نام آزمون: تقعر منحنی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ رو به بالا است. کمترین مقدار a، کدام است؟

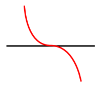
① صفر

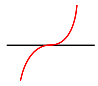
② -1

③ 1

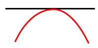
④ $-\infty$

۲ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟

① 

② 

③ 

④ 

۳ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x \,;\, x \in [0, 2\pi]$ ، در کدام بازه صعودی است و تقعر آن رو به پایین است؟

① $(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$

② $(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$

③ $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$

④ $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$

۴ – تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2+12}$ در بازه (a,b) رو به بالا است، بیشترین مقدار b-a کدام است؟

① ۸
② ۴
③ ۶
④ ۲

۵ – تقعر نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a,b) رو به پایین است، بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ ∞

۶ – نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^2 x-2\cos x; x\in[0,2\pi]$، در کدام بازه، نزولی است و تقعر آن رو به پایین است؟

① $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$
② $(\pi,\frac{4\pi}{3})$
③ $(\frac{2\pi}{3},\pi)$
④ $(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$

۷ – مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x\ ;\ 0\leq x\leq 2\pi$ رو به بالا باشد در کدام بازه است؟

① $(0,\frac{3\pi}{4})$
② $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$
③ $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$
④ $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

۸ – به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادله $y = x^۴ + ax^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲$، همواره رو به بالاست؟

(۱) $-۱ \leq a \leq ۱$

(۲) $-۱ \leq a \leq ۲$

(۳) $-۲ \leq a \leq ۱$

(۴) $-۲ \leq a \leq ۲$

۹ – تقعر نمودار تابع $y = x^۲\,|x - ۳|$، در بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

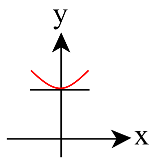
(۱) $\frac{۴}{۳}$

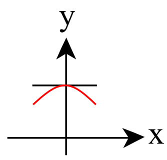
(۲) $\frac{۵}{۳}$

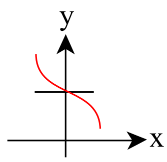
(۳) ۲

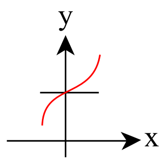
(۴) ۳

۱۰ – نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x$ در همسایگی نقطه $x = ۰$ به کدام شکل است؟

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


۱۱ - نمودار تابع $y = \dfrac{x^۲ - ۴x + ۸}{x - ۲}$ در کدام بازه نزولی است و تقعر آن رو به بالا است؟

① $(۰, ۲)$
② $(۲, ۴)$
③ $(۴, +\infty)$
④ $(-\infty, ۰)$

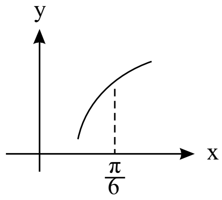
۱۲ - روی کدام بازه نمودار تابع $f(x) = x^۲|x - ۱|$ صعودی است و تقعر رو به پایین دارد؟

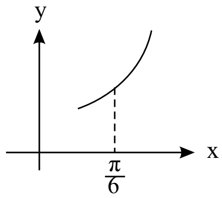
① $\left[\dfrac{۱}{۳}, \dfrac{۲}{۳}\right]$
② $\left[۰, \dfrac{۱}{۳}\right]$
③ $[۱, +\infty)$
④ $\left[\dfrac{۲}{۳}, ۱\right]$

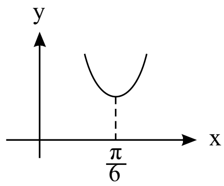
۱۳ - در کدام بازه تابع $y = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x + ۱$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

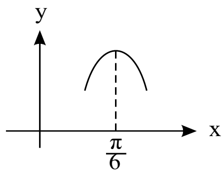
① $(-۳, ۱)$
② $(۰, ۱)$
③ $(-۲, ۱)$
④ $(۱, +\infty)$

۱۴ - نمودار تابع $y = \sin^{2} x + \sin x$ در مجاورت $x = \frac{\pi}{6}$ به کدام صورت است؟

①


②


③


④


۱۵ - در نمودار تابع $y = x^{4} - 12x^{2} + 3x + 6$ جهت تقعر در بازهٔ $(1,3)$ کدام است؟

① فقط رو به بالا

② ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین

③ ابتدا رو به پایین سپس رو به بالا

④ فقط رو به پایین

پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۱ مشتق دوم باید مثبت باشد.

$$y = x\sqrt{x^2+2} \Rightarrow y' = \sqrt{x^2+2} + \frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}x = \sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4x\cdot\sqrt{x^2+2} - \frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}(2x^2+2)}{x^2+2} = \frac{\frac{4x(x^2+2)-x(2x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

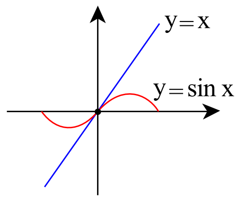
$$= \frac{4x^3+8x-2x^3-2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^3+6x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{x\overbrace{(2x^2+6)}^{+}}{\underbrace{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}_{+}} > 0 \Rightarrow x>0$$

تابع در $(0,+\infty)$ تقعرش رو به بالا است، بنابراین کمترین مقدار a برابر صفر است.

۲ – گزینه ۲ جهت تقعر تابع را در اطراف نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3 - x+\sin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^2 -1+\cos x \xrightarrow{x=0} f'(0)=0-1+1=0$$

$$f''(x)=x-\sin x \Rightarrow \begin{cases} x<0: x<\sin x\Rightarrow f''(x)<0\\ x>0: x>\sin x \Rightarrow f''(x)>0\end{cases}$$



درنتیجه تقعر تابع $f(x)$ در $x=0$، ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا می‌باشد، پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳ – گزینه ۱ f صعودی است هرگاه $f'>0$ و جهت تقعر f رو به پایین است هرگاه $f''<0$ باشد.

$$f(x)=\sin^2 x-2\sin x \to \begin{cases} f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=\sin 2x-2\cos x\\ f''(x)=2\cos 2x+2\sin x\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \to 2\cos x(\sin x-1)=0 \to \begin{cases} \cos x=0 \to x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=1 \to x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ تابع f صعودی است. (I)

$$f''(x)=0 \to 2\cos 2x+2\sin x=0 \to 2(1-2\sin^2 x+\sin x)=0$$

$$\to -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x=1 \to x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=\frac{7\pi}{6}\\ x=\frac{11\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

ریشه مضاعف

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از جدول متوجه می‌شویم در بازه‌های $(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$ تقعر نمودار f رو به پایین است. (II)

$$\begin{cases} f' > 0 \\ f'' < 0 \end{cases} \xrightarrow{(I)\cap(II)} x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

۴ - گزینه ۲

مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+12} = 1 - \frac{3}{x^2+12} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x}{(x^2+12)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6(x^2+12)^2 - 6x(2x)2(x^2+12)}{(x^2+12)^4} = \frac{6(x^2+12) - 24x^2}{(x^2+12)^3}$$

$$= \frac{72 - 18x^2}{(x^2+12)^3} = \frac{18(4-x^2)}{(x^2+12)^3} \xrightarrow{f''(x)>0} 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2 - (-2) = 4$$

۵ - گزینه ۱

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{-5}{3}}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}} < 0$$

x		-2		0	
$f''(x)$	$+$		$-$	ت.ن	$+$

درنتیجه تابع در بازه $(-2, 0)$ تقعر رو به پایین دارد لذا برای به دست آوردن بیشترین مقدار $b - a$ باید $a = -2$ و $b = 0$ باشد، درنتیجه $b - a = 2$

۶ - گزینه ۲ باید ببینیم که در چه فاصله‌ای $f' \leq 0 \quad , \quad f'' \geq 0$ است.

$$f(x) = \cos^2 x - 2\cos x \to f'(x) = -2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x = 0$$

$$2\sin x \cdot (-\cos x + 1) = 0 \to \sin x = 0 \to x = 0, \pi, 2\pi$$

$$-1 + \cos x = 0 \to \cos x = 1 \to x = 0, 2\pi$$

x	0		π		2π
f'	0	$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$		$\searrow$	

در بازهٔ $(\pi, 2\pi)$ تابع نزولی است. $\to (I)$

برای بررسی تقعر منحنی f'' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = -\sin 2x + 2\sin x \to f''(x) = -2\cos 2x + 2\cos x = 0$$

$$f''(x) = -2(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x = 0 \to f''(x) = -4\cos^2 x + 2\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = 1 \to x = 0, 2\pi \quad , \quad \cos x = -\frac{1}{2} \to x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f''	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

در بازهٔ $(0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$ تقعر منحنی رو به بالا است. (II)

$$I \cap II \Rightarrow (\pi, \frac{4\pi}{3})$$

۷ - گزینه ۳

مشتق دوم تابع را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}\cos x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2\sqrt{2}\sin x \Rightarrow f''(x) = 2 - 2\sqrt{2}\cos x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$$

x	۰		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f''		-	○	+	○	-	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

$\Rightarrow x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ در این بازه تقعر منحنی رو به بالاست.

۸ - گزینه ۴

$$y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$$

$$\Rightarrow y'' = 12x^2 + 6ax + 3 = 3(4x^2 + 2ax + 1) \geq 0$$

برای اینکه تقعر رو به بالا باشد باید f'' مثبت باشد یا به‌صورت نقطه‌ای صفر شود.

$$\begin{cases}\Delta \le ۰ \Rightarrow ۴a^۲ - ۱۶ \le ۰ \Rightarrow a^۲ \le ۴ \Rightarrow -۲ \le a \le ۲ \\ a > ۰ \Rightarrow a = ۴ > ۰\end{cases}$$ شرط اینکه این معادله درجه دوم همیشه نامنفی باشد.

۹ - گزینه ۳

$$y = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ \; ; x \ge ۳ \\ ۳x^۲ - x^۳ \; ; x < ۳ \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ - ۶x \; ; x > ۳ \\ ۶x - ۳x^۲ \; ; x < ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} ۶x - ۶ \; ; x > ۳ \to ۶x - ۶ < ۰ \to x < ۱ \quad \text{غ ق ق} \\ ۶ - ۶x \; ; x < ۳ \to ۶ - ۶x < ۰ \to x > ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳ \end{cases}$$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع در بازهٔ $(۱,۳)$ رو به پایین است. درنتیجه $\max(b-a) = ۲$ است.

۱۰ - گزینه ۴ راه‌حل اول: جهت تقعر تابع را در نقطه $x = ۰$ بررسی می‌کنیم؛ لذا داریم:

$$f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x \Rightarrow f'(۰) = ۰$$

$$f''(x) = \sin x + x\cos x = \cos x(x + \tan x) \Rightarrow \begin{cases} x \to ۰^+ \Rightarrow x + \tan x > ۰ \Rightarrow f''(x) > ۰ \quad \text{تقعر رو به بالا} \\ x \to ۰^- \Rightarrow x + \tan x < ۰ \Rightarrow f''(x) < ۰ \quad \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

درنتیجه تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ ابتدا تقعر رو به پایین بوده و سپس رو به بالا است؛ بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

راه‌حل دوم:

$$f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x \Rightarrow f'(۰) = ۰$$

چون $\sin x$ در اطراف نقطه صفر، هم ارز با x است پس $\sin x \simeq x$ و $f'(x) = x \times x = x^۲$، پس مشتق اول همواره مثبت است و تابع صعودی است پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۱ - گزینه ۲ مشتق مرتبه اول تابع منفی ولی مشتق مرتبه دوم آن مثبت است.

$$y = \frac{(x-۲)^۲ + ۴}{x-۲} = x - ۲ + \frac{۴}{x-۲} \Rightarrow y' = ۱ - \frac{۴}{(x-۲)^۲} < ۰ \to \frac{۴}{(x-۲)^۲} > ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{|x-۲|} > ۱ \to |x-۲| < ۲ \to ۰ < x < ۴$$

$$\to y'' = \frac{۸}{(x-۲)^۳} > ۰ \Rightarrow (x-۲)^۳ > ۰ \Rightarrow x > ۲$$

جواب مشترک $۰ < x < ۴ \,,\; x > ۲$ به‌صورت بازه $(۲,۴)$ است.

۱۲ - گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} -x^۳ + x^۲ & ; x < ۱ \\ x^۳ - x^۲ & ; x \ge ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -۳x^۲ + ۲x & ; x < ۱ \\ ۳x^۲ - ۲x & ; x > ۱ \end{cases}$$

اگر تابع f صعودی باشد، داریم: $f' \ge ۰$.

$$x < ۱ : -۳x^۲ + ۲x \ge ۰ \Rightarrow ۰ \le x \le \frac{۲}{۳} \xrightarrow{x<۱} x \in \left[۰, \frac{۲}{۳}\right]$$

$$x > ۱ : ۳x^۲ - ۲x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۰ \quad \text{یا} \quad x \ge \frac{۲}{۳} \xrightarrow{x>۱} x \in [۱, +\infty)$$

تابع f روی بازهٔ $\left[۰, \frac{۲}{۳}\right] \cup [۱, +\infty)$ صعودی است.

$$f''(x) = \begin{cases} -۶x + ۲ & ; x < ۱ \\ ۶x - ۲ & ; x > ۱ \end{cases}$$

برای اینکه تقعر تابع f رو به پایین باشد، باید داشته باشیم: $f'' \le ۰$.

$$x < ۱ : -۶x + ۲ \le ۰ \Rightarrow x \ge \frac{۱}{۳} \xrightarrow{x<۱} x \in \left[\frac{۱}{۳}, ۱\right]$$

$$x > ۱ : ۶x - ۲ \le ۰ \Rightarrow x \le \frac{۱}{۳} \quad \text{غیرممکن}$$

بنابراین تابع f در بازهٔ $\left(\left[۰, \frac{۲}{۳}\right] \cup [۱, +\infty)\right) \cap \left[\frac{۱}{۳}, ۱\right] = \left[\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right]$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

۱۳ - گزینه ۲ باید مشتق اول مثبت و مشتق دوم آن منفی باشد.

با مشتق گیری از تابع $y = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x + ۱$ داریم:

$$y' = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰ \Rightarrow ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰ \Rightarrow ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow x^۳ - ۳x + ۲ = ۰$$

$x = ۱$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند، بنابراین تابع مشتق ریشه‌ای برابر یک دارد. حال با تقسیم عبارت تابع مشتق بر $x - ۱$ داریم:

$x^{۳} - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x^{۲}+x-۲) = ۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases}$

توجه: در اطراف ریشه‌ی مضاعف، علامت عوض نمی‌شود.

x		-۲		۱ (مضاعف)	
y'	$-$	۰	$+$	۰	$+$
y	↘		↗		↗

$\rightarrow (-۲, +\infty) \rightarrow$ صعودی (I)

$y'' = ۱۲x^{۲} - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۲(x^{۲} - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$

x		-۱		۱	
y''	$+$	۰	$-$	۰	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\rightarrow (-۱, ۱) \rightarrow$ تقعر رو به پائین (II)

$I \cap II \Rightarrow (-۱, ۱)$

تابع در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است. با توجه به گزینه‌ها بازه‌ی $(۰, ۱)$ صحیح می‌باشد.

۱۴ - گزینه ۲ باید مشتق اول و دوم تابع را در $x = \frac{\pi}{۶}$ محاسبه کنیم.

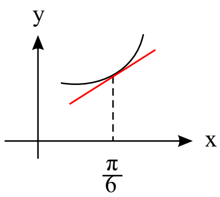
$f(x) = \sin^{۲} x + \sin x \Rightarrow f'(x) = ۲\cos x \ \sin x + \cos x = \sin ۲x + \cos x$

$f'(\frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{۲\pi}{۶} + \cos\frac{\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۳} + \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$

شیب خط مماس در $x = \frac{\pi}{۶}$ عددی مثبت است پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند زیرا در آنها خط مماس در $x = \frac{\pi}{۶}$ خطی افقی با شیب صفر است.

$f''(x) = ۲\cos ۲x - \sin x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{۶}) = ۲\cos\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۶} = ۲ \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} > ۰$

تقعر منحنی در $x = \frac{\pi}{۶}$ رو به بالا است، یعنی منحنی بالای خط مماس قرار دارد، پس گزینه ۲ صحیح است.



$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۶}) > ۰ \ , \ f''(\frac{\pi}{۶}) > ۰$

۱۵ - گزینه ۳

$y = x^{۴} - ۱۲x^{۲} + ۳x + ۶ \Rightarrow y' = ۴x^{۳} - ۲۴x + ۳$

$y'' = ۱۲x^{۲} - ۲۴ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
$y'' = ۱۲x^{۲} - ۲۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

در بازهٔ $(۱, ۳)$ تقعر تابع ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱
۲	۲
۳	۱
۴	۲
۵	۱
۶	۲
۷	۳
۸	۴
۹	۳
۱۰	۴
۱۱	۲
۱۲	۱
۱۳	۲
۱۴	۲
۱۵	۳