نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ – نقاط اکسترمم منحنی $y = \frac{۴x}{x^۲ + ۱}$ به کدام فاصله‌اند؟

① $\sqrt{۵}$

② $۲\sqrt{۵}$

③ ۴

④ ۲

۲ – نقطه‌ی مینیمم نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x$ کدام است؟

① $(-۲, ۸)$

② $(۲, ۰)$

③ $(۱, -۱)$

④ $(-۱, ۳)$

۳ – در کدام بازه، تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ - \frac{x^۳}{۳} + ۳x$ صعودی است؟

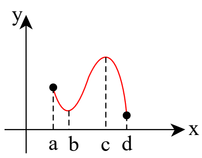
① $[-۳, ۱]$

② $[-۱, ۳]$

③ $(-\infty, -۱]$

④ $[۳, +\infty)$

۴ – نقطه‌ای با کدام طول در نمودار تابع مقابل، اکسترمم نسبی است، اما مطلق نیست؟



① a

② b

③ c

④ d

۵ - به ازای کدام مقدار b، تابع با ضابطه‌ی $y=x^۳+ax^۲-b$ در $M(۱,۲)$ یک اکسترمم نسبی دارد؟

① $-\frac{۵}{۲}$

② $-\frac{۳}{۲}$

③ $-\frac{۱}{۲}$

④ -۲

۶ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y=x^۳+ax^۲+bx$ ، $\{-۱,۲\}$ است، ab کدام است؟

① ۳

② -۶

③ $-۷/۵$

④ ۹

۷ - به ازای کدام مقدار b، نمودار تابع $y=x^۳+bx^۲+۲x+۱$ فاقد ماکسیمم و مینیمم نسبی است؟

① ۵

② -۴

③ ۳

④ -۲

۸ - در تابع درجه سوم $y=x^۳+ax^۲+bx$ اگر $M(۱,۲)$ مینیمم یا ماکسیمم نسبی باشد، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

① $(-۴,۵)$

② $(۴,-۵)$

③ $(-۴,-۵)$

④ $(۴,۵)$

۹ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $y = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$ کدام است؟

① $\{2, 0\}$

② $\{\frac{1}{2}, 0\}$

③ $\{2, \frac{1}{2}\}$

④ $\{1, -1\}$

۱۰ - اگر تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 - x^3 + b$ در نقطه‌ی $(1, -1)$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد، $a - b$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۱۱ - کدام تابع ماکسیمم و مینیمم نسبی ندارد؟

① $y = x^4 - x^2$

② $y = x^3 - x$

③ $y = x^3 + x$

④ $y = x^3 + x^2$

۱۲ - مقدار ماکسیمم تابع $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ چه قدر است؟

① $\sqrt{2}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ ۱

۱۳- اگر $f(x) = x^2 - 6x$ می‌نیمم مقدار $f(x+3)$ چقدر است؟

۱) -6

۲) -9

۳) 3

۴) 4

۱۴- اگر $f(x) = x^2 + 4x + 1$ و $g(x) = 2x - 3$ کم‌ترین مقدار تابع fog کدام است؟

۱) 4

۲) 5

۳) -3

۴) -2

۱۵- عرض Max نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$

۲) 2

۳) 3

۴) 4

۱۶- قرینه‌ی خطی که نقاط اکسترمم تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را به هم وصل می‌کند. نسبت به محورxها کدام است؟

۱) $x = -2y$

۲) $x = 2y$

۳) $y = 2x$

۴) $y = -2x$

۱۷- تابع $f(x) = \dfrac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(1, 3)$

۲) $(-3, 1)$

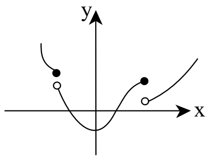
۳) $(-1, 3)$

۴) $(3, +\infty)$

۱۸ – تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{۷}{۶}}-\frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۴$ کدام است؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۱۹ – اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، این تابع به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟



① یک، یک
② یک، دو
③ دو، یک
④ یک، صفر

۲۰ – مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۱$ در بازه‌ی $[-۱,۲]$ کدام است؟

① -۶
② -۷
③ -۸
④ -۹

۲۱ – خط گذرنده از نقاط ماکسیمم و می‌نیمم نسبی منحنی به معادله‌ی $f(x)=۲x^{۳}-۹x^{۲}+۱۲x+۱$ با جهت مثبت محور xها کدام زاویه را تشکیل می‌دهد؟

① ۳۰°
② ۶۰°
③ ۱۲۰°
④ ۱۳۵°

۲۲ - مشتق تابعی در هر نقطه از آن به صورت $f'(x) = (۱ - x^۲)(x^۲ + x)$ است، تابع f به ترتیب از راست به چپ چند مینیمم نسبی و چند ماکسیمم نسبی دارد؟

(۱) ۱ − ۱

(۲) ۰ − ۱

(۳) ۲ − ۱

(۴) ۱ − ۲

۲۳ - فاصله‌ی نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی منحنی $y = \frac{x}{x^۲ + ۱}$ از یکدیگر کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\sqrt{۳}$

(۳) ۲

(۴) $\sqrt{۵}$

۲۴ - مساحت شکلی که از به هم وصل کردن نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - ۲x^{\frac{۴}{۳}}$ به دست می‌آید، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۵ - ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - ۳x^۲ + ۴x$ در بازه‌ی $[\frac{۱}{۲}, ۳]$ کدام است؟

(۱) ۳، $\frac{۵}{۳}$

(۲) ۳، $\frac{۴}{۳}$

(۳) ۴، $\frac{۲}{۳}$

(۴) ۵، $\frac{۴}{۵}$

۲۶ - تابع $y = x^{۳} + ax^{۲} + b$ در نقطه $(۲,۳)$ دارای مینیمم نسبی است. b کدام است؟

۱) ۷

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۵

۲۷ - بیشترین مقدار تابع $y = x + \frac{۹}{x}$ به ازای مقادیر منفی x کدام است؟

۱) -۲

۲) -۶

۳) -۴

۴) -۸

۲۸ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y = x^{\frac{۸}{۳}} - ۴x^{\frac{۲}{۳}}$ کدام است؟

۱) $\{۰ , ۱\}$

۲) $\{-۱ , ۰\}$

۳) $\{-۱ , ۱\}$

۴) $\{-۱ , ۰, ۱\}$

۲۹ - اختلاف ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{۲}{x^{۲} - ۲x + ۵}$ در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۰- تابع $y = \frac{1}{3}x^{3} - x^{2} - 3x$ در بازه‌ی $[a, b]$ نزولی است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$y=\frac{4x}{x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{4(x^2+1)-2x(4x)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0\to x=\pm1$$ ریشه‌های ساده

$$x=1\Rightarrow y=\frac{4(1)}{1^2+1}=2\Rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.\quad,\quad x=-1\Rightarrow y=-2\Rightarrow B\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{(1-(-1))^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۲ - گزینه ۳ نقطه اکسترمم تابع درجه دوم همان رأس سهمی می‌باشد.

$$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1\xrightarrow{\text{تابع}}y_S=1-2=-1\to S\Big|_{-1}^{1}$$

۳ - گزینه ۲ باید xهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $y'\geq 0$ است:

$$y'=2x-x^2+3=-(x^2-2x-3)=-(x-3)(x+1)\geq 0$$

با استفاده از جدول تعیین علامت داریم:

x		-1		3	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

$\to -1\leq x\leq 3$ یا $x\in[-1,3]$

۴ - گزینه ۲ تابع $y=f(x)$ با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. فرض کنید (e,g) یک بازه شامل c در دامنه‌ی f است، به طوری‌که به ازای هر $x\in(e,g)$ داریم: $f(x)\geq f(c)$. در این صورت می‌گوییم $x=c$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است. اگر به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$، می‌گوییم $x=c$ طول نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f است.

تذکر: نقاط ابتدا و انتهای بازه، نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.

با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

گزینه‌ی ۱: $x=a$ نه اکسترمم نسبی و نه مطلق   گزینه‌ی ۲: $x=b$ مینیمم نسبی و غیر مطلق

گزینه‌ی ۳: $x=c$ ماکسیمم نسبی و مطلق   گزینه‌ی ۴: $x=d$ مینیمم مطلق و غیر نسبی

۵ - گزینه ۱

اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$y=x^3+ax^2-b\Rightarrow y'=3x^2+2ax$$
$$y(1)=2\to 1+a-b=2\Rightarrow a-b=1$$
$$y'(1)=0\to 3(1)^2+2a(1)=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=-\frac{5}{2}$$

۶ - گزینه ۴ با توجه به این که تابع چند جمله‌ای در همه جا مشتق‌پذیر است، پس باید در نقاط $x=-1,2$ مشتق تابع صفر شود:

$$y'=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases}y'(2)=0\Rightarrow 12+4a+b=0\\ y'(-1)=0\Rightarrow 3-2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=-12\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow 6a=-9\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=-6$$

بنابراین $ab=9$ می‌باشد.

۷ - گزینه ۴

$$y=x^3+bx^2+2x+1\Rightarrow y'=3x^2+2bx+2$$

برای آن‌که تابع فاقد اکسترمم نسبی باشد مشتق، باید دارای ریشه مضاعف بوده و یا فاقد ریشه حقیقی باشد یعنی $\Delta\leq 0$.

$$\Delta\leq 0\Rightarrow b^2-4ac\leq 0\to 4b^2-24\leq 0\to b^2\leq 6$$

فقط گزینه چهارم در این شرط صدق می‌کند.

۸ - گزینه ۱ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$y=x^3+ax^2+bx\to y'=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{matrix}y(1)=2\Rightarrow a+b+1=2\\ y'(1)=0\Rightarrow 3+2a+b=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=-3\end{cases}\to a=-4\ ,\ b=5$$

بنابراین $(a,b)=(-4,5)$ است.

۹ - گزینه ۲ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع $D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

$$y=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

در $x=۰$ مشتق تابع وجود ندارد و در $x=\frac{۱}{۲}$ مشتق آن صفر است. پس مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع عبارت است از: $\{\frac{۱}{۲},۰\}$

۱۰ - گزینه ۳ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} y=ax^{۲}-x^{۳}+b\Rightarrow y(۱)=a-۱+b=-۱\Rightarrow a+b=۰ \\ y'=۲ax-۳x^{۲}\Rightarrow y'(۱)=۲a-۳=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\to b=-\frac{۳}{۲} \end{array}\right\}\Rightarrow a-b=۳$$

۱۱ - گزینه ۳

$$y=x^{۳}+x\to y'=۳x^{۲}+۱>۰$$

بنابراین تابع صعودی اکید و در نتیجه فاقد ماکسیمم و مینیمم است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱:

$$y=x^{۴}-x^{۲}\Rightarrow y'=۴x^{۳}-۲x=۲x(۲x^{۲}-۱)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		۰		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

گزینه‌ی ۲:

$$y=x^{۳}-x\Rightarrow y'=۳x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

گزینه‌ی ۴:

$$y=x^{۳}+x^{۲}\Rightarrow y'=۳x^{۲}+۲x=x(۳x+۲)=۰\Rightarrow x=۰,-\frac{۲}{۳}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۲}{۳}$		۰		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

۱۲ - گزینه ۳

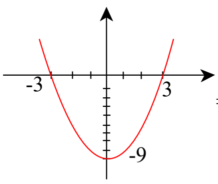
$$y=\frac{x}{۱+x^{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۱(۱+x^{۲})-(۲x)(x)}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{۱+x^{۲}-۲x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow ۱-x^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲} \\ x=-۱\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲} \end{array}\right.\Rightarrow$$ عرض Max تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۱۳ - گزینه ۲

ابتدا از روی $f(x)$، $f(x+۳)$ را بدست می‌آوریم.

$$f\left(x+۳\right)=\left(x+۳\right)^{۲}-۶\left(x+۳\right)=x^{۲}+۹+۶x-۶x-۱۸=x^{۲}-۹$$



$\Rightarrow$ از روی شکل واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -۹ می‌باشد.

۱۴ - گزینه ۳

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=x^{۲}+۴x+۱ \\ g(x)=۲x-۳ \end{array}\right.\Rightarrow f(g(x))=f(۲x-۳)=(۲x-۳)^{۲}+۴(۲x-۳)+۱$$

$$\Rightarrow f(۲x-۳)=۴x^{۲}+۹-۱۲x+۸x-۱۲+۱=۴x^{۲}-۴x-۲$$

در تابع درجه‌ی دوم کمترین یا بیشترین مقدار تابع، همان عرض راس تابع درجه‌ی دوم است.

$$y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-32-16}{16}=\frac{-48}{16}=-3$$

البته از مشتق هم می‌توان استفاده نمود.

$$y'=0\Rightarrow 8x-4=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{تابع}}y=-3$$

۱۵ - گزینه ۴

$$y'=\frac{-2x(3)}{x^4}+\frac{-3x^2}{x^6}\Rightarrow y'=\frac{-6}{x^3}-\frac{3}{x^4}=\frac{-6x-3}{x^4}=0\to x=-\frac{1}{2}$$

چون مشتق، تنها یک ریشه ساده دارد پس حتماً طبق صورت سوال $x=-\frac{1}{2}$، طول Max نسبی تابع است آن را در تابع قرار داده و عرض Max را بدست می‌آوریم.

$$x=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{تابع}}y=12-8=4$$

۱۶ - گزینه ۳

$$y=x^3-3x\Rightarrow y'=3x^2-3=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=-1$$

$$x=1\Rightarrow y=-2\quad A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\quad Min\quad ,\quad x=-1\Rightarrow y=2\quad B\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.\quad Max$$

حال، معادله خطی را که از این دو نقطه می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$AB\ \text{معادله خط}:\ \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\Rightarrow\frac{y+2}{x-1}=\frac{-2-2}{1+1}=-2\Rightarrow y+2=-2x+2\Rightarrow y=-2x$$

برای پیدا کردن قرینه خط، نسبت به محور xها کافی است y را به $-y$ تبدیل کنیم.

$$y=-2x\xrightarrow{y\to-y}-y=-2x\to y=2x$$

۱۷ - گزینه ۳

از تابع مشتق گرفته و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=-x^2+2x+3=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\x=-\frac{c}{a}=3\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to x\in(-1,3)$

۱۸ - گزینه ۲

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف این تابع $D_f=[0,+\infty)$ می‌باشد.

$$f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+4$$

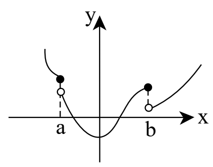
$$f'(x)=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{14}{6}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}(x^{\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{1}{3}})=\frac{7}{6}(\sqrt[6]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})=\frac{7}{6}(\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[3]{x}})=\frac{7}{6}(\frac{\sqrt[6]{x^3}-2}{\sqrt[6]{x^2}})$$

$$\text{صورت}=0\Rightarrow\sqrt[6]{x^3}-2=0\Rightarrow\sqrt{x}-2=0\Rightarrow x=4$$

$$\text{مخرج}=0\Rightarrow x=0$$

پس تابع f دو نقطه بحرانی دارد.

۱۹ - گزینه ۱



باتوجه به نمودار، نقطه‌ای به طول $x=0$ نقطه‌ی مینیمم نسبی و نقطه‌ای به طول $x=b$ نقطه‌ی ماکسیمم نسبی است.

۲۰ - گزینه ۳ کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

ابتدا طول نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f(x)=x^4-6x^2+1\Rightarrow f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)\xrightarrow{x\in[-1,2]}x=0\ ,\ x=\sqrt{3}\ \text{طول نقاط بحرانی}$$

$$\begin{cases}x=0:f(0)=1\\x=\sqrt{3}:f(\sqrt{3})=-8\end{cases}\qquad\begin{cases}\text{ابتدای بازه}\ (x=-1):f(-1)=-4\\\text{انتهای بازه}\ (x=2):f(2)=-7\end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر -8 است.

۲۱ - گزینه ۴ ابتدا نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را به دست می‌آوریم و سپس شیب خط گذرنده از دو نقطه، را بدست می‌آوریم که نشان‌دهنده‌ی تانژانت زاویه‌ای است که خط، با جهت مثبت

محور xها می‌سازد.

$$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} A(۱,۶):\ \text{نسبی } Max \\ x=۲ \xrightarrow{\text{تابع}} B(۲,۵):\ \text{نسبی } Min \end{cases}$$

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۶-۵}{۱-۲}=\tan\alpha=-۱\Rightarrow \alpha=۱۳۵^\circ$$

۲۲ - گزینه ۱ ابتدا f' را تجزیه و سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=(۱-x)(۱+x)(x)(x+۱)\Rightarrow f'(x)=(x+۱)^۲(۱-x)x=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		↘		↘	Min	↗	Max	↘	

۲۳ - گزینه ۴

$$y=\frac{x}{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=۰\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow \begin{cases} x=۱\xrightarrow{\text{تابع}} y=\frac{۱}{۲} & A\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right. \\ x=-۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-\frac{۱}{۲} & A'\left|\begin{matrix}-۱\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$AA'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۲۴ - گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

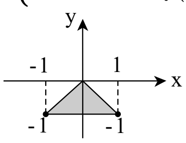
دامنه‌ی تعریف تابع $D_f=(-\infty\ ,\ \infty)$ است.

$$f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-۲x^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۸}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۸}{۳}(\sqrt[۳]{x^۵}-\sqrt[۳]{x})=\frac{۸}{۳}(x\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x})=۰$$

$$\to x\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}=۰\to \sqrt[۳]{x}(x\sqrt[۳]{x}-۱)=۰\to x=۰\ ,\ \ x=\pm۱$$

$(x\sqrt[۳]{x}-۱=۰\to x\sqrt[۳]{x}=۱\xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۴=۱\to x=\pm۱$ دقت کنید $)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \xrightarrow{\text{تابع}} f(۰)=۰\to \left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \\ x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} f(۱)=-۱\to \left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \\ x=-۱ \xrightarrow{\text{تابع}} f(-۱)=-۱\to \left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \end{cases}$$



بنابراین از به هم وصل کردن نقاط بحرانی، یک مثلث همانند شکل مقابل ایجاد می‌شود. که مساحت آن برابر با $S=\frac{۲\times ۱}{۲}=۱$ است.

۲۵ - گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-۳x^۲+۴x\to f'(x)=۲x^۲-۶x+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\x=\frac{c}{a}=۲\end{cases}$$

$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۴}{۳}\to$ مطلق Min و $f(۳)=۱۸-۲۷+۱۲=۳\to$ مطلق Max

$$f(۱)=\frac{۲}{۳}-۳+۴=\frac{۵}{۳}\ ,\ f(۲)=\frac{۱۶}{۳}-۱۲+۸=\frac{۴}{۳}$$

۲۶ - گزینه ۱ اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند: در تابع صدق می‌کنند و طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}} ۳=۸+۴a+b\to ۴a+b=-۵$$

$$\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می کند}} y'=۳x^۲+۲ax\to ۰=۱۲+۴a\to a=-۳\ ,\ b=۷$$

۲۷ - گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای طول‌های منفی نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$y=x+\frac{۹}{x}\to y'=۱-\frac{۹}{x^۲}=\frac{x^۲-۹}{x^۲}=۰$$

صورت $=۰\to x^۲-۹=۰\to \begin{cases}x=۳\ (x<۰)\ (\text{غ ق ق})\\ x=-۳\ \ \text{ق ق}\end{cases}$

مخرج $=۰\to x^۲=۰\to x=۰\ (x<۰)$ غ ق ق

$$x=-3 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-3-3 \to y_{Max}=-6$$

۲۸ - گزینه ۴

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $D_f=(-\infty+\infty)$ است.

$$y=x^{\frac{8}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} \to y'=\frac{8}{3}(x^{\frac{5}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}) \to y'=\frac{8}{3}(\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}) \Rightarrow y'=\frac{8}{3}(\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}})$$

صورت $=0 \to x^2=1 \to x\pm 1$, مخرج $=0 \to x=0$

در $x=\pm 1$ مشتق صفر است در $x=0$ مشتق وجود ندارد پس طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از : $\{-1,0,1\}$

۲۹ - گزینه ۱ دامنه‌ی تعریف تابع $D_f=(-\infty,+\infty)$ است. (Δ مخرج منفی است پس ریشه‌ی حقیقی ندارد)

$$f'(x)=\frac{-2(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} 2x-2=0 \to x=1$$

حال مقادیر تابع را به ازای نقطه‌ی بحرانی و دو سر بازه به دست می‌آوریم:

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(-1)=\frac{1}{4},\ f(2)=\frac{2}{5} \Rightarrow Maxf(x)=\frac{1}{2},\ Minf(x)=\frac{1}{4}$$

پس جواب $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ می‌شود.

۳۰ - گزینه ۴

$$y'=x^2-2x-3 \xrightarrow{y'\leq 0} (x-3)(x+1)\leq 0 \to -1\leq x\leq 3 \to x\in[-1,3] \to b-a=3-(-1)=4$$

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۲	(۶) - ۴	(۱۱) - ۳	(۱۶) - ۳	(۲۱) - ۴	(۲۶) - ۱
(۲) - ۳	(۷) - ۴	(۱۲) - ۳	(۱۷) - ۳	(۲۲) - ۱	(۲۷) - ۲
(۳) - ۲	(۸) - ۱	(۱۳) - ۲	(۱۸) - ۲	(۲۳) - ۴	(۲۸) - ۴
(۴) - ۲	(۹) - ۲	(۱۴) - ۳	(۱۹) - ۱	(۲۴) - ۱	(۲۹) - ۱
(۵) - ۱	(۱۰) - ۳	(۱۵) - ۴	(۲۰) - ۳	(۲۵) - ۲	(۳۰) - ۴