نام آزمون: کاربرد مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - نمودار تابع $y=-۴\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ ، روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۲ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۳ & ; \quad x<۱ \\ a & ; \quad x=۱ \\ ۳-۲x & ; \quad x>۱ \end{cases}$ در $x=۱$ ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ بی‌شمار

۳ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $y=\left|x^۲-۴x\right|$ کدام است؟

① $\{۲\}$
② $\{۰,۴\}$
③ $\{۰,۲,۴\}$
④ $\{۲,۴\}$

۴ - اگر $f(x)=x^۲-x$، نمودار تابع $fof(x)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۵ - به ازای کدام مقدار a، منحنی تابع $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + ax + 1$ نقطه‌ی بحرانی دارد اما نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم ندارد؟

① 2

② $\frac{9}{2}$

③ 6

④ 8

۶ - تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)|x|$ در کدام بازه نزولی است؟

① $(0, \frac{1}{2})$

② $(0, 1)$

③ $(-\infty, 0)$

④ $(0, +\infty)$

۷ - تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟

① $0 \leq a < 2$

② $-\sqrt{3} \leq a < 2$

③ $|a| \leq \sqrt{3}$

④ $|a| \leq 2$

۸ - بیشترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{2}{x - 2\sqrt{x} + 4}$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ صفر

۹ - بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^{۲}+۴x+۳)^{\frac{۱}{۳}}$ روی بازه‌ی $[-۴,-۱]$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[۳]{۵}$

(۲) $\sqrt[۳]{۳}$

(۳) ۲

(۴) ۲/۵۱

۱۰ - وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=[\frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱}]$ چگونه است؟ ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است)

(۱) اکیداً صعودی

(۲) اکیداً نزولی

(۳) هم صعودی و نزولی

(۴) غیر یکنوا

۱۱ - نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}+kx+۴}{x^{۲}+۲x+۶}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد. آن‌گاه عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}$

(۲) $\frac{۳}{۴}$

(۳) $\frac{۲}{۳}$

(۴) $\frac{۳}{۵}$

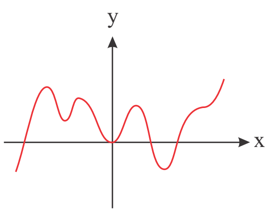
۱۲ - تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. اگر نمودار تابع $y=f'(x)$ به شکل زیر باشد، این تابع چند ماکسیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۳ ماکسیمم نسبی و ۳ مینیمم نسبی

(۲) ۲ ماکسیمم نسبی و ۱ مینیمم نسبی

(۳) ۲ مینیمم نسبی و ۱ ماکسیمم نسبی

(۴) ۳ مینیمم نسبی و ۱ ماکسیمم نسبی



۱۳ - تابع $f\left(x\right)=x^{\frac{۲}{۳}}\left(x^{۲}-۱\right)$ در بازه‌ی $\left[-۱,\frac{۲}{۵}\right]$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۱۴ - مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۳}{۵}}(۴-x)$ کدام است؟

① $\left\{۰,\frac{۳}{۲}\right\}$

② $\left\{۰,\frac{۲}{۳}\right\}$

③ $\varnothing$

④ $\{۴,۲\}$

۱۵ - دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

① $-\frac{۳}{۲}$

② $-\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۱}{۲}$

④ $\frac{۳}{۲}$

۱۶ - مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x$، در بازهٔ $[-۴,۳]$، کدام است؟

① -۱۸ و ۲۴

② -۴۵ و ۲۷

③ -۳۶ و ۲۷

④ -۲۷ و ۳۶

۱۷ - بیش‌ترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟

① 3

② $2\sqrt{3}$

③ 4

④ $3\sqrt{2}$

۱۸ - تابع $f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+1$ در چه تعداد از نقاط بحرانی‌اش مشتق‌پذیر است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۱۹ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[5]{x^5-5x^4}$ در $x=x_0$ دارای نقطه‌ی بحرانی است. مجموعه‌ی مقادیر x_0 کدام است؟

① $\{0,4\}$

② $\{0,5\}$

③ $\{4,5\}$

④ $\{0,4,5\}$

۲۰ - اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{(m-2)x^2}{2}+8x+3$ دارای ماکسیمم و مینیمم نسبی با طول‌های مثبت باشند، حدود m کدام است؟

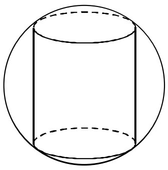
① $m>10$

② $-6<m<10$

③ $m>2$

④ $-6<m<2$

۲۱- درون کره‌ای به شعاع R، یک استوانه‌ی دوار و قائم با بیشترین حجم ممکن محاط کرده‌ایم. نسبت شعاع استوانه به ارتفاع آن، کدام است؟



① $\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\sqrt{2}$

۲۲- اگر مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{m}{2}x^2-(m^2+1)x+7$ برابر -2 باشد، حاصل‌ضرب طول‌های نقاط بحرانی کدام است؟

① -4

② -6

③ -5

④ -9

۲۳- مجموع ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x|(x+1)$ در فاصله‌ی $[-2,1]$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② ۲

③ ۲٫۲۵

④ صفر

۲۴- اگر تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x)=(x^2-3x+2)(x^2-10x+9)$، تابع f چند ماکسیمم نسبی دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۲۵ – نقطه‌ای به طول $x = 0$ برای تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^2+1}{1-x^2}$ چگونه است؟

(۱) زاویه‌دار

(۲) ماکسیمم نسبی

(۳) مینیمم نسبی

(۴) مشتق‌ناپذیر

۲۶ – نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

(۱) متساوی‌الاضلاع

(۲) فقط متساوی‌الساقین

(۳) فقط قائم‌الزاویه

(۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۲۷ – ماکسیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۲۸ – می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ روی بازه‌ی $[-1, 3]$ کدام است؟

(۱) $-\frac{11}{3}$

(۲) $-\frac{10}{3}$

(۳) $-\frac{8}{3}$

(۴) $-\frac{7}{3}$

۲۹ - کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}+۳}$ در بازه‌ی $[-۱,۲]$ کدام است؟

① ۱

② صفر

③ $-\dfrac{۱}{۲}$

④ $-\dfrac{۲}{۷}$

۳۰ - مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

① $\left\{۰,\frac{۴}{۵},۲\right\}$

② $\left\{۰,\frac{۲}{۳},۲\right\}$

③ $\{۰,۱\}$

④ $\left\{\frac{۲}{۳},۲\right\}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ برای آنکه تابع $y=-4\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$ روی بازه‌ی $[-1,1]$ بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل $\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$ کمترین مقدار، یعنی مقدار (-1) را به خود بگیرد.

پس داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1\rightarrow\frac{\pi}{4}-3\pi x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{-2k}{3}-\frac{1}{4}$$

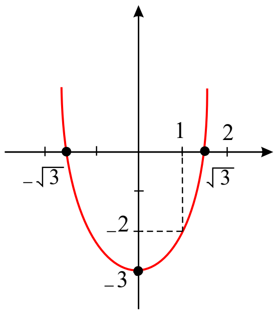
حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله در بازه‌ی $[-1,1]$ کافی است به k اعداد صحیح را نسبت دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
x	$\frac{13}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{19}{12}$
	غ ق ق	✓	✓	✓	غ ق ق

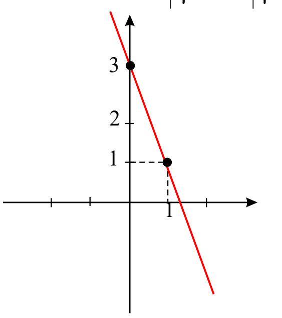
بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[-1,1]$، دارای ۳ جواب است.

۲ - گزینه ۲ برای حل این تست از رسم شکل کمک می‌گیریم.

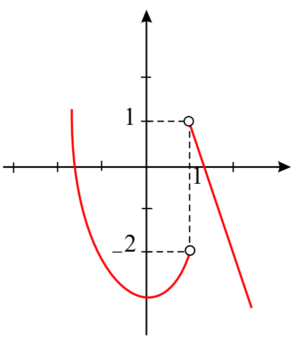
$y=x^2-3$



$y=3-2x\rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.\ ,\ B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$



از ترکیب این دو شکل، شکل زیر حاصل می‌گردد.



دقت کنید اگر $a\geq 1$ باشد در این صورت $x=1$ طول Max نسبی است و اگر $a<-2$ باشد در این صورت $x=1$ طول Min نسبی است بنابراین a نمی‌تواند سه مقدار صحیح -2 و -1 و 0 را قبول کند.

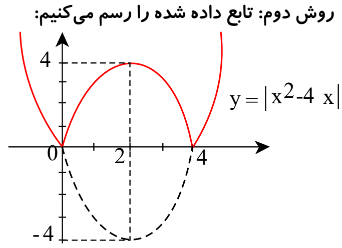
۳ - گزینه ۳ روش اول: در توابع $y=|u|$ از حل معادلات $u=0\ ,\ u'=0$ طول نقاط بحرانی بدست می‌آید.

$$u=0\rightarrow x^2-4x=0\rightarrow x(x-4)=0\rightarrow x=0\,,4$$
$$u'=0\rightarrow 2x-4=0\rightarrow x=2$$

پس مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{0,2,4\}$

روش دوم: تابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$y=|x^2-4x|\rightarrow y=|(x-2)^2-4|$$



در $x=0$ و $x=4$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x=2$ مشتق برابر صفر است.

۴ - گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

ابتدا $fof(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^2-x \Rightarrow fof(x)=f(f(x))=(x^2-x)^2-(x^2-x)$$

$$\Rightarrow (fof(x))'=2(x^2-x)(2x-1)-(2x-1)=\underbrace{(2x-1)}_{\text{فاکتور}}(2x^2-2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ 2x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع ۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.

۵ - گزینه ۳

$$f(x)=2x^3-6x^2+ax+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-12x+a$$

باید $f'(x)$ ریشه داشته باشد، اما تغییر علامت ندهد، یعنی مشتق ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$f'(x)=6x^2-12x+a \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Delta=(-12)^2-4(6)(a)=144-24a=0 \Rightarrow a=6$$

۶ - گزینه ۱

$$y=(x-1)|x|=\begin{cases} x(x-1) & x\geq 0 \\ -x(x-1) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2-x & x\geq 0 \\ x-x^2 & x<0 \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} 2x-1 & x>0 \\ 1-2x & x<0 \end{cases}$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، داریم:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\rightarrow 0<x<\frac{1}{2}$ یا $x\in(0,\frac{1}{2})$

دقت کنید چون $x=0$ ریشه ساده داخل قدرمطلق می‌باشد تابع در $x=0$ مشتق ناپذیر است.

۷ - گزینه ۳ برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که $\Delta<0$ و ضریب x^2 منفی باشد.

$$y'=3x^2+2ax+1\geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ضریب } x^2>0 \rightarrow 3>0 \\ \Delta\leq 0 \rightarrow 4a^2-12\leq 0 \rightarrow a^2\leq 3 \rightarrow -\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3} \rightarrow |a|\leq\sqrt{3} \end{cases}$$

۸ - گزینه ۲ با کمی دقت متوجه می‌شویم مخرج کسر به صورت $(\sqrt{x}-1)^2+3$ است، بنابراین تابع به صورت $f(x)=\dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)^2+3}$ در می‌آید.

پس حداقل مقدار مخرج در $x=1$، برابر ۳ خواهد بود (کمترین مقدار مخرج وقتی است که عبارت درجه‌ی دوم صفر گردد) بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $\dfrac{2}{3}$ است. (کسری که صورتش یک عدد مثبت است وقتی Max است که مخرجش Min گردد)

۹ - گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x+3} \rightarrow f'(x)=\frac{2x+4}{3\sqrt[3]{(x^2+4x+3)^2}}=0 \Rightarrow x=-2$$

در $x=-1$ و $x=-3$ مشتق وجود ندارد.(مخرج مشتق را مساوی صفر قرار دادیم)

$$f(-2)=(4-8+3)^{\frac{1}{3}}=-1\ ,\ f(-3)=(9-12+3)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$f(-4)=(16-16+3)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}\ ,\ f(-1)=(1-4+3)^{\frac{1}{3}}=0$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع، $\sqrt[3]{3}$ می‌باشد.

۱۰ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=[\frac{(x^2+1)+x^2}{x^2+1}]=[1+\frac{x^2}{x^2+1}]=1+[\frac{x^2}{x^2+1}]$$

از طرفی می‌دانیم $0\leq x^2<x^2+1$، پس $0\leq\dfrac{x^2}{x^2+1}<1$، بنابراین $[\dfrac{x^2}{x^2+1}]=0$ پس ضابطه‌ی f به صورت $f(x)=1$ است که تابعی ثابت است، در نتیجه تابع f هم صعودی و نزولی است.

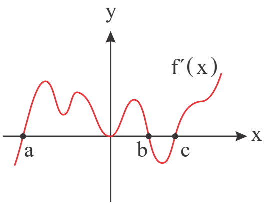
۱۱ - گزینه ۴ برای تعیین نقطه‌ی اکسترمم نسبی، ریشه یا ریشه‌های ساده‌ی مشتق را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{x^2+kx+4}{x^2+2x+6}\to f'(x)=\frac{(2x+k)(x^2+2x+6)-(2x+2)(x^2+kx+4)}{(x^2+2x+6)^2}$$
$$=\frac{2x^3+4x^2+12x+kx^2+2kx+6k-2x^3-2kx^2-8x-2x^2-2kx-8}{(x^2+2x+6)^2}$$
$$=\frac{2x^2-kx^2+4x+6k-8}{(x^2+2x+6)^2}=\frac{(2-k)x^2+4x+(6k-8)}{(x^2+2x+6)^2}$$

چون در صورت سوال قید شده تابع فقط دارای یک اکسترمم نسبی است پس باید صورت کسر مشتق، فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد یعنی صورت از درجه اول است پس $2-k=0\to k=2$

$$f'(x)=\frac{4x+4}{(x^2+2x+6)^2}=0\to x=-1\to f(-1)=\frac{1-2+4}{1-2+6}=\frac{3}{5}\ \text{عرض اکسترمم}$$

۱۲ – گزینه ۳ با توجه به نمودار مقابل، تابع $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.



$\to$

x		a		0		b		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\searrow$	Min	$\nearrow$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا و با استفاده از آزمون مشتق اول، نتیجه می‌گیریم تابع f در نقاط a و c دارای مینیمم نسبی و در نقطه‌ی b دارای ماکسیمم نسبی است، بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

۱۳ – گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند.

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)\to f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\to f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$
$$\to f'(x)=\frac{2}{3}(4\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=\frac{2}{3}(\frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}})=0\to 4x^2=1\to x^2=\frac{1}{4}$$
$$\to\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ \text{(در دامنه قرار ندارد) غ ق ق}\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

به ازای $x=0$، مشتق وجود ندارد و بحرانی می‌باشد. بنابراین تابع داده شده در بازه‌ی مورد نظر داری دو نقطه‌ی بحرانی است.

۱۴ – گزینه ۱ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند.

$$f(x)=4x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{8}{5}}\to f'(x)=\frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}-\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}=\frac{4}{5}(3x^{-\frac{2}{5}}-2x^{\frac{3}{5}})$$
$$=\frac{4}{5}(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}-2\sqrt[5]{x^3})=\frac{4}{5}(\frac{3-2x}{\sqrt[5]{x^2}})=0\to 3-2x=0\to x=\frac{3}{2}\ \text{:بحرانی}$$

به ازای $x=0$، مشتق وجود ندارد بنابراین بحرانی است.

۱۵ – گزینه ۱

$$2x=y+6\to y=2x-6$$

پس: $xy=x(2x-6)=2x^2-6x$: یک متغیره $\xrightarrow{\text{مشتق}=0} 4x-6=0\to x=\frac{3}{2}$

$$\xrightarrow{y=2x-6} y=3-6=-3\to x+y=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

۱۶ – گزینه ۲

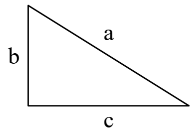
تابع f در بازهٔ داده‌شده پیوسته و مشتق‌پذیر است. از تابع مشتق می‌گیریم و طول نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x\to f'(x)=x^2-2x-15=(x-5)(x+3)=0$$
$$\to\begin{cases}x=5\to\ \text{(در بازه قرار ندارد) غ ق ق}\\ x=-3\end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به‌ازای طول نقاط بحرانی به دست آوریم.

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=\frac{68}{3}\sim 22{,}6$$
$$f(3)=9-9-45=-45\to\ \text{مطلق}\ Min$$
$$f(-3)=-9-9+45=27\to\ \text{مطلق}\ Max$$

۱۷ - گزینه ۲ شکل مسئله به‌صورت



است. فرض مسئله به‌صورت $a+b=6$ است.

$$a^2=b^2+c^2 \to a^2-b^2=c^2 \to (a+b)(a-b)=c^2 \to 6(a-b)=c^2 \to a-b=\frac{c^2}{6}$$

پس: $\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=\dfrac{c^2}{6} \end{cases} \to \begin{cases} a+b=6 \\ -a+b=-\dfrac{c^2}{6} \end{cases} \to 2b=6-\dfrac{c^2}{6} \to b=3-\dfrac{c^2}{12}$

یک‌متغیره : $S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}(3-\frac{c^2}{12})(c)=\frac{1}{2}(3c-\frac{1}{12}c^3)$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} \frac{1}{2}(3-\frac{1}{4}c^2)=0 \to \frac{1}{4}c^2=3 \to c^2=12 \to c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{b=3-\frac{c^2}{12}} b=3-1=2$$

پس: $S_{Max}=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

۱۸ - گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند.

$$f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+1 \to f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}(4x^{\frac{5}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})$$

$$=\frac{2}{3}(4\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=\frac{2}{3}(\frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}})=0 \to 4x^2-1=0 \to x^2=\frac{1}{4}$$

طول نقاط بحرانی که در این نقاط مشتق صفر است : $\to x=\pm\frac{1}{2}$

و توجه کنید در $x=0$ مشتق وجود ندارد و بحرانی محسوب می‌شود بنابراین گزینه‌ی دوم صحیح است.

۱۹ - گزینه ۴ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. دامنه‌ی تعریف تابع داده شده برابر $D_f=(-\infty,+\infty)$ است.

$$f(x)=\sqrt[5]{x^5-5x^4}=f'(x)=\frac{1(5x^4-20x^3)}{5\sqrt[5]{(x^5-5x^4)^4}}=\frac{5x^3(x-4)}{5\sqrt[5]{(x^4(x-5))^4}}$$

$$=\frac{x^3(x-4)}{\sqrt[5]{\underbrace{x^{16}}_{x^{15}\cdot x}(x-5)^4}}=\frac{x^3(x-4)}{x^3\sqrt[5]{x(x-5)^4}}=\frac{x-4}{\sqrt[5]{x(x-5)^4}}$$

$$\to \begin{cases} \text{صورت}=0 \to x-4=0 \to x=4 \\ \text{مخرج}=0 \to x(x-5)^4=0 \to x=0\,,\ x=5 \end{cases}$$

به ازای $x=4$ مشتق برابر صفر است و به ازای $x=0$ و $x=5$ مشتق وجود ندارد.

۲۰ - گزینه ۱

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-(\frac{m-2}{2})x^2+8x+3 \to f'(x)=2x^2-(m-2)x+8$$

باید معادله‌ی $f'(x)=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد و می‌دانیم شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو ریشه) و $\frac{-b}{a}>0$ (جمع دو ریشه) باشد.

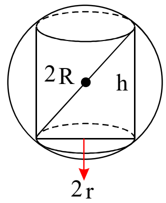
$$\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to (m-2)^2-64>0 \to (m-2)^2>64 \to \begin{cases} m-2>8 \to m>10 \\ \text{یا} \\ m-2<-8 \to m<-6 \end{cases}$$

$$\frac{-b}{a}>0 \to \frac{m-2}{2}>0 \to m-2>0 \to m>2$$

$\frac{c}{a}>0 \to \frac{8}{2}>0 \to$ برقرار است

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به جواب $m>10$ می‌رسیم.

۲۱ - گزینه ۲ نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h، برابر است با: $V=\pi r^2 h$



$$h^2+4r^2=4R^2 \Rightarrow r^2=\frac{4R^2-h^2}{4}$$

$$\text{استوانه } V=\pi r^2 h=\pi h\left(\frac{4R^2-h^2}{4}\right)=\frac{\pi}{4}(4R^2h-h^3)$$

$$V'_h=0 \Rightarrow 4R^2-3h^2=0 \Rightarrow 4R^2=3h^2 \quad (*)$$

$$h^2+4r^2=4R^2 \xrightarrow{(*)} h^2+4r^2=3h^2 \Rightarrow 4r^2=2h^2 \Rightarrow \left(\frac{r}{h}\right)^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{r,h>0} \frac{r}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۲ - گزینه ۳ تابع داده شده یک تابع خطی است و ریشه‌های مشتق، نشان‌دهنده‌ی طول نقاط بحرانی این تابع هستند.

$$f'(x)=x^2+mx-(m^2+1)$$

$$\text{مجموع طول‌های نقاط بحرانی}=-2 \Rightarrow \frac{-b}{a}=-2 \to -m=-2 \to m=2$$

$$\text{حاصلضرب طول‌های نقاط بحرانی}=\frac{c}{a}=-(m^2+1)=-(4+1)=-5$$

۲۳ - گزینه ۴

ابتدا قدر مطلق را با تعیین علامت، حذف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\ge 0 \\ -x^2-x & x<0 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ \text{موجود نیست} & x=0 \ (\text{ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدر مطلق}) \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \to \begin{cases} 2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2} \ \text{باتوجه به آنکه } x>0 \text{ است غیر قابل قبول است} \\ -2x-1=0 \to x=-\frac{1}{2} \ \text{باتوجه به آنکه } x<0 \text{ است قابل قبول است} \end{cases}$$

$$f(0)=0\ ,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ ,\ \underbrace{f(-2)=-2}_{\text{مطلق } Min}\ ,\ \underbrace{f(1)=2}_{\text{مطلق } Max} \to -2+2=0$$

۲۴ - گزینه ۱ کافی است که ریشه‌های مشتق را پیدا کرده و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=(x^2-3x+2)(x^2-10x+9)=(x-1)(x-2)(x-1)(x-9)=(x-1)^2(x-2)(x-9)=0$$

$\to x=1\ ,\ x=2\ ,\ x=9 \to$

x	$-\infty$		1		2		9		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

بنابراین تابع f دارای یک Max است.

۲۵ - گزینه ۳

$$y'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'=\frac{2x-2x^3+2x^3+2x}{(1-x)^2} \Rightarrow y'=\frac{4x}{(1-x^2)^2}=0 \to x=0$$

باتوجه به جدول تعیین علامت مشتق، نقطه‌ی $x=0$ طول مینیمم نسبی تابع است.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y′		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
y			||	$\searrow$	min	$\nearrow$	||		

۲۶ - گزینه ۴

برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی تابع، از تابع مشتق می‌گیریم، نقاطی که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد، طول نقاط بحرانی تابع هستند.

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که در آن‌ها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y=x^2(x-2)^2 \Rightarrow y'=2x(x-2)^2+2(x-2)\cdot x^2=\underbrace{2x(x-2)}_{\text{فاکتور}}(x-2+x)=0 \Rightarrow 2x(x-2)(2x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2, x=1$$

$$x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \to A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \to B\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow AB=\sqrt{4+0}=2\ ,\ AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ ,\ BC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$x=1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=1 \to C\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$$

مثلث متساوی‌الساقین است و چون $2^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$، پس مثلث قائم‌الزاویه نیز هست.

۲۷ - گزینه ۲ روش اول:

$$y=\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2+5}=\frac{1}{x^2(x^2-4x+4)+5}=\frac{1}{x^2(x-2)^2+5}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2(x-2)^2$ مساوی صفر است بنابراین کمترین مقدار مخرج کسر مساوی ۵ است پس ماکسیمم مطلق تابع $\frac{1}{5}$ است. (صورت کسر یک عدد مثبت است پس بیشترین مقدار

کسر وقتی به دست می‌آید که مخرج کسر، کمترین مقدار را داشته باشد.)

روش دوم: از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم:

$D_f = R = (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{-(4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x^2 - 3x + 2)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-1)(x-2)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را وقتی $x \to \pm\infty$ و همچنین در طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(0) = \frac{1}{5} \text{ مطلق } \min \text{ و } f(1) = \frac{1}{6}\ ,\ f(2) = \frac{1}{5}\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

توجه کنید که اگر بیشترین یا کمترین مقدار تابع به‌ازای $\pm\infty$ به دست می‌آمدند تابع max یا min مطلق نداشت.

۲۸ ـ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال، مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می کنیم.

$$f(0) = 0\ ,\ f(-1) = \frac{-5}{12}\ ,\ f(2) = -\frac{8}{3}\ ,\ f(3) = \frac{9}{4}$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{8}{3}$ می‌باشد.

۲۹ ـ گزینه ۳

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+3) - 2x(x^2-3x)}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x - 3x^2 - 9 - 2x^3 + 6x^2 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -3 \ \text{(در بازه قرار ندارد)} \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$f(-1) = 1,\ f(1) = -\frac{1}{2},\ f(2) = -\frac{2}{7}$$

کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۳۰ ـ گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد. دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی $D_f = (-\infty, +\infty)$ است.

ابتدا قدرمطلق را با تعیین علامت، از بین می‌بریم:

$$x \geq 2 \rightarrow f(x) = (x-2)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 0 \xrightarrow{\times 3} 5x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{-1}{3}} = 0$$

$$\rightarrow 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow \frac{5x-4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}\ ,$$ در $x = 0$، مشتق وجود ندارد

به ازای $x < 2$ نیز همین دو نقطه‌ی بحرانی بدست می‌آید. دقت کنید $x = 2$ ریشه‌ی ساده داخل قدرمطلق می‌باشد، بنابراین تابع در $x = 2$ مشتق‌ناپذیر است پس بحرانی می‌باشد. (نقطه‌ی زاویه دار)

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۴	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۱	۲۵ - ۳	۳۰ - ۱