نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ وتر برابر ۳ است. مثلث را حول ارتفاع آن دوران می‌دهیم. بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم مخروط حاصل چند برابر $\sqrt{۳}\,\pi$ است؟

① ۶

② ۲

③ ۸

④ ۴

۲ - در ساخت یک تانکر به‌شکل استوانهٔ قائم به‌حجم ۲π، با کدام شعاع قاعده، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

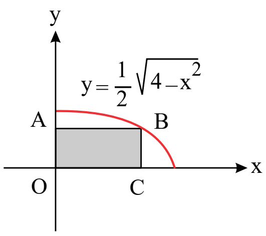
① ۱

② $\sqrt{۲}$

③ $\sqrt[۳]{۲}$

④ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳ - در شکل مقابل مستطیل $OABC$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. بیش‌ترین حجم استوانهٔ قائم ایجادشده چقدر است؟



① $\frac{\pi}{۹\sqrt{۳}}$

② $\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$

③ $\frac{\pi}{۸\sqrt{۳}}$

④ $\frac{\pi}{۱۶\sqrt{۳}}$

۴ - بیش‌ترین محیط مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن‌ها برابر یک واحد است، کدام است؟

① ۲

② ۳

③ $\sqrt{۲}+۱$

④ $\sqrt{۲}+۲$

۵ - کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۸\\۰\end{matrix}\right.$ از نقاط منحنی $y=x\sqrt{x}$ چقدر است؟

① $۲\sqrt{۱۰}$

② ۶

③ $۲\sqrt{۱۱}$

④ $۳\sqrt{۵}$

۶ - اگر $۴x+۳y=۷$ باشد، کم‌ترین مقدار $x^{۲}+y^{۲}$ چه عددی است؟

① $\frac{۲۵}{۴۸}$

② $\frac{۴۸}{۲۵}$

③ $\frac{۴۹}{۲۵}$

④ $\frac{۲۵}{۴۹}$

۷ - در یک مخروط قائم حاصل‌جمع ارتفاع و قطر قاعده ۳ می‌باشد. اگر حجم مخروط ماکسیمم باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

① $\frac{۳}{۲}$

② ۲

③ ۱

④ $\frac{۴}{۳}$

۸ - کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A به‌عرض ۲ واقع بر محور عرض‌ها از نقاط منحنی $y = x^{۲}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

(۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

(۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۹ - تابع $f(x) = \frac{x^{۲}}{x-۱}$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

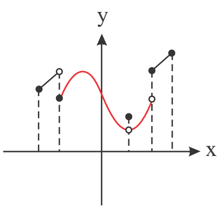
(۱) ۱، ۱

(۲) ۱، صفر

(۳) ۱، ۲

(۴) ۲، ۱

۱۰ - اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، تابع به‌ترتیب از راست به چپ چند مینیمم نسبی و چند ماکسیمم نسبی دارد؟



(۱) ۱، ۱

(۲) ۲، ۱

(۳) ۱، ۲

(۴) ۲، ۲

۱۱ - ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۹x - ۱$ چه‌قدر از مینیمم مطلق آن در فاصله‌ی $[-۲, ۲]$ بیش‌تر است؟

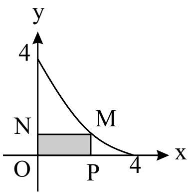
(۱) ۳۳

(۲) ۲۷

(۳) ۱۸

(۴) ۲۱

۱۲ – شکل زیر مربوط به تابع $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲$ است. اگر نقطهٔ M همواره روی این تابع قرار داشته باشد، طول نقطهٔ P چقدر باشد تا مساحت مستطیل $ONMP$ ماکسیمم شود؟



① ۱

② $\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۱}{۴}$

④ $\frac{۳}{۲}$

۱۳ – حاصل ضرب مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f\left(x\right)=x\sqrt{۴-x^{۲}}$ کدام است؟

① صفر

② -۲

③ -۸

④ -۴

۱۴ – تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^{۴}-۴x^{۳}$ در نقطه‌ی .... دارای .... است.

① $x=۱$، ماکسیمم نسبی

② $x=۰$، مینیمم نسبی

③ $x=۰$، ماکسیمم نسبی

④ $x=۱$، مینیمم نسبی

۱۵ – کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=۲-|x+۱|$ صحیح است؟

① ماکسیمم مطلق برابر با صفر دارد.

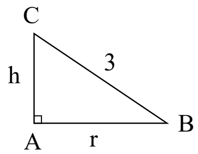
② مینیمم مطلق برابر با صفر دارد.

③ ماکسیمم مطلق برابر با ۲ دارد.

④ مینیمم مطلق برابر با ۲ دارد.

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲



حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

اگر مثلث را حول AC دوران دهیم، مخروطی با شعاع قاعدهٔ $AB=r$ و ارتفاع $AC=h$ حاصل می‌شود که حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{\pi}{۳}(AB)^۲(AC)=\frac{\pi}{۳}r^۲h \quad (*)$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم $r^۲+h^۲=۹$، پس: $r^۲=۹-h^۲$

با جای‌گذاری این مقدار در $(*)$ داریم:

$$V(h)=\frac{\pi}{۳}(۹-h^۲)h=\frac{\pi}{۳}(۹h-h^۳)$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{۳}(۹-۳h^۲)\xrightarrow{V'(h)=۰}۹-۳h^۲=۰\Rightarrow h^۲=۳\xrightarrow{h>۰}h=\sqrt{۳}$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای حجم مخروط برابر است با:

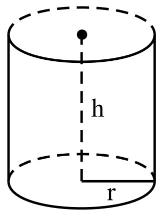
$$V_{Max}=\frac{\pi}{۳}(۹-۳)\sqrt{۳}=۲\pi\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینهٔ «۲» پاسخ است.

۲ - گزینه ۱ طبق فرض حجم استوانه ۲π است، پس:

$$\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\pi r^۲h=۲\pi\Rightarrow hr^۲=۲\Rightarrow h=\frac{۲}{r^۲}$$

می‌خواهیم سطح کل که از سطح جانبی و سطح دو قاعده تشکیل شده است، کم‌ترین باشد.



$$S_{\text{کل}}=\underbrace{۲\pi r^۲}_{\text{سطح دو قاعده}}+\overbrace{۲\pi rh}^{\text{سطح جانبی}}=۲\pi r^۲+۲\pi r\times\frac{۲}{r^۲}=۲\pi(r^۲+\frac{۲}{r}) : \text{یک‌متغیره}$$

$$S'=۰\Rightarrow ۲r-\frac{۲}{r^۲}=۰\Rightarrow\frac{۲r^۳-۲}{r^۲}=۰\Rightarrow r=۱$$

به‌ازای $r=۱$، سطح کل کم‌ترین مقدار خواهد بود.

۳ - گزینه ۲ با دوران مستطیل داده‌شده حول محور xها یک استوانهٔ قائم به‌دست می‌آید که ارتفاع این استوانه x و شعاع قاعدهٔ آن y است.

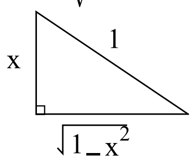
$$V_{\text{استوانه}}=\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\pi r^۲h=\pi xy^۲ : \text{دومتغیره}$$

$$\text{پس}: \pi xy^۲=\pi x\left(\frac{۱}{۴}(۴-x^۲)\right)=\pi(x-\frac{۱}{۴}x^۳) : \text{یک‌متغیره}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}\pi(۱-\frac{۳}{۴}x^۲)=۰\rightarrow\frac{۳}{۴}x^۲=۱\rightarrow x^۲=\frac{۴}{۳}$$

$$\rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\rightarrow V_{Max}=\pi(\frac{۲}{\sqrt{۳}}-\frac{۸}{۱۲\sqrt{۳}})=\frac{۱۶\pi}{۱۲\sqrt{۳}}=\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

۴ - گزینه ۳ مثلث را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم:



بنابراین داریم:

$$\text{محیط}: P(x)=x+۱+\sqrt{۱-x^۲},\ ۰<x<۱$$

$$P'(x)=۱+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}=۰\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}=۱\Rightarrow x^۲=۱-x^۲\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow P_{Max}=P(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}+۱$$

۵ - گزینه ۳ نقطهٔ $B\left|\begin{matrix}x\\x\sqrt{x}\end{matrix}\right.$ را روی منحنی $y=x\sqrt{x}$ درنظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۸\\۰\end{matrix}\right.\\B\left|\begin{matrix}x\\x\sqrt{x}\end{matrix}\right.\end{cases}\to AB=\sqrt{(۸-x)^{۲}+(۰-x\sqrt{x})^{۲}}=\sqrt{۶۴+x^{۲}-۱۶x+x^{۳}}=\sqrt{x^{۳}+x^{۲}-۱۶x+۶۴}:\text{یک‌متغیره}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}\frac{۱(۳x^{۲}+۲x-۱۶)}{۲\sqrt{x^{۳}+x^{۲}-۱۶x+۶۴}}=۰\to ۳x^{۲}+۲x-۱۶=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۴+۱۹۲=۱۹۶}\begin{cases}x=\dfrac{-۲+۱۴}{۶}=۲\to \text{کم‌ترین فاصله}=\sqrt{۸+۴-۳۲+۶۴}=\sqrt{۴۴}=۲\sqrt{۱۱}\\x=\dfrac{-۲-۱۴}{۶}=\dfrac{-۸}{۳}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۶ - گزینه ۳

$$۴x+۳y=۷\to ۳y=۷-۴x\to y=\frac{۷}{۳}-\frac{۴}{۳}x$$

$$\text{پس}:x^{۲}+y^{۲}=x^{۲}+(\frac{۷}{۳}-\frac{۴}{۳}x)^{۲}:\text{یک‌متغیره}\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}۲x+۲(\frac{۷}{۳}-\frac{۴}{۳}x)(-\frac{۴}{۳})=۰$$

$$\to ۲x-\frac{۵۶}{۹}+\frac{۳۲}{۹}x=۰\to\frac{۵۰x}{۹}=\frac{۵۶}{۹}\to ۵۰x=۵۶$$

$$\to x=\frac{۵۶}{۵۰}\xrightarrow{y=\frac{۷}{۳}-\frac{۴}{۳}x}y=\frac{۷}{۳}-\frac{۲۲۴}{۱۵۰}=\frac{۱۲۶}{۱۵۰}=\frac{۴۲}{۵۰}$$

$$\text{بنابراین}:Min(x^{۲}+y^{۲})=(\frac{۵۶}{۵۰})^{۲}+(\frac{۴۲}{۵۰})^{۲}=\frac{۴۹۰۰}{۲۵۰۰}=\frac{۴۹}{۲۵}$$

۷ - گزینه ۳ حجم مخروط به‌شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h از رابطهٔ $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ به‌دست می‌آید.

$$h+۲r=۳\to h=۳-۲r$$

$$\text{پس}:V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}(۳-۲r)=\frac{\pi}{۳}(۳r^{۲}-۲r^{۳}):\text{یک‌متغیره}\xrightarrow{V'=۰}\frac{\pi}{۳}(۶r-۶r^{۲})=۰$$

$$\to\begin{cases}r=۰\ \text{غ‌ق‌ق}\\r=۱\xrightarrow{h=۳-۲r}h=۳-۲=۱\end{cases}$$

۸ - گزینه ۴ نقطهٔ A به مختصات $\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ و نقطهٔ B روی منحنی $y=x^{۲}$ به‌مختصات $\left|\begin{matrix}x\\x^{۲}\end{matrix}\right.$ را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.\\B\left|\begin{matrix}x\\x^{۲}\end{matrix}\right.\end{cases}\to AB=\sqrt{(۰-x)^{۲}+(۲-x^{۲})^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+۴+x^{۴}-۴x^{۲}}=\sqrt{x^{۴}-۳x^{۲}+۴}:\text{یک‌متغیره}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}\frac{۴x^{۳}-۶x}{۲\sqrt{x^{۴}-۳x^{۲}+۴}}=۰\to ۲x(۲x^{۲}-۳)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=\pm\sqrt{\dfrac{۳}{۲}}\end{cases}$$

با استفاده از جدول تغییرات مشخص می‌شود که کم‌ترین مقدار تابع به‌ازای $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ رخ می‌دهد.

$$\text{کم‌ترین فاصله}=\sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)^{۴}-۳\left(\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)^{۲}+۴}=\sqrt{\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۴}=\sqrt{\frac{۷}{۴}}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

۹ - گزینه ۱ کافی است که از تابع داده شده مشتق گرفته و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۲}{x-۱}\to f'(x)=\frac{۲x(x-۱)-۱(x^۲)}{(x-۱)^۲}=\frac{۲x^۲-۲x-x^۲}{(x-۱)^۲}=\frac{x^۲-۲x}{\underbrace{(x-۱)^۲}_{+}}=۰$$

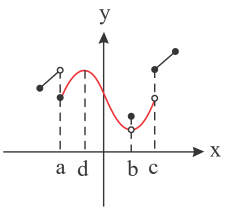
$$\to x(x-۲)=۰\to x=۰\ ,\ x=۲$$

به‌ازای $x=۱$، مشتق وجود ندارد.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
(x^2-2x) y′	+	0	−	‖	−	0	+
y	↗	Max	↘	‖	↘	Min	↗

بنابراین تابع دارای یک Min نسبی و یک Max نسبی است.

۱۰ - گزینه ۳ با توجه به شکل زیر تابع در نقطه‌ی به طول $x=a$ مینیمم نسبی و در نقاط $x=d$ و $x=b$ ماکسیمم نسبی دارد.



۱۱ - گزینه ۲ کافی است مقدار تابع را به‌ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب کنیم در بین این اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است.

$$f'(x)=۳x^۲-۶x-۹=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\\ x=-\dfrac{c}{a}=۳\ \text{(در بازه قرار ندارد) غ ق ق}\end{cases}$$

$$f(-۲)=-۸-۱۲+۱۸-۱=-۳$$

$$f(-۱)=-۱-۳+۹-۱=۴\to \text{مطلق}\ Max$$

$$f(۲)=۸-۱۲-۱۸-۱=-۲۳\to \text{مطلق}\ Min$$

بنابراین Max مطلق تابع، ۲۷ واحد از Min مطلق تابع آن بیشتر است.

۱۲ - گزینه ۱ در رابطهٔ ۲ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=$ مقدار y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم. $y=(۲-\sqrt{x})^۲$

نقطهٔ M، مختصاتش به‌صورت $M(x,(۲-\sqrt{x})^۲)$ خواهدبود. مساحت مستطیل را بر حسب x محاسبه کرده و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم.

$$S=x(۲-\sqrt{x})^۲\Rightarrow S'=(۲-\sqrt{x})^۲+x\times ۲(۲-\sqrt{x})(-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})=۰$$

$$\Rightarrow(۲-\sqrt{x})(۲-\sqrt{x}-\sqrt{x})=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow S=۱\\ x=۴\Rightarrow S=۰\end{cases}\Rightarrow S_{Max}=۱$$

۱۳ - گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۲,۲]$، حال نقاط بحرانی تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=\sqrt{۴-x^۲}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}(x)=\sqrt{۴-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{۴-x^۲-x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{۴-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}$$

از معادله‌ی $f'(x)=۰$ نتیجه می‌گیریم که نقاط $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)$ هستند. حال داریم:

$$f(۲)=f(-۲)=۰\ \ ,\ \ f(\sqrt{۲})=۲\ \ ,\ \ f(-\sqrt{۲})=-۲$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f برابر $-۴=۲\times(-۲)$ است.

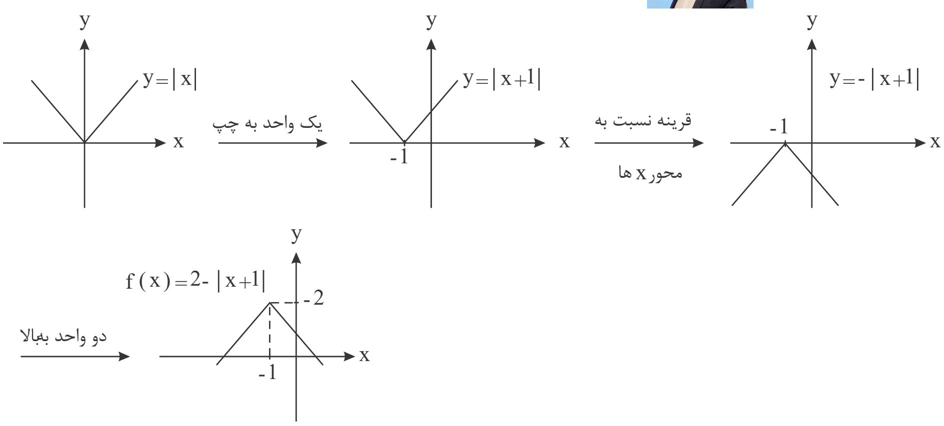
۱۴ - گزینه ۴ کافی است که از تابع داده مشتق گرفته و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f(x)=۳x^۴-۴x^۳\to f'(x)=۱۲x^۳-۱۲x^۲=۱۲x^۲(x-۱)=۰\begin{cases}x=۰\\ x=۱\end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$۱۲x^۲(x-۱)y'$		−	۰	−	۰	+	
y		↘		↘	Min	↗	

$\to$ تابع در $x=۱$ دارای مینیمم نسبی است.

۱۵ - گزینه ۳ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



پس تابع f ماکسیمم مطلقی برابر ۲ دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۴ - ۳	۷ - ۳	۱۰ - ۳	۱۳ - ۴
۲ - ۱	۵ - ۳	۸ - ۴	۱۱ - ۲	۱۴ - ۴
۳ - ۲	۶ - ۳	۹ - ۱	۱۲ - ۱	۱۵ - ۳