بحرانی $\Rightarrow y = f(\frac{۱}{۳}) = ۳ \times (\frac{۱}{۳})^۲ - ۲ \times \frac{۱}{۳} + ۵ = \frac{۱۴}{۳}$

نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱۴}{۳})$ نقطهٔ بحرانی تابع است.

$$x = -۲ \Rightarrow y = f(-۲) = ۱۲ + ۴ + ۵ = ۲۱$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = f(۱) = ۳ - ۲ + ۵ = ۶$$

$\frac{۱۴}{۳} =$ مقدار مینیمم مطلق ، $۲۱ =$ مقدار ماکزیمم مطلق

نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱۴}{۳})$ مینیمم نسبی و مطلق تابع است و نقطهٔ $(-۲, ۲۱)$ ماکزیمم مطلق تابع است.

x	-۲		$\frac{۱}{۳}$		۱
$f'(x) - ۶x - ۲$		$-$	۰	$+$	
y	۲۱	$\searrow$	$\frac{۱۴}{۳}$	$\nearrow$	۶

ب

$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۱$ نقطهٔ بحرانی

$x = -۱ \Rightarrow y = f(-۱) = -۱ + ۳ = ۲$, $x = ۱ \Rightarrow y = f(۱) = ۱ - ۳ = -۲$

$x = ۲ \Rightarrow y = f(۲) = ۸ - ۶ = ۲$ مقدار مینیمم مطلق $= -۲$ و مقدار ماکزیمم مطلق $= ۲$

نقاط $(-۱, ۲)$ و $(۲, ۲)$ ماکزیمم مطلق و نقطهٔ $(۱, -۲)$ مینیمم نسبی و مطلق است. در ضمن نقطهٔ $(۱, -۲)$ نقطهٔ بحرانی تابع است.

x	-۱		۱		۲
$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$	۰	$-$	۰	$+$	
y	۲		-۲		۲

پ

با رسم تابع داده شده داریم:

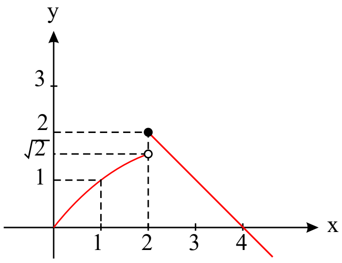
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ۰ \leq x < ۲ \\ ۴ - x & x \geq ۲ \end{cases}$$

x	۰	۲
y	۰	$\sqrt{۲}$

x	۲	۴
y	۲	۰

نقطهٔ $(۲,۲)$ نقطهٔ بحرانی تابع است زیرا تابع در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

در ضمن نقطهٔ $(۲,۲)$، نقطهٔ ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق تابع است. تابع مینیمم مطلق ندارد.



روش دوم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & ۰<x<۲\\ -۱ & x>۲\end{cases}$$

$f'(x)$ همواره مخالف صفر است، پس نقاط بحرانی نقاطی خواهند بود که مشتق تابع در آن تعریف نشده است.

$$f'_{+}(۲)=-۱\ ,\ f'_{-}(۲)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow f'_{+}(۲)\neq f'_{-}(۲)$$

پس نقطهٔ $x=۲$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع است.

x	۰		۲		$+\infty$
f'		$+$	ت ن	$-$	
f	۰	$\nearrow$	۲	$\searrow$	$-\infty$

$$f(۲)=۲\ ,\ f(۰)=۰$$

با توجه به جدول بالا نقطهٔ $(۲,۲)$ نقطهٔ ماکزیمم تابع f است. پس این نقطه هم ماکزیمم نسبی و هم ماکزیمم مطلق است.

۱۴ -

الف

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+۴\quad D_f=\mathbb{R}$$

تابع چندجمله‌ای f در کل $\mathbb{R}$ مشتق اول و دوم دارد.

$$f'(x)=x^{۲}-۲x-۳\Rightarrow f''(x)=۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f''(x)=۲x-۲$		$-$ $\frown$	۰	$+$ $\smile$	

$$\Rightarrow\begin{cases}x<۱\Rightarrow \text{تقعر رو به پایین}\\ x>۱\Rightarrow \text{تقعر رو به بالا}\\ x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}-۱-۳+۴=\frac{۱}{۳}\Rightarrow (۱,\frac{۱}{۳})\ \text{نقطهٔ عطف}\end{cases}$$

ب

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{۱\}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-۱-(x+۱)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۰-۲(x-۱)\times(-۲)}{(x-۱)^{۴}}=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}}$$

مشتق دوم در نقطهٔ $x=۱$ تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f''(x)=\dfrac{۴}{(x-۱)^{۳}}$		$-$ $\frown$	ت ن	$+$ $\smile$	

$$\Rightarrow\begin{array}{l}x<۱\Rightarrow \text{تقعر رو به پایین}\\ x>۱\Rightarrow \text{تقعر رو به بالا}\end{array}$$

تقعر منحنی در $x=۱$ عوض می‌شود ولی چون تابع در $x=۱$ تعریف نشده است پس این نقطه، نقطهٔ عطف نیست.

پ

$$f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}\quad D_f=\mathbb{R}$$

تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است و داریم:

$$f(x)=(x+۱)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳}(x+۱)^{\frac{۱}{۳}-۱}=\frac{۱}{۳}(x+۱)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۱}{۳}(-\frac{۲}{۳})(x+۱)^{-\frac{۲}{۳}-۱}=-\frac{۲}{۹}(x+۱)^{-\frac{۵}{۳}}=-\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^{۵}}}=\frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^{۵}}}$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$f''(x)=\dfrac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^{۵}}}$		$+$ $\smile$	ت ن	$-$ $\frown$	

$$\Rightarrow\begin{array}{l}x<-۱\Rightarrow \text{تقعر رو به بالا}\\ x>-۱\Rightarrow \text{تقعر رو به پایین}\end{array}$$

$f'(x)=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}}} \Rightarrow f'(-۱)=+\infty$ تابع در $x=-۱$ مماس قائم دارد.

پس نقطهٔ $x=-۱$ عطف قائم تابع است.

۱۵ -

الف

$$f(x)=۲x^{۲}-۴x+۱ \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

محل برخورد با محور yها $x=۰ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow (۰,۱)$

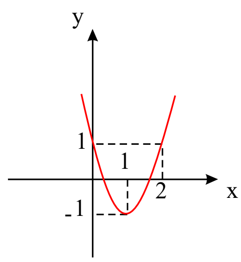
محل برخورد با محور xها $y=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}-۴x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶-۸=۸ \Rightarrow x=\dfrac{۴\pm ۲\sqrt{۲}}{۴}=۱\pm\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^{۲}-۴x+۱)=\lim_{x\to\pm\infty}۲x^{۲}=۲(\pm\infty)^{۲}=۲(+\infty)=+\infty$$

اکسترمم نسبی $f'(x)=۴x-۴=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=f(۱)=۲-۴+۱=-۱ \Rightarrow (۱,-۱)$

$f''(x)=۴>۰ \Rightarrow$ همواره تقعر رو به‌بالا دارد.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)=۴x-۴$		$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)=۴$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	۱	$\searrow$	-۱	$\nearrow$	$+\infty$



ب

$$f(x)=x^{۳}-۵x+۵ \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

محل برخورد با محور yها $x=۰ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow (۰,۵)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^{۳}-۵x+۵)=\lim_{x\to\pm\infty}x^{۳} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{۳}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^{۳}=-\infty\end{cases}$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۵=۰ \Rightarrow x^{۲}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

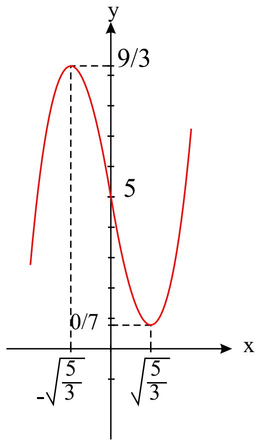
$$x=\sqrt{\frac{۵}{۳}} \Rightarrow y=f(\sqrt{\frac{۵}{۳}})=\frac{۵}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}-۵\sqrt{\frac{۵}{۳}}+۵=-\frac{۱۰}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}+۵\simeq ۰/۷$$

$$x=-\sqrt{\frac{۵}{۳}} \Rightarrow y=f(-\sqrt{\frac{۵}{۳}})=-\frac{۵}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}+۵\sqrt{\frac{۵}{۳}}+۵=\frac{۱۰}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}+۵\simeq ۹/۳$$

نقاط $(\sqrt{\frac{۵}{۳}},۰/۷)$ و $(-\sqrt{\frac{۵}{۳}},۹/۳)$ اکسترمم‌های نسبی هستند.

نقطهٔ عطف $f''(x)=۶x=۰ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow y=f(۰)=۵ \Rightarrow (۰,۵)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		۰		$\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		$+\infty$
$f'(x)=۳x^{۲}-۵$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)=۶x$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	۵	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



پ

$$f(x)=-x(x+۲)^۲=-x(x^۲+۴x+۴)=-x^۳-۴x^۲-۴x \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

$$x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow (۰,۰), y=۰\Rightarrow -x(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=۰, x=-۲\Rightarrow(-۲,۰)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-x^۳-۴x^۲-۴x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-x^۳)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^۳)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^۳)=+\infty\end{cases}$$

$$f'(x)=-۳x^۲-۸x-۴=۰\Rightarrow\Delta=۶۴-۴۸=۱۶\Rightarrow x=\frac{۸\pm۴}{-۶}\Rightarrow x=-۲,-\frac{۲}{۳}$$

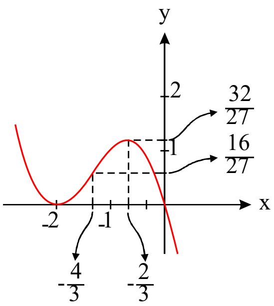
$$x=-۲\Rightarrow y=f(-۲)=۰, x=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=f(-\frac{۲}{۳})=\frac{۲}{۳}(-\frac{۲}{۳}+۲)^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۲}{۲۷}$$

نقاط $(-۲,۰)$ و $(-\frac{۲}{۳},\frac{۳۲}{۲۷})$ اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

$$f''(x)=-۶x-۸=۰\Rightarrow x=-\frac{۸}{۶}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow y=f(-\frac{۴}{۳})=\frac{۴}{۳}(-\frac{۴}{۳}+۲)^۲$$

$$\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱۶}{۲۷}\Rightarrow(-\frac{۴}{۳},\frac{۱۶}{۲۷})$$ نقطهٔ عطف

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		$-\frac{۲}{۳}$		۰		$+\infty$
$f'(x)=-۳x^۲-۸x-۴$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
$f''(x)=-۶x-۸$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	$\frac{۱۶}{۲۷}$	$\nearrow$	$\frac{۳۲}{۲۷}$	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty$



ت

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۲} \quad , \quad D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow\lim_{x\to۲}(\frac{۲x-۱}{x-۲})\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}\frac{۲x-۱}{x-۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to۲^-}\frac{۲x-۱}{x-۲}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=۲$$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{2x-1}{x-2}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y = 2$ مجانب افقی

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ محل برخورد با محور yها

$y = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ محل برخورد با محور xها

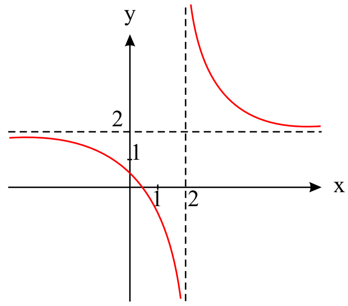
$f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x - 4 - 2x + 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$ مشتق همواره منفی

تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$f''(x) = \frac{0 - 2(x-2)(-3)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^3} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow f'' < 0 \ , \ x > 2 \Rightarrow f'' > 0$

تقعر منحنی در نقطهٔ $x = 2$ عوض می‌شود.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$		$-$		$-$		$-$	ت ن	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$, $+\infty$	$\searrow$	2



ث

$f(x) = \frac{-x}{x+3} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \lim_{x\to -3} \frac{-x}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to(-3)^-} \frac{-x}{x+3} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to(-3)^+} \frac{-x}{x+3} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$ $x = -3$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow y = -1$ مجانب افقی

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$ محل برخورد با محور xها و yها

$f'(x) = \frac{-1(x+3) - 1(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-x - 3 + x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2} < 0$ مشتق همواره منفی

تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$f''(x) = \frac{0 - 2(x+3)(-3)}{(x+3)^4} = \frac{6}{(x+3)^3} \Rightarrow x < -3 \Rightarrow f'' < 0 \ , \ x > -3 \Rightarrow f'' > 0$

تقعر منحنی در $x = -3$ عوض می‌شود.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2}$		$-$		$-$		$-$	
$f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$		$-$	ت ن	$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$, $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1