نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60$ در بازه‌ی $[-2,3]$ کدام است؟

(۱) ۶۹

(۲) ۷۸

(۳) ۶۵

(۴) ۶۴

۲ - اگر مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - (\frac{2a+1}{2})x^2 + (3a-1)x + 7$ برابر ۳ باشد، حاصل ضرب طول‌های نقاط بحرانی این تابع چقدر است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۶

۳ - تابع $f(x)$ یک چند جمله‌ای است. اگر $f'(x) = (x^2+3x+2)(x^2+4x+3)$، تابع f چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۲ ماکسیمم نسبی و ۲ مینیمم نسبی

(۲) ۲ ماکسیمم نسبی و ۱ مینیمم نسبی

(۳) ۱ ماکسیمم نسبی و ۲ مینیمم نسبی

(۴) ۱ ماکسیمم نسبی و ۱ مینیمم نسبی

۴ - اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 6x + 5m - 1$ برابر ۲۹ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) ۷

(۲) $\frac{34}{5}$

(۳) $\frac{33}{5}$

(۴) $\frac{36}{5}$

۵- ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۴}{۳}x^۳-۳x^۲+۲x-۷$ در بازه‌ی $[۰,۳]$ چقدر است؟

① ۸
② ۹
③ $\frac{۲۰}{۳}$
④ $\frac{۷۹}{۱۲}$

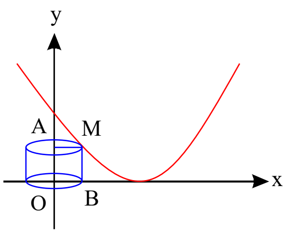
۶- نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{x^۲}{۲}$ چگونه است؟

① مینیمم نسبی
② ماکسیمم نسبی
③ عادی
④ مشتق‌ناپذیر

۷- عبارت $y=\frac{x^۲+x+۱}{x}$ به ازای $x<۰$ چگونه است؟

① ماکسیممی برابر -۲ دارد.
② ماکسیممی برابر -۱ دارد.
③ می‌نیممی برابر -۲ دارد.
④ می‌نیممی برابر -۱ دارد.

۸- باتوجه به شکل زیر، روی منحنی $f(x)=(x-۴)^۲$ نقطه‌ی M را مشخص می‌کنیم. مستطیل $OAMB$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ی ایجاد شده کدام است؟



① ۸π
② ۱۶π
③ ۳۲π
④ ۶۴π

۹ - تابع $f(x) = |\cos x|$ چند نقطه‌ی بحرانی در فاصله‌ی $(0, 2\pi)$ دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰ - تابع $f(x) = x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + 2$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

۱۱ - کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 1$ کدام است؟

(۱) -142

(۲) -143

(۳) -144

(۴) -145

۱۲ - بیش‌ترین مقدار عبارت $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{8}$

۱۳ - تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲} + ۱۷$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۱۴ - مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۵$ در $[-۱, ۴]$ کدام است؟

① صفر

② ۱

③ ۵

④ ۲

۱۵ - اگر تابع $f(x) = ax^۳ + bx + ۷$ در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ دارای ماکسیمم نسبی ۱۰ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

① -۶

② -۴

③ $-\frac{۱۱}{۲}$

④ $-\frac{۱۳}{۲}$

۱۶ - اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۶x + ۵m - ۱$ برابر ۲۹ باشد، مقدار m کدام است؟

① ۷

② $\frac{۳۶}{۵}$

③ $\frac{۳۳}{۵}$

④ $\frac{۳۴}{۵}$

۱۷- اگر $f(x) = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$، تابع $f'(x)$ چند ماکسیمم نسبی دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

۱۸- مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x) = (x+۲)^{\frac{۲}{۳}} + ۱$ در بازه‌ی $[-۳, ۰]$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[۳]{۴} + ۱$

(۲) $\sqrt[۳]{۴} + ۲$

(۳) ۳

(۴) $\sqrt[۳]{۴} + ۳$

۱۹- تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در $x = \sqrt{۲}$ کدام ویژگی‌ها را داراست؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است)

(۱) فقط مینیمم نسبی دارد.

(۲) فقط مینیمم نسبی و مطلق دارد.

(۳) فقط مینیمم مطلق دارد.

(۴) مینیمم نسبی و مطلق و ماکسیمم نسبی دارد.

۲۰- تابع $y = \left|۲^{x} - ۱\right|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۱- بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱$ در فاصله‌ی $[۰, ۲]$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۲ – طول ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = x^۴ - ۴x^۳ - ۸x^۲ + ۱$ کدام است؟

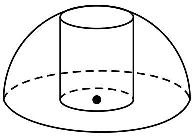
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) ۴

۲۳ – درون نیم‌کره‌ای به شعاع ۵، استوانه‌ای مطابق شکل محاط کرده‌ایم. بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم این استوانه چند برابر $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ است؟



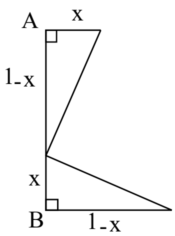
(۱) ۱۲۵

(۲) ۲۵۰

(۳) ۵۰۰

(۴) ۲۲۵

۲۴ – به‌ازای کدام مقدار x، حجم حاصل از دوران شکل مقابل حول AB، ماکسیمم است؟



(۱) $\frac{۱}{۲}$

(۲) $\frac{۱}{۳}$

(۳) $\frac{۲}{۳}$

(۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۵ – مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^۵ + ۳x + ۱$ در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ چقدر است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۳۷

(۳) ۳۸

(۴) ۳۹

۲۶ـ اگر $a > ۰$ و مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = ax\sqrt{۱ - x^۲}$ برابر $\sqrt{۶}$ باشد، مقدار a چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۶
(۴) ۴

۲۷ـ نقطه‌ی اکسترمم نسبی (ماکسیمم یا مینیمم) تابع به معادله‌ی $y = \frac{x + ۱}{x^۳}$ از چه نوعی است و در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟

(۱) ماکسیمم – دوم
(۲) مینیمم – دوم
(۳) ماکسیمم – سوم
(۴) مینیمم – سوم

۲۸ـ ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ در بازه‌ی $[۱, ۳]$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

۲۹ـ مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲} + ۱$ در بازه‌ی $[-۲, ۰]$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱۳}{۴}$
(۲) $\frac{۷}{۲}$
(۳) $\frac{۱۵}{۴}$
(۴) ۴

۳۰- اگر حاصل‌ضرب طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}+(m-1)x+1$ برابر ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱ برای محاسبه‌ی ماکسیمم و مینیمم مطلق یک تابع در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به ازای این نقاط و نقاط a و b به‌دست می‌آوریم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۲ = ۶(x^۲ - ۳x + ۲) = ۶(x-۱)(x-۲) = ۰$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود $x=۱$ و $x=۲$ نقاط بحرانی تابع f در بازه‌ی مورد نظر هستند. حال مقادیر تابع را در دو سر بازه و نقاط بحرانی تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-۲) = -۱۶ - ۳۶ - ۲۴ + ۶۰ = -۱۶ \\ f(۳) = ۵۴ - ۸۱ + ۳۶ + ۶۰ = ۶۹ \rightarrow Max\ \text{مطلق} \\ f(۱) = ۲ - ۹ + ۱۲ + ۶۰ = ۶۵ \\ f(۲) = ۱۶ - ۳۶ + ۲۴ + ۶۰ = ۶۴ \end{cases}$$

۲ ـ گزینه ۲ تابع داده شده یک چند جمله‌ای است و ریشه‌های مشتق آن طول نقاط بحرانی تابع هستند.

$$f(x) = \frac{x^۳}{۳} - \left(\frac{۲a+۱}{۲}\right)x^۲ + (۳a-۱)x + ۷ \rightarrow f'(x) = x^۲ - (۲a+۱)x + ۳a - ۱$$

$$\text{مجموع طول‌های نقاط بحرانی} = ۳ \rightarrow -\frac{b}{a} = ۳ \rightarrow ۲a+۱ = ۳ \rightarrow ۲a = ۲ \rightarrow a = ۱$$

$$\text{حاصلضرب طول‌های نقاط بحرانی} = \frac{c}{a} = ۳a - ۱ = ۳(۰) - ۱ = ۲$$

۳ ـ گزینه ۴ کافی است ریشه‌های مشتق را بدست آورده و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x) = (x^۲+۳x+۲)(x^۲+۴x+۳) = (x+۱)(x+۲)(x+۱)(x+۳) = (x+۱)^۲(x+۲)(x+۳) = ۰$$

$\rightarrow x=-۱, x=-۲, x=-۳ \rightarrow$

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$		$\nearrow$	

تابع f در $x=-۳$ دارای ماکسیمم نسبی و در $x=-۲$ دارای مینیمم نسبی است.

۴ ـ گزینه ۲

$$f(x) = ۲x^۳ - ۶x + m - ۱ \rightarrow f'(x) = ۶x^۲ - ۶ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۱$$

$\rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱ \rightarrow$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

باتوجه به جدول $x=۱$ طول نقطه‌ی Min نسبی تابع است پس $\left|\begin{matrix}۱\\۲۹\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی Min نسبی تابع است و در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۱\\۲۹\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۲۹ = ۲ - ۶ + ۵m - ۱ \rightarrow ۵m = ۳۴ \rightarrow m = \frac{۳۴}{۵}$$

۵ ـ گزینه ۱ برای پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق تابع f در $[a,b]$ کافی است نقطه یا نقاط بحرانی تابع را بدست آورده و مقدار تابع را به‌ازای این نقاط بحرانی بدست آورید سپس $f(a)$ و $f(b)$ را نیز بدست آورید. در بین این اعداد، بزرگترین آن‌ها Max مطلق و کوچکترین آن‌ها Min مطلق است.

$$f(x) = \frac{۴}{۳}x^۳ - ۳x^۲ + ۲x - ۷ \rightarrow f'(x) = ۴x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$f(۰) = -۷\ ,\ f(۳) = ۸\ ,\ f(۱) = \frac{-۲۰}{۳}\ ,\ f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{-۷۹}{۱۲}$$

بزرگترین این اعداد برابر ۸ است.

۶ ـ گزینه ۱ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که به ازای آن‌ها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $D_f = R - \{۰\}$ است.

$$f(x) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{۲}x^۲ \rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} + x = \frac{-۱+x^۳}{x^۲} = \frac{x^۳-۱}{x^۲}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \rightarrow x = ۱ : \text{بحرانی} \\ \text{مخرج} = ۰ \rightarrow x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \rightarrow \text{بحرانی نمی‌باشد زیرا در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد} \end{cases}$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	ن	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

بنابراین $x=۱$ طول نقطه‌ی Min نسبی تابع است.

۷ - گزینه ۲

$$y=\frac{x^۲+x+۱}{x}=x+۱+\frac{۱}{x}\to y'=۱-\frac{۱}{x^۲}=\frac{x^۲-۱}{x^۲}=۰\to x=۱\ ,\ x=-۱$$

به ازای $x=۰$، مشتق وجود ندارد.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y′		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	-1 Max	↘	‖	↘	3	↗	

بنابراین تابع در $x<۰$، ماکسیممی برابر -۱ دارد.

۸ - گزینه ۲ نقطه‌ی M به مختصات $M(x,(x-۴)^۲)$ را در نظر می‌گیریم. پس باتوجه به شکل، شعاع قاعده‌ی x و ارتفاع $(x-۴)^۲$ است.

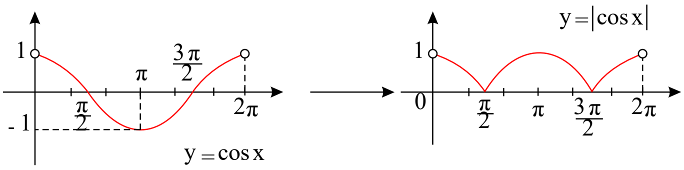
حجم استوانه $V=\pi r^۲h\Rightarrow V(x)=\pi x^۲(۴-x)^۲$

$$V(x)=\pi(۴x-x^۲)^۲\Rightarrow V'(x)=۲\pi(۴x-x^۲)(۴-۲x)=۰$$

جواب‌های $V'(x)=۰$ برابر ۰ و ۴ و ۲ است که ۰ و ۴ قابل قبول نیست. (در این حالت حجم صفر می‌شود)

$$V(x)=\pi x^۲(۴-x)^۲\xrightarrow{x=۲}V(۲)=۱۶\pi$$

۹ - گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که به ازای آنها مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند. این سؤال را به کمک رسم شکل حل می‌کنیم.



تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ مشتق‌ناپذیر است (نقاط زاویه‌دار) و در $x=\pi$ مشتق برابر صفر است. بنابراین تابع دارای سه نقطه‌ی بحرانی است.

۱۰ - گزینه ۳ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند.

$$f(x)=x\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x^۲}+۲=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}+۲\to f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$\to f'(x)=\frac{۲}{۳}(۲x^{\frac{۱}{۳}}-x^{-\frac{۱}{۳}})=\frac{۲}{۳}(۲\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})=\frac{۲}{۳}(\frac{۲\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

$$\to\begin{cases}\text{صورت}=۰\to ۲\sqrt[۳]{x^۲}=۱\to\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{توان۳}}x^۲=\frac{۱}{۸}\to x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۸}}\\ \text{مخرج}=۰\ \to\sqrt[۳]{x}=۰\to x=۰\end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در بازه‌ی $(-۱,۱)$ قرار دارند بنابراین تابع دارای سه نقطه‌ی بحرانی است.

۱۱ - گزینه ۲ برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق یک تابع در بازه‌ی $[a,b]$ کافی است که مقدار تابع را به ازای طول یا طول‌های نقاط بحرانی به‌دست آوریم سپس مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه به‌دست آوریم. در بین اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است. اگر بازه داده نشد دامنه‌ی تعریف تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم. دقت کنید دامنه‌ی تعریف این تابع

$D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

$$f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۵}{۳}x^۳-۳x^۲+۱\to f'(x)=x^۳-۵x^۲-۶x=x(x^۲-۵x-۶)$$

$$=x(x-۶)(x+۱)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۶\\x=-۱\end{cases}$$

$$f(\pm\infty)=\frac{۱}{۴}(\pm\infty)^۴=+\infty\quad,\quad f(۰)=۱\ ,\ f(-۱)=\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۳}-۳+۱=\frac{-۱}{۱۲}$$

$$f(۶)=۳۲۴-۳۶۰-۱۰۸+۱=-۱۴۳$$

این تابع Max مطلق ندارد و Min مطلق آن -۱۴۳ است.

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u=\frac{۱}{۲}\sin ۲u}$

$$\sin\frac{x}{۲}\cdot\cos\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{x}{۲})=\frac{۱}{۲}\sin x$$

بیشترین مقدار عبارت $\sin x$ برابر یک می‌باشد بنابراین بیشترین مقدار عبارت $\frac{1}{2}\sin x$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۳ - گزینه ۳ دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $D_f=(-\infty\,,\,+\infty)$ است و می‌دانیم نقاطی بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+17\rightarrow f'(x)=x^3-x=x(x^2-1)=0\rightarrow x=0\,,\,x=\pm1$$

بنابراین تابع f دارای سه نقطه‌ی بحرانی است.

۱۴ - گزینه ۲ کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی بدست آوریم. کوچک‌ترین عدد ایجاد شده Min مطلق و بزرگ‌ترین عدد ایجاد شده Max مطلق است.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0\rightarrow x=0\,,\,x=2$$

$$f(0)=5\,,\ f(2)=8-12+5=1\,,\ f(-1)=-1-3+5=1\ ,\ f(4)=64-48+5=21$$

پس Min مطلق تابع برابر یک می‌باشد.

۱۵ - گزینه ۱ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند: ۱- در تابع صدق می‌کنند ۲- طولشان ، y' را صفر می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\begin{array}{l}1\\10\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}10=a+b+7\rightarrow a+b=3\\[2mm]\left|\begin{array}{l}1\\10\end{array}\right.\xrightarrow{\text{طولش}\,,\,y'\,\text{را صفر می کند}}y'=3ax^2+b\rightarrow 0=3a+b\end{array}\right\}\rightarrow a=-\frac{3}{2}\,,\,b=\frac{9}{2}$$

پس $a-b=-\frac{3}{2}-\frac{9}{12}=-6$ است.

۱۶ - گزینه ۴

$$f(x)=2x^3-6x+5m-1\rightarrow f'(x)=6x^2-6=0\rightarrow x=1\,,\,x=-1$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(6x^2-6)y'$		$+$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

از روی جدول مشخص است که $x=1$ طول نقطه‌ی Min است پس نقطه‌ای $\left|\begin{array}{l}1\\29\end{array}\right.$ نقطه‌ی Min تابع است و مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{array}{l}1\\29\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}29=2-6+5m-1\rightarrow 5m=34\rightarrow m=\frac{34}{5}$$

۱۷ - گزینه ۴ برای پیدا کردن ماکسیمم نسبی تابع $f'(x)$ باید از $f'(x)$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده و سپس مشتق گرفته شده را تعیین علامت کنیم.

$$f(x)=x^4-8x^3+24x^2\rightarrow f'(x)=4x^3-24x^2+48x\rightarrow f''(x)=12x^2-48x+48$$

$$\rightarrow f''(x)=12(x^2-4x+4)=12(x-2)^2\geq 0$$

همانطور که مشاهده می‌کنید مشتق $f'(x)$ همواره مثبت است بنابراین تابع فاقد اکسترمم نسبی است.

۱۸ - گزینه ۲ برای محاسبه‌ی ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی $f(x)$ را در این بازه به‌دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به‌ازای نقاط بحرانی و نقاط a و b به‌دست می‌آوریم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

$$f(x)=(x+2)^{\frac{2}{3}}+1\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}\rightarrow$$ طول نقطه‌ی بحرانی است $x=-2$

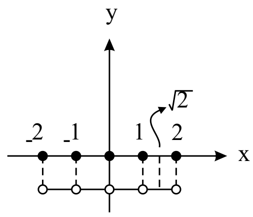
حال مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه و نقطه‌ی بحرانی تعیین می‌کنیم:

$$f(0)=2^{\frac{2}{3}}+1=\sqrt[3]{4}+1\ ,\ f(-2)=0+1=1\ ,\ f(-3)=(-1)^{\frac{2}{3}}+1=1+1=2$$

پس کمترین مقدار تابع $f(x)$ در این بازه برابر ۱ و بیشترین مقدار آن برابر $\sqrt[3]{4}+1$ است. بنابراین مجموع ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ در این بازه برابر $\sqrt[3]{4}+2$ است.

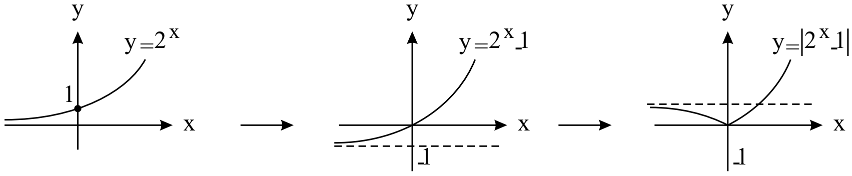
۱۹ - گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ,\quad x\in\mathbb{Z}\\-1 & ,\quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



با توجه به شکل تابع f در $x=\sqrt{2}$ می‌نیمم مطلق دارد. همچنین چون نمودار در حوالی این نقطه روی یک خط راست قرار دارد، پس در $x=\sqrt{2}$ هم می‌نیمم و هم ماکسیمم نسبی دارد.

۲۰ - گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند. برای حل این سوال از رسم شکل کمک می‌گیریم.



تابع یک نقطه‌ی بحرانی در $x=۰$ دارد.

۲۱ - گزینه ۳ نقاط بحرانی تابع را در فاصله‌ی داده شده می‌یابیم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x\in[۰,۲]}x=۱$$

مقدار تابع را در نقطه‌ی بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=۰\to f(۰)=۱\\ x=۱\to f(۱)=-۱\\ x=۲\to f(۲)=۳(\text{مطلق } Max) \end{cases}$$

۲۲ - گزینه ۱ از تابع مشتق گرفته و طول نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=x^{۴}-۴x^{۳}-۸x^{۲}+۱\to f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x^{۲}-۱۶x=۴x(x^{۲}-۳x-۴)=۰$$

$$\to ۴x(x-۴)(x+۱)=۰\to x=۰,x=۴,x=-۱$$

$\Rightarrow$

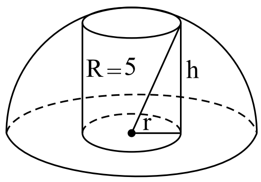
x	$-\infty$		-۱		۰		۴		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

$\to$ $x=۰$ طول Max تابع است

۲۳ - گزینه ۲

حجم استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h برابر است با: $V=\pi r^{۲}h$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در شکل مقابل داریم:



$$r^{۲}+h^{۲}=R^{۲}\Rightarrow r^{۲}+h^{۲}=۲۵\Rightarrow r^{۲}=۲۵-h^{۲}$$

با توجه به نکتهٔ بالا حجم استوانه برابر است با:

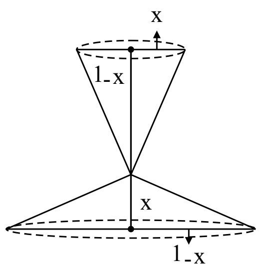
$$V=\pi r^{۲}\cdot h=\pi(۲۵-h^{۲})h=\pi(۲۵h-h^{۳})$$

$$V'(h)=\pi(۲۵-۳h^{۲}):V'(h)=۰\Rightarrow ۲۵-۳h^{۲}=۰\Rightarrow h^{۲}=\frac{۲۵}{۳}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم این استوانه برابر است با:

$$V_{Max}=\pi(۲۵-\frac{۲۵}{۳})\times\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\pi\times\frac{۵۰}{۳}\times\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۲۵۰\pi}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۲۵۰\pi\sqrt{۳}}{۹}$$

۲۴ - گزینه ۱



حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

شکل حاصل از دوران، دو مخروط است؛ یکی با شعاع x و ارتفاع $۱-x$ و دیگری با شعاع $۱-x$ و ارتفاع x. بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V(x)=\frac{\pi}{۳}(۱-x)x^{۲}+\frac{\pi}{۳}x(۱-x)^{۲}=\frac{\pi}{۳}x(۱-x)(x+۱-x)=\frac{\pi}{۳}(x-x^{۲})$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{۳}(۱-۲x)\Rightarrow V'(x)=۰\Rightarrow ۱-۲x=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۲۵ - گزینه ۱ برای محاسبه‌ی ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه به دست می‌آوریم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

$$f(x)=x^{۵}+۳x+۱\Rightarrow f'(x)=۵x^{۴}+۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۵x^{۴}+۳=۰\Rightarrow x^{۴}=\frac{-۳}{۵}\ \text{غقق}$$

پس تابع $f(x)$ نقطه‌ی بحرانی ندارد. بنابراین برای تعیین مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق کافی است مقدار تابع را به ازای نقاط ابتدا و انتهای بازه تعیین کنیم:

$$f(-۱)=-۱-۳+۱=-۳\ ,\quad f(۲)=۳۲+۶+۱=۳۹$$

پس مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-۱,۲]$ برابر $۳۹+(-۳)=۳۶$ است.

۲۶ - گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۱,۱]$، اکنون نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=a(\sqrt{۱-x^{۲}}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}\times x)=a(\frac{۱-x^{۲}-x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}})=a(\frac{۱-۲x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}})$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-۲x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نقاط بحرانی تابع $f(x)$ هستند. حال مقدار تابع را به ازای مقادیر ±۱ و $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(۱)=f(-۱)=۰ \quad , \quad f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{a}{۲} \quad , \quad f(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{-a}{۲}$$

باتوجه به اینکه $a>۰$، ماکسیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{a}{۲}$ است. طبق فرض این مقدار برابر $\sqrt{۶}$ است، پس:

$$\frac{a}{۲}=\sqrt{۶} \Rightarrow a=۲\sqrt{۶}$$

۲۷ - گزینه ۱

$$y=\frac{x+۱}{x^۳}=\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳} \to y'=\frac{-۲x}{x^۴}-\frac{۳x^۲}{x^۶}=\frac{-۲}{x^۳}-\frac{۳}{x^۴}=\frac{-۲x-۳}{x^۴}=۰ \to x=-\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید $x=۰$ در دامنه‌ی تعریف تابع نمی باشد و نمی‌تواند طول اکسترمم باشد.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	
y		↗	$\frac{4}{27}$	↘	‖	↘	

بنابراین نقطه‌ی $\begin{vmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۴}{۲۷} \end{vmatrix}$ نقطه‌ی Max تابع است و در ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات قرار دارد.

۲۸ - گزینه ۳ مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و دو سر بازه‌ی داده شده بدست می‌آوریم.

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۱ \to f'(x)=۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)=۰ \to x=۰, x=۲ \xrightarrow{x\in[۱,۳]} x=۲$$

$$\to \begin{cases} f(۱)=۱-۳+۱=-۱ \\ f(۲)=۸-۱۲+۱=-۳ \\ f(۳)=۲۷-۲۷+۱=۱ \to \text{مطلق}\,Max \end{cases}$$

۲۹ - گزینه ۳ برای به‌دست آوردن مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به‌دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به‌ازای این نقاط و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم. از بین مقادیر به‌دست آمده، بزرگ‌ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم. چون $f(x)$ چندجمله‌ای است، پس روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. بنابراین کافی است معادله‌ی $f'(x)=۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=x^۳-x=x(x^۲-۱)=x(x+۱)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۱ \\ x=۱ \quad (\text{زیرا در بازه قرار ندارد.})\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

اکنون مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط دو سر دامنه تعیین می‌کنیم:

$$f(۰)=۱ \quad , \quad f(-۲)=۴-۲+۱=۳ \quad , \quad f(-۱)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۴}$$

پس مجموع مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی موردنظر برابر $\frac{۱۵}{۴}=۳+\frac{۳}{۴}$ است.

۳۰ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{mx^۲}{۲}+(m-۱)x+۱ \to f'(x)=x^۲-mx+m-۱$$

طول‌های نقاط بحرانی ریشه‌های مشتق هستند.

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}=۲ \to \frac{c}{a}=۲ \to m-۱=۲ \to m=۳$$

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۱	(۶) - ۱	(۱۱) - ۲	(۱۶) - ۴	(۲۱) - ۳	(۲۶) - ۲
(۲) - ۲	(۷) - ۲	(۱۲) - ۲	(۱۷) - ۴	(۲۲) - ۱	(۲۷) - ۱
(۳) - ۴	(۸) - ۲	(۱۳) - ۳	(۱۸) - ۲	(۲۳) - ۲	(۲۸) - ۳
(۴) - ۲	(۹) - ۲	(۱۴) - ۲	(۱۹) - ۴	(۲۴) - ۱	(۲۹) - ۳
(۵) - ۱	(۱۰) - ۳	(۱۵) - ۱	(۲۰) - ۲	(۲۵) - ۱	(۳۰) - ۳