نام آزمون: نقاط مهم نمودار

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - نشان دهید نقطه $(۱,۰)$ یک گوشه برای تابع $f(x)=|x-۱|$ است و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

۲ - با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع زیر می‌باشد و اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$$

۳ - $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$ به ترتیب چه نقاطی برای f هستند؟

$$f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^۲}$$

(۱) عطف قائم، بازگشت max

(۲) عطف قائم، بازگشت min

(۳) بازگشت min ، عطف قائم

(۴) بازگشت max ، عطف قائم

۴ - فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-ax+۲a-۸}$ و $f'_+(۲)=+\infty\ ,\ f'_-(۲)=-\infty$ می‌باشد. a کدام است؟

(۱) $a\in\mathbb{R}$

(۲) $a\in\mathbb{R}-\{۱۲\}$

(۳) $a=۱۲$

(۴) $a\in\varnothing$

۵ - تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}$ در نقطه‌ی $x=۰$ چگونه است؟

(۱) بازگشتی است.

(۲) مماس قائم دارد.

(۳) زاویه‌دار است.

(۴) نقطه‌ی عادی است.

۶- $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه سوم است، به طوری‌که $x = x_1$ ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ است و $x = x_2$ ریشه‌ی ساده آن می‌باشد. نقطه $x = x_1$ چه نقطه‌ای برای $f(x) = \sqrt[3]{P(x)}$ است؟

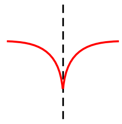
(۱) عطف قائم

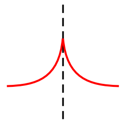
(۲) عطف افقی

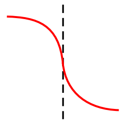
(۳) بازگشت

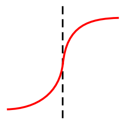
(۴) max نسبی

۷- نمودار تابع $f(x) = \sqrt[7]{(x^2-1)^2}$ در همسایگی $x = -1$ کدام است؟

(۱) 

(۲) 

(۳) 

(۴) 

۸- تابع $f(x) = (x-1)(x^2+ax+4)$ بر محور xها مماس است. به ازای کم‌ترین مقدار ممکن برای a، نقطه‌ی $x = 1$ چه نقطه‌ای برای تابع $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ است؟

(۱) بازگشت، min

(۲) بازگشت max

(۳) عطف قائم

(۴) عطف مایل

۹ - تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۳}+ax+b}$ **در** $x=-۱$ **نقطه بازگشتی دارد. نقطه‌ی عطف آن کدام نقطه است؟**

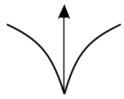
(۱) $x=۲$

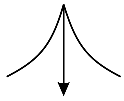
(۲) $x=-۲$

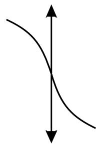
(۳) $x=۱$

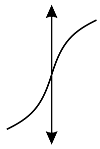
(۴) عطف ندارد

۱۰ - شکل تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{\sqrt[۳]{x}} & ; \quad x\neq ۰ \\ ۰ & ; \quad x=۰ \end{cases}$ **در نقطهٔ** $x=۰$ **چگونه است؟**

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


پاسخنامه تشریحی

۱ -

اگر مشتق چپ و راست دو عدد مختلف شود یا یکی عدد و دیگر بی نهایت شود، نقطه‌ی گوشه است.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}\to\begin{cases}f'_{+}(1)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x-1}{x-1}=1\\ f'_{-}(1)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1\end{cases}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-1-1}{1-1}\right|=\ \infty\to\theta=\frac{\pi}{2}$$

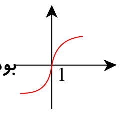
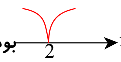
۲ - می‌دانیم: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\to\begin{cases}f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x}{x}=1\\ f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}x=0\end{cases}$$

$f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$ پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد و نقطه‌ی $(0,0)$ نقطه‌ی گوشه است.

$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{0-1}{1+0\times 1}\right|=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

۳ - گزینه ۲ توجه: ریشه‌ی ساده‌ی رادیکال فرجه‌ی فرد عطف قائم و ریشه‌ی مضاعف رادیکال فرجه‌ی فرد نقطه‌ی بازگشتی است.

تابع در اطراف نقطه $x=1$ به صورت $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(1^2)}$ می باشد که تابع به صورت  بوده که عطف قائم است. همچنین در اطراف نقطه $x=2$، تابع برابر $f(x)=\sqrt[3]{(2-1)(x-2)^2}$ است که به صورت  بوده که min است.

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: اگر $x=k$ ریشه‌ی مضاعف تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد آنگاه: $f(k)=0$ و $f'(k)=0$

تابع در $x=2$ نقطه‌ی بازگشتی دارد، بنابراین $x=2$ ریشه مضاعف زیر رادیکال فرجه ۳ است:

$$P(x)=x^3-ax+2a-8\Rightarrow P(2)=8-2a+2a-8=0$$
$$P'(x)=3x^2-a\Rightarrow P'(2)=12-a=0\Rightarrow a=12$$

توجه کنید که $(x-2)^2$ عامل $P(x)$ است، بنابراین $P(2)=P'(2)=0$

۵ - گزینه ۲

روش اول:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_{+}(0)=\dfrac{1}{0^{+}}=+\infty\\ f'_{-}(0)=\dfrac{1}{0^{+}}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=0$ دارای مماس قائم است.

روش دوم: می‌دانیم در تابع $f(x)=g(x)^{2n+1}\sqrt{(x-a)^m}$ اگر $g(a)\neq 0$ باشد، چنانچه m زوج باشد $x=a$ نقطه‌ی بازگشتی و چنانچه m فرد باشد $x=a$ عطف قائم است به شرط آنکه فرجه بزرگتر از توان زیر رادیکال باشد.

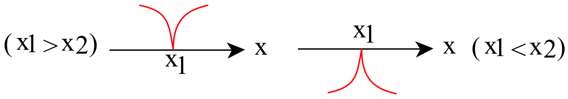
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)$$

بنابراین $x=0$ طول عطف قائم است لذا تابع در $x=0$ مماس قائم دارد.

۶ - گزینه ۳ می‌دانیم: ریشه‌ی مضاعف رادیکال فرجه فرد طول نقطه بازگشتی منحنی است.

نکات مهم نمودار

از آنجا که x_2 ریشه‌ی ساده و x_1 ریشه‌ی مضاعف تابع $P(x)$ است، لذا $f(x)=\sqrt[3]{(x-x_1)^2(x-x_2)}$ خواهد بود. در اطراف نقطه $x=x_1$ تابع به صورت نقطه بازگشت به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:



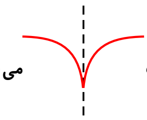
۷ ـ گزینه ۱

با توجه به گزینه هاخط مماس قائم است بنابراین مشتق در این نقطه ∞ است پس برای تشخیص علامت ∞ باید مشتق چپ و راست را جدا کنیم.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[7]{(x^2-1)^2}-0}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[7]{(x+1)^2}\sqrt[7]{(x-1)^2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[7]{4^2}}{\sqrt[7]{(x+1)^5}}$$

$$\begin{cases} f'_+(-1)=\dfrac{\sqrt[7]{4}}{0^+}=+\infty \\ f'_-(-1)=\dfrac{\sqrt[7]{4}}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست بی نهایت‌های مختلف العلامت است.

پس این نقطه‌ی بازگشتی می‌باشد بنابراین شکل تابع اطراف $x=-1$ به صورت  می‌باشد.

۸ ـ گزینه ۲ ابتدا بررسی می‌کنیم که به ازای کدام مقادیر a , f بر محور xها مماس است:

$$f(x)=(x-1)(x^2+ax+4)$$

چون $f(x)$ بر محور xها مماس است معادله $f(x)$ ریشه‌ی مضاعف دارد و ۲ حالت ممکن است رخ دهد:

۱) معادله $x^2+ax+4=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

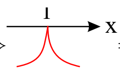
$\Delta=0\to a^2-16=0\to a=\pm 4\to x^2\pm 4x+4=(x\pm 2)^2=0\to x=\pm 2$ ریشه‌ی مضاعف و نقطه‌ی تماس

۲) ممکن است معادله $x-1=0$ و $x^2+ax+4=0$ ریشه‌ی مشترک داشته باشند.

$$x-1=0\to x=1\xrightarrow{x^2+ax+4=0}(1)^2+a(1)+4=0\to a=-5$$

$a=-5$ کم‌ترین مقدار است، $f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=(x-1)(x^2-5x+4)=(x-1)^2(x-4)$$

$g(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x-4)}\Rightarrow$  $\Rightarrow \max$ بازگشت

۹ ـ گزینه ۱ $x=-1$ نقطه بازگشتی تابع است. بنابراین عبارت زیر رادیکال فرجه ۳، در $x=-1$ ریشه مضاعف دارد، یعنی

$$P(x)=x^3+ax+b\ ,\quad P(-1)=P'(-1)=0$$

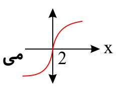
$$\left.\begin{aligned} &P(-1)=-1-a+b=0\\ &P'(-1)=3(-1)^2+a=0\Rightarrow a=-3\ ,\quad b=-2\end{aligned}\right.\Rightarrow P(x)=x^3-3x-2$$

تابع در ریشه ساده‌ی عبارت رادیکال، عطف قائم خواهد داشت. این ریشه را می‌یابیم.

$$P(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2\cdot(x-2)$$

بنابراین $x=2$ عطف تابع f خواهد بود.

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$$

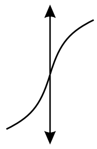
تابع در اطراف $x=2$ به صورت  می‌باشد که عطف قائم به شمار می‌رود.

۱۰ ـ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{\sqrt[3]{x}} & ;\quad x\neq 0\\ 0 & ;\quad x=0\end{cases}$$ تابع در $x=0$ پیوسته است.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow\begin{cases} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{\sqrt[3]{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty\\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{-x}{\sqrt[3]{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty\end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست هر دو بی نهایت است پس خط مماس قائم است و چون مشتق مثبت است تابع صعودی می‌باشد.



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۹	۱ - ۷	۲ - ۵	۲ - ۳
۴ - ۱۰	۲ - ۸	۳ - ۶	۳ - ۴