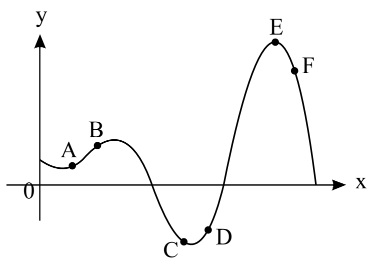
علی هاشمی

۱ - اگر $f(x)=|x^2-4|$، به‌کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲− بررسی کنید.

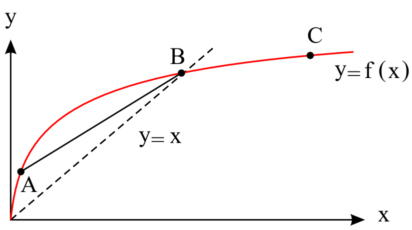
۲ - اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به‌طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۳ - نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	-3
	-1
	0
	$\frac{1}{2}$
	1
	2

۴ - برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطهٔ A

ب) شیب نمودار در نقطهٔ B

پ) شیب نمودار در نقطهٔ C

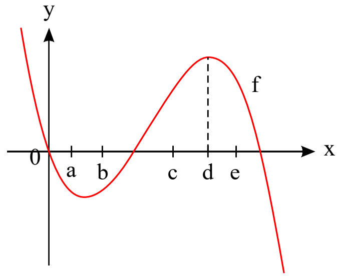
ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

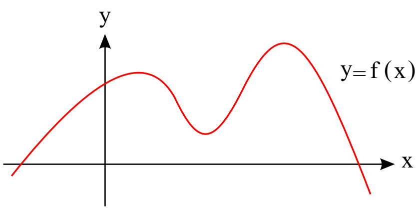
شیب‌های داده‌شده از «الف» تا «ج» را به‌ترتیب m_1، m_2، ... و m_6 در نظر بگیرید.

۵ - با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	$-$۰٫۵
	$-$۲

۶ - نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به‌طوری که:



الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

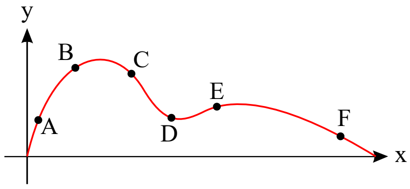
ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۷ - اگر $f(x)=x^۳-۲$، $f'(-۱)$ را به دست آورید.

۸ - نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همهٔ این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A را با m_A نمایش داده‌ایم.)

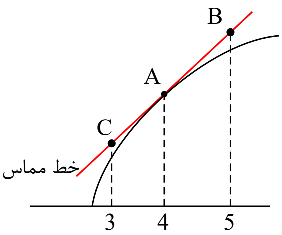
پ) $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

۹ - برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۵$ با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



۱۰ - در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی‌شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $j - s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

۱۱ - دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = ۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

۱۲ - تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۱۳ - نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

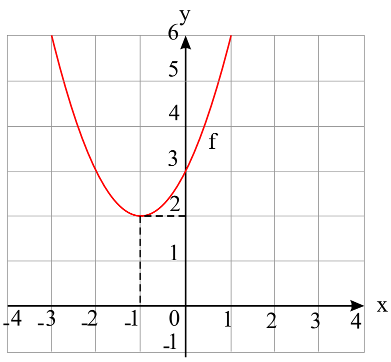
ث) در تمام نقاط منفی باشد.

۱۴ - الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)=x^2+2x+3$ بررسی کنید.

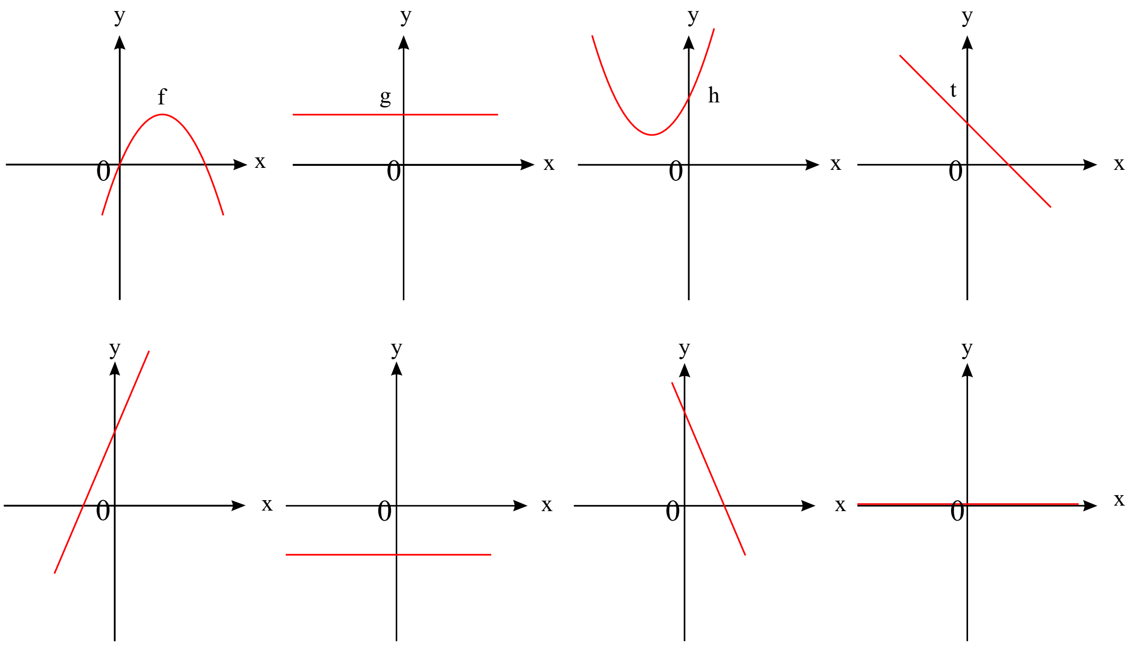
پ) تابع مشتق را رسم کنید.



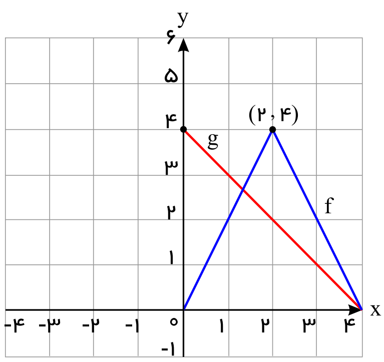
۱۵ - مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\ge 1\\ 2x & x<1\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید.

۱۶ - سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۱۷ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۸ – نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

۱۹- اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

۲۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجود هستند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۲۱- جدول زیر درجهٔ حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

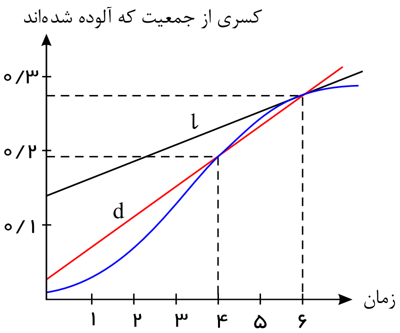
آهنگ تغییر متوسط درجهٔ حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

۲۲- کسری از جمعیت یک شهر که به‌وسیلهٔ یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

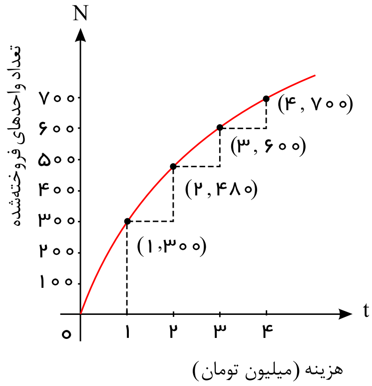


الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$، $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت «ب» را برای $t=۴$، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.

۲۳ – نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.



الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۲۴ – معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازهٔ زمانی $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰ , ۵]$ با هم برابرهستند؟

۲۵ – توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲٫۴	۱۳٫۸	۱۵٫۱	۱۶٫۳	۱۷٫۴	۱۸٫۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه است نشان دهد؟

الف) ۱٫۲۳ m/s ب) ۱۴٫۹۱ m/s ج) ۱۱٫۵ m/s د) ۱۶٫۰۳ m/s

۲۶ - با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده‌شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(۰) \approx -۶$. بقیهٔ جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار ترکیبی $f'(x)$	-۶				

۲۷ - کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازهٔ $[۰, ۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = ۰$ و هم $f(a) = ۰$

۲۸ - یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این تودهٔ باکتری در بازهٔ زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ $t = ۳$ چقدر است؟

۲۹ - گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V = ۴۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست آید:

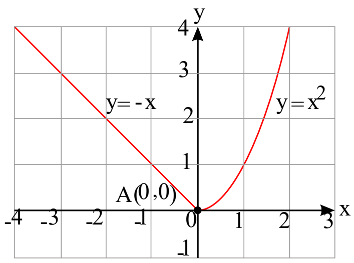
الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازهٔ زمانی $[۰, ۱]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[۰, ۱۰۰]$ می‌شود؟

۳۰ - با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطهٔ A، نشان دهید که این توابع در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیستند.

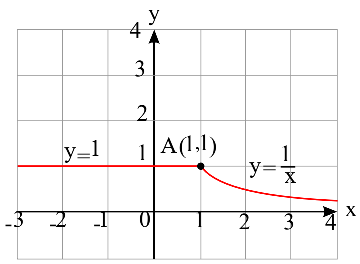
الف

(الف)



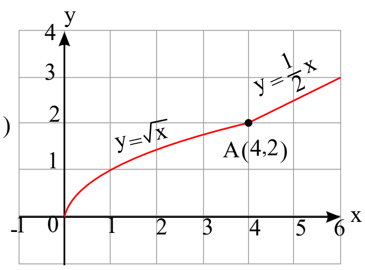
ب

(ب)



پ

(پ)



۳۱ – مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف

$$f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$$

ب

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

پ

$$f(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1)$$

ت

$$f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

۳۲ - مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف

$f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$

ب

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

پ

$f(x) = \tan^2 x - 2\cos x$

ت

$f(x) = \sin x \cos 2x$

پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$f(۲)=۰ \Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x^۲-۴|}{x-۲}$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}-(x+۲)=-۴$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۴|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴$$

$f'_-(۲)\neq f'_+(۲)$، پس تابع در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f(-۲)=۰ \Rightarrow f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{|x^۲-۴|}{x+۲}$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{|x^۲-۴|}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^-}(x-۲)=-۴$$

توجه کنید زمانی که $x\to(-۲)^-$ عبارت $x^۲-۴$ مثبت است.

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x^۲-۴)}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}(-x+۲)=۴$$

توجه کنید زمانی که $x\to(-۲)^+$ عبارت $x^۲-۴$ منفی است.

$f'_-(-۲)\neq f'_+(-۲)$، پس تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۲ -

$$f(x)=۳x^۲-۲x+۱\ ,\ x=۲\Rightarrow f(۲)=۱۲-۴+۱=۹$$

شیب خط مماس برابر با مشتق تابع در نقطهٔ $x=۲$ است.

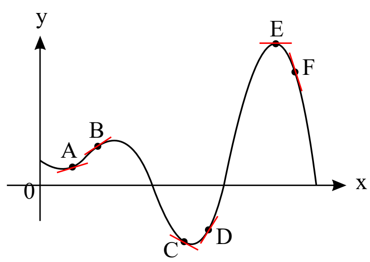
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-۹}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(۳x+۴)=۱۰$$

$$A(۲,۹), m=۱۰\Rightarrow y-۹=۱۰(x-۲)\Rightarrow y=۱۰x-۱۱$$

۳ -

پاسخ:



نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

خط مماس بر منحنی در هر نقطه را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، شیب خط مماس در نقاط D، B و A مثبت است و داریم:

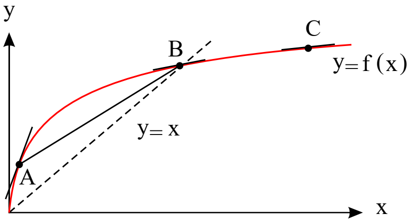
$$D \text{ شیب خط مماس در } > B \text{ شیب خط مماس در } > A \text{ شیب خط مماس در } \Rightarrow f'(D)>f'(B)>f'(A)$$

شیب خط مماس در نقاط C و F منفی است و داریم:

$$F \text{ شیب خط مماس در } < C \text{ شیب خط مماس در } \Rightarrow f'(F)<F'(C)$$

شیب خط مماس در E صفر است، یعنی: $f'(E)=۰$

۴ -



شیب نمودار در نقطهٔ A $= m_۱$، شیب نمودار در نقطهٔ B $= m_۲$

شیب نمودار در نقطهٔ C $= m_۳$

شیب خط AB $= m_۴$، شیب خط $y = ۲$ $= m_۵ = ۰$

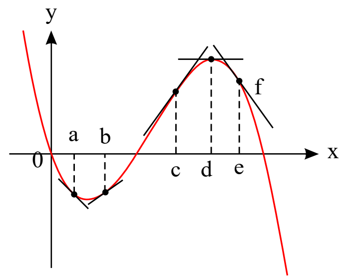
شیب خط $y = x$ $= m_۶ = ۱$

با توجه به شکل و در نظر گرفتن زاویهٔ هرکدام از خط‌های (الف) تا (ج) با جهت مثبت محور xها داریم:

شیب نمودار در نقطهٔ A > شیب $y = x$ > شیب AB > شیب نمودار در نقطهٔ B > شیب نمودار در نقطهٔ C > شیب $y = ۲$

$\Rightarrow m_۱ > m_۶ > m_۴ > m_۲ > m_۳ > m_۵$

۵ - پاسخ:



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰٫۵
c	۲
a	−۰٫۵
e	−۲

شیب خط مماس در نقاط $x = b$ و $x = c$ مثبت، در نقاط $x = a$ و $x = e$ منفی و در نقطهٔ $x = d$ صفر است.

شیب خط مماس در $x = c$ > شیب خط مماس در $x = b$ $\Rightarrow f'(c) > f'(b) \Rightarrow f'(c) = ۲\ ,\ f'(b) = ۰٫۵$

شیب خط مماس در $x = e$ > شیب خط مماس در $x = a$ $\Rightarrow f'(e) < f'(a) \Rightarrow f'(e) = -۲\ ,\ f'(a) = -۰٫۵$

شیب خط مماس در $x = d$ $= ۰ \Rightarrow f'(d) = ۰$

۶ - الف) شیب خط مماس در نقطهٔ A منفی است یعنی مشتق در نقطهٔ A منفی است.

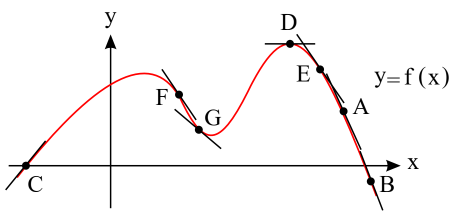
ب) چون نقطهٔ B زیر محور xها قرار دارد پس مقدار تابع در B منفی است $y_B < ۰$. از طرفی شیب خط مماس در این نقطه نیز منفی است.

پ) خط مماس در نقطهٔ C با جهت مثبت محور xها زاویهٔ حاده دارد، پس مقدار مشتق در نقطهٔ C مثبت است و از طرفی C محل برخورد با محور xهاست. پس $f(C) = ۰$.

ت) خط مماس در نقطهٔ D خطی افقی است یعنی مشتق در D صفر است.

ث) خط مماس در نقاط E و F موازی هستند یعنی مشتق در E و F برابرهستند.

ج) چون G بالای محور xها است مقدار تابع در G مثبت است ولی چون شیب خط مماس در G منفی است یعنی مشتق در نقطهٔ G منفی است



۷ -

$f(x) = x^۳ - ۲\ ,\ f(-۱) = -۳$

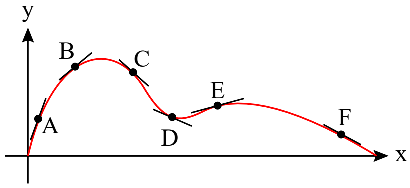
$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x - (-۱)} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ - (-۳)}{x + ۱}$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}{(x + ۱)}$$

$$= \lim_{x \to -۱} (x^۲ - x + ۱) = ۱ - (-۱) + ۱ = ۳ \Rightarrow f'(-۱) = ۳$$

۸ -

خط مماس بر منحنی در تمام نقاط را رسم می‌کنیم.



الف) نادرست: شیب منحنی در نقاط C، D و F منفی و در نقاط A، B و E مثبت است.

ب) نادرست: زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ A با جهت مثبت محور xها از زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ B با محور xها بیشتر و هر دو حاده هستند. پس داریم: $m_A > m_B$

پ) درست:

زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ E با محور xها $<$ زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ B با محور xها $<$ زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ A با محور xها

$\Rightarrow m_A > m_B > m_E$

ت) درست

ث) نادرست: زاویهٔ خط مماس در نقاط F، D و C با جهت مثبت محور xها منفرجه است و داریم:

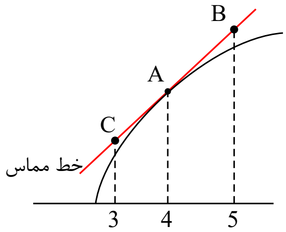
$\alpha_F > \alpha_D > \alpha_C \Rightarrow m_F > m_D > m_C$

ج) درست: با توجه به پاسخ‌های قسمت «پ» و «ث» داریم:

$m_A > m_B > m_E > m_F > m_D > m_C$

۹ -

با توجه به $f(۴)=۲۵$ مختصات نقطهٔ A به‌صورت $A(۴,۲۵)$ است. از آنجایی که نقاط B و C روی خط مماس در نقطهٔ A قرار دارند، باید معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ A را بیابیم و چون $f'(۴)=۱/۵$ یعنی شیب خط مماس در نقطهٔ A برابر $۱/۵$ است.



$m = ۱/۵\ ,\ A = (۴,۲۵) \Rightarrow y - ۲۵ = ۱/۵(x-۴) \Rightarrow y = ۱/۵x - ۶ + ۲۵ \Rightarrow y = ۱/۵x + ۱۹$

$x = ۳ \Rightarrow y = ۱/۵ \times ۳ + ۱۹ = ۲۳/۵ \Rightarrow C = (۳, ۲۳/۵)$

$x = ۵ \Rightarrow y = ۱/۵ \times ۵ + ۱۹ = ۲۶/۵ \Rightarrow B = (۵, ۲۶/۵)$

۱۰ - سرعت حرکت علی با دوچرخه j متر در ثانیه و سرعت حرکت رضا با پای پیاده s متر در ثانیه است. حال مسافت طی‌شده توسط علی و رضا را در بازهٔ زمانی $[t_۱, t_۲]$ یافته و با هم مقایسه می‌کنیم.

مسافت طی‌شده توسط علی $x_A = V_A \cdot \Delta t = j \cdot \Delta t$

مسافت طی‌شده توسط رضا $x_R = V_R \cdot \Delta t = s \cdot \Delta t$

حال با محاسبهٔ اختلاف مسافت یا نسبت مسافت طی‌شده توسط این دو نفر داریم:

$$x_A - x_R = j \cdot \Delta t - s \cdot \Delta t = (j-s)\Delta t$$
$$\frac{x_A}{x_R} = \frac{j \cdot \Delta t}{s \cdot \Delta t} = \frac{j}{s} \Rightarrow x_A = \frac{j}{s} \cdot x_R$$

بنابراین مورد «ث» صحیح است.

۱۱ -

$$f(x) = \sqrt[۳]{x-۲} \Rightarrow f(۲) = ۰\ ,\ \lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} \sqrt[۳]{x-۲} = ۰$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{x-۲} - ۰}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{x-۲} \times \frac{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}$$
$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{(x-۲)^۳}}{(x-۲)\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{(x-۲)\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}$$
$$= \frac{۱}{\sqrt[۳]{(۲\pm\epsilon-۲)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{+\epsilon^۲}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

تابع f در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

$$g(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x \geq ۲ \\ -x + ۵ & x < ۲ \end{cases}$$

$g(۲)=۳$ ، حد چپ $=\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(-x+۵)=-۲+۵=۳$

حد راست $=\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۲x-۱)=۲\times ۲-۱=۳$

تابع g در $x=۲$ پیوسته است.

$$g'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x+۵-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x+۲}{x-۲}$$
$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$
$$g'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x-۱-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

تابع g در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

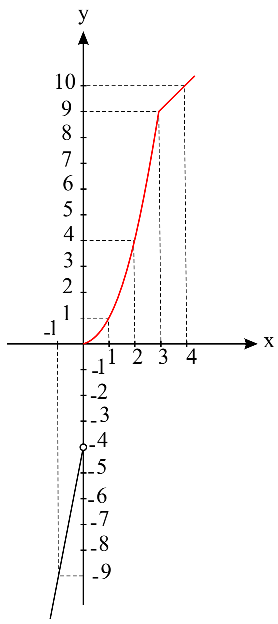
۱۲ - الف)

$$f(x)=\begin{cases}۵x-۴ & x<۰\\ x^۲ & ۰\le x\le ۳\\ x+۶ & x>۳\end{cases}$$

x	۰	-۱
y	-۴	-۹

x	۰	۳
y	۰	۹

x	۳	۴
y	۹	۱۰



ب)

$$f(۰)=۰\ ,\ f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۵x-۴-۰}{x}=\frac{-۴}{۰^-}=+\infty$$
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^+}x=۰$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f(۳)=۹\ ,\ f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}$$
$$=\lim_{x\to ۳^-}(x+۳)=۶$$
$$f'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۶-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۳}{x-۳}=۱$$

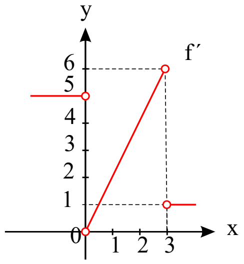
تابع در $x=۳$ مشتق‌ناپذیر است.

پ)

$$f'(x)=\begin{cases}۵ & x<۰\\ ۲x & ۰<x<۳\\ ۱ & x>۳\end{cases}$$

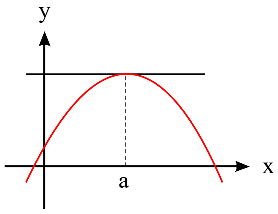
تابع مشتق در نقاط $x=۰$ و $x=۳$ تعریف نشده است زیرا تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

ت) نمودار تابع مشتق یعنی f' به‌صورت مقابل است.

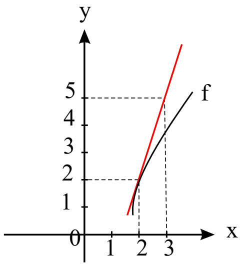


۱۳ -

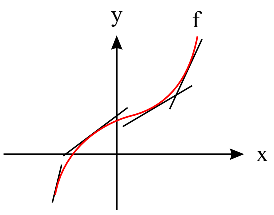
الف) در تابع مقابل مشتق در نقطهٔ $x=a$ یعنی شیب خط مماس صفر است.



ب) در تابع مقابل شیب خط مماس در نقطهٔ $x=2$ برابر ۳ است.

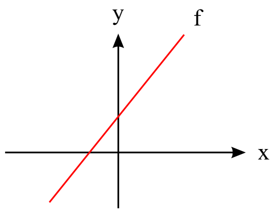


پ) در تابع مقابل شیب خط مماس در تمام نقاط مثبت است.

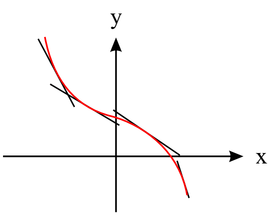


ت) از آنجایی که مشتق در تمام نقاط یکسان است، پس باید تابع مورد نظر یک تابع خطی باشد، مانند:

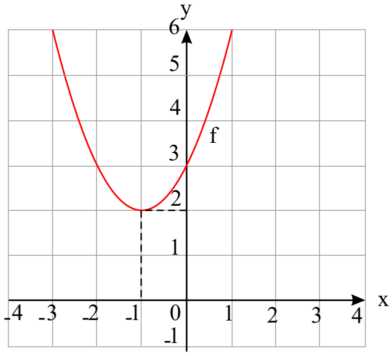
شیب خط f = مقدار ثابت = $f'(x)$



ث) در تابع مقابل شیب خط مماس در تمام نقاط منفی است.



۱۴ -



الف) در $x=-۱$ شیب خط مماس صفر است زیرا خط مماس خطی افقی است. در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ با افزایش x شیب خط مماس افزایش می‌یابد، پس داریم:

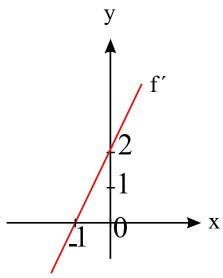
$$f'(-۱)<f'(۰)<f'(۲)<f'(۳)$$

ب)

$$f(x)=x^۲+۲x+۳\Rightarrow f'(x)=۲x+۲$$
$$f'(-۱)=۲(-۱)+۲=۰\ ,\ f'(۰)=۲\times ۰+۲=۲\ ,\ f'(۲)=۲\times ۲+۲=۶$$
$$f'(۳)=۲\times ۳+۲=۸$$
$$\Rightarrow f'(-۱)<f'(۰)<f'(۲)<f'(۳)$$

پ)

$$f'(x)=۲x+۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & ۰ \\ \hline f'(x) & ۰ & ۲ \end{array}$$



۱۵ -

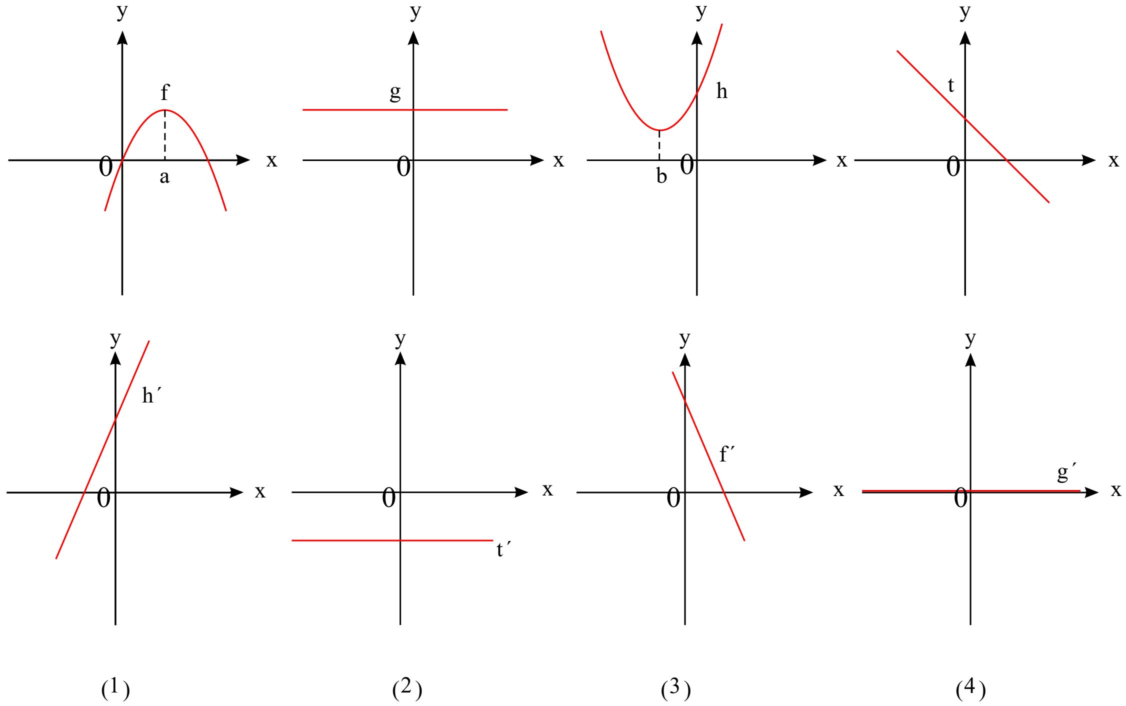
$$f(۱)=۴$$
$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۴}{x-۱}=\frac{۲-۴}{۱^--۱}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$$
$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۳-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$، تابع در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۶ -

$$f(x)=x^۴+۲\Rightarrow f'(x)=۴x^۳$$
$$g(x)=x^۴-۳\Rightarrow g'(x)=۴x^۳$$
$$h(x)=x^۴+\frac{۱}{۲}\Rightarrow h'(x)=۴x^۳$$

۱۷ -



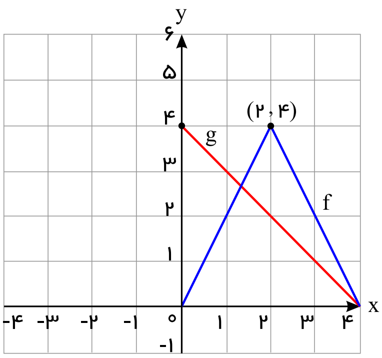
در تابع f برای $(-\infty, a)$ شیب خط مماس یعنی مشتق مثبت است و برای $(a, +\infty)$ شیب خط مماس یعنی مشتق منفی است، پس نمودار f' نمودار شمارهٔ (۳) است.

تابع g تابع ثابت است و مشتق آن در تمام نقاط صفر است، پس نمودار g' نمودار شمارهٔ (۴) است. در تابع h برای $(-\infty, b)$ شیب خط مماس یعنی مشتق منفی است و برای $(b, +\infty)$ شیب خط مماس یعنی مشتق مثبت است، پس نمودار h' نمودار شمارهٔ (۱) است.

تابع t تابعی خطی با شیب منفی است، پس مشتق آن در تمام نقاط یک عدد ثابت منفی است. پس نمودار (t') نمودار شمارهٔ (۲) است.

۱۸ -

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.



$$(0,0),(2,4) \Rightarrow m = \frac{4-0}{2-0} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$$

$$(2,4),(4,0) \Rightarrow m = \frac{4-0}{2-4} = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 2 \\ -2x + 8 & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.

$$(0,4),(4,0) \Rightarrow m = \frac{4-0}{0-4} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x-4) \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow g(x) = -x + 4$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$f(1) = 2\ ,\ 0 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$g(1) = 3\ ,\ g(x) = -x + 4 \Rightarrow g'(x) = -1 \Rightarrow g'(1) = -1$$

$h'(۱) = f'(۱) \cdot g(۱) + g'(۱) \cdot f(۱) = ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۲ = ۶ - ۲ = ۴$

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲(x - ۲)}{x - ۲} = ۲$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲x + ۸ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲(x - ۲)}{x - ۲} = -۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$f(۳) = ۲\ ,\ f'(۳) = -۲\ ,\ g(۳) = ۱\ ,\ g'(۳) = -۱$

$h'(۳) = f'(۳) \cdot g(۳) + g'(۳) \cdot f(۳) = -۲ \times ۱ + (-۱) \times ۲ = -۴$

ب)

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱) \times ۲}{۳^۲} = \frac{۶ + ۲}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)} = \frac{(-۲) \times ۱ - (-۱) \times ۲}{۱^۲} = \frac{-۲ + ۲}{۱} = ۰$$

۱۹ -

$(f + g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = ۸$

$(۳f + ۲g)'(۱) = ۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳ \times ۳ + ۲ \times ۵ = ۱۹$

۲۰ -

$f(۰) = ۰$

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲ - ۰}{x} = \lim_{x \to ۰^-} x = ۰$$

مشتق چپ در $x = ۰$ برابر صفر است یعنی $f'_-(۰)$ موجود است.

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x - ۰}{x - ۰} = ۱$$

مشتق راست در $x = ۰$ برابر یک است یعنی $f'_+(۰)$ موجود است.

چون $f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$ پس تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است یعنی $f'(۰)$ وجود ندارد.

۲۱ -

الف) اگر دما در ساعت h را با نماد $T(h)$ نشان دهیم، داریم:

$$\frac{T(۱۲) - T(۸)}{۱۲ - ۸} = \frac{۱۹ - ۱۱}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

ب)

$$\frac{T(۱۸) - T(۱۲)}{۱۸ - ۱۲} = \frac{۹ - ۱۹}{۶} = \frac{-۱۰}{۶} = -\frac{۵}{۳}$$

پ) چون آهنگ تغییر متوسط دما از ساعت ۸ تا ۱۲ مثبت است پس در این بازه به‌طور متوسط دما در حال افزایش است و همچنین چون آهنگ تغییر متوسط دما از ۱۲ تا ۱۸ منفی است، پس در این بازه دما در حال کاهش است.

۲۲ - الف) شیب خط d نشان‌دهندهٔ شیب وتر گذرنده از دو نقطهٔ $t = ۴$ و $t = ۶$ است، یعنی شیب خط d برابر با آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۴, ۶]$ است.

شیب خط l نشان‌دهندهٔ شیب خط مماس در نقطهٔ $t = ۶$ است، یعنی شیب خط l برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $t = ۶$ است.

ب) برای مقایسهٔ گسترش آلودگی در زمان‌های $t = ۱$، $t = ۲$ و $t = ۳$ باید خط مماس بر تابع در این زمان‌ها را رسم کنیم، که داریم:

شیب خط مماس در $t = ۱$ $>$ شیب خط مماس در $t = ۲$ $>$ شیب خط مماس در $t = ۳$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر یعنی سرعت گسترش آلودگی در $t = ۳$ بیشتر است.

پ) با رسم خط مماس در نقاط $t=۴$، $t=۵$ و $t=۶$ داریم:

شیب خط مماس در $t=۶$ $<$ شیب خط مماس در $t=۵$ $<$ شیب خط مماس در $t=۴$

بنابراین سرعت گسترش آلودگی در $t=۴$ بیشتر است.

۲۳ -

الف)
$$\text{آهنگ متوسط از ۰ تا ۱} = \frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰} = \frac{۳۰۰-۰}{۱} = ۳۰۰$$

$$\text{آهنگ متوسط از ۱ تا ۲} = \frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱} = \frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱} = ۱۸۰$$

$$\text{آهنگ متوسط از ۲ تا ۳} = \frac{N(۳)-N(۲)}{۳-۲} = \frac{۶۰۰-۴۸۰}{۱} = ۱۲۰$$

$$\text{آهنگ متوسط از ۳ تا ۴} = \frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳} = \frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱} = ۱۰۰$$

ب) شاید به این دلیل باشد که با گذشت زمان و تبلیغ زیاد، کالای مورد نظر در بین مردم عادی شده و میزان فروش کاهش می‌یابد.

۲۴ -

$$\text{سرعت متوسط در بازهٔ } [۰,۵] = \frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰} = \frac{۵^۲-۵+۱۰-۱۰}{۵} = \frac{۲۵-۵}{۵} = ۴\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای } V(t)=f'(t)=۲t-۱ \Rightarrow V(t)=۴ \Rightarrow ۲t-۱=۴ \Rightarrow t=۲/۵$$

۲۵ - سرعت متوسط توپ را در بازه‌های $[۰/۳, ۰/۴]$ و $[۰/۴, ۰/۵]$ یافته و میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{f(۰/۴)-f(۰/۳)}{۰/۴-۰/۳} = \frac{۱۶/۳-۱۵/۱}{۰/۱} = ۱۲\, m/s$$

$$\frac{f(۰/۵)-f(۰/۴)}{۰/۵-۰/۴} = \frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱} = ۱۱\, m/s$$

$$\text{سرعت توپ در } t=۰/۴ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = ۱۱/۵$$

۲۶ - در محاسبهٔ $f'(۵)$ و $f'(۱۰)$ چون مقادیر داده‌شده در جدول برای xهایی با فاصلهٔ یکسان از هرکدام است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰} = \dfrac{۷۰-۱۰۰}{۵} = -۶ \\ \dfrac{f(۱۰)-f(۵)}{۱۰-۵} = \dfrac{۵۵-۷۰}{۵} = -۳\end{array}\right\} \Rightarrow f'(۵) \approx \frac{-۶-۳}{۲} = -۴/۵$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(۱۰)-f(۵)}{۱۰-۵} = -۳ \\ \dfrac{f(۱۵)-f(۱۰)}{۱۵-۱۰} = \dfrac{۴۶-۵۵}{۵} = -۱/۸\end{array}\right\} \Rightarrow f'(۱۰) \approx \frac{-۳-۱/۸}{۲} = -۲/۴$$

چون فاصلهٔ $x=۱۰$ تا $x=۱۵$ کمتر از فاصلهٔ $x=۳۰$ تا $x=۱۵$ است، پس برای تخمین $f'(۱۵)$ داریم:

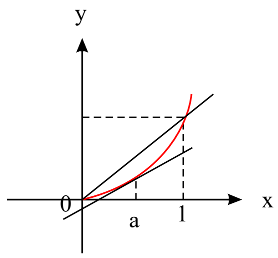
$$f'(۱۵) \approx \frac{f(۱۵)-f(۱۰)}{۱۵-۱۰} = \frac{۴۶-۵۵}{۵} = -۱/۸$$

برای تخمین $f'(۳۰)$ هم باید از مقادیر تابع در $x=۱۵$ و $x=۳۰$ استفاده کنیم که داریم:

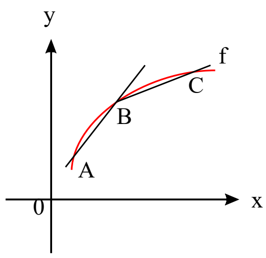
$$f'(۳۰) \approx \frac{f(۳۰)-f(۱۵)}{۳۰-۱۵} = \frac{۴۰-۴۶}{۱۵} = \frac{-۶}{۱۵} = -۰/۴$$

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار ترکیبی $f'(x)$	-۶	$-۴/۵$	$-۲/۴$	$-۱/۸$	$-۰/۴$

۲۷ - الف) نادرست، در شکل زیر شیب وتر OA از شیب مماس در نقطهٔ $x=a$ بیشتر است، یعنی آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[۰,۱]$ بیشتر از آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطهٔ $x=a$ است.



ب) نادرست، در شکل زیر تابع f صعودی است ولی شیب وتر BC از شیب وتر AB کمتر است یعنی با افزایش x، مقدار آهنگ تغییر متوسط کاهش می‌یابد.



پ) نادرست، می‌توان تابعی یافت که هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$ باشد مانند تابع $f(x)=(x-۲)^۳$ در نقطهٔ $x=۲$ که داریم:

$$f(x)=(x-۲)^۳ \Rightarrow f(۲)=۰$$
$$f'(x)=۳(x-۲)^۲ \Rightarrow f'(۲)=۰$$

۲۸ – الف)

$$m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$$
$$\left.\begin{array}{l} t=۳ \Rightarrow m(۳)=\sqrt{۳}+۲\times ۳^۳=۵۵/۷ \\ t=۴ \Rightarrow m(۴)=\sqrt{۴}+۲\times ۴^۳=۱۳۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta m=m(۴)-m(۳)=۱۳۰-۵۵/۷=۷۴/۳$$

جرم این توده ۷۴/۳ گرم افزایش می‌یابد.

ب) با محاسبهٔ مشتق تابع $m(t)$ بر حسب t داریم:

$$m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳ \Rightarrow m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲ \Rightarrow m'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۵۴$$
$$\Rightarrow m'(۳)=\frac{۱}{۲\times ۱/۷}+۵۴=۵۴/۲۹$$

۲۹ – الف)

$$V(t)=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲ \ , \ t=۰ \Rightarrow V(۰)=۴۰ \ , \ t=۱ \Rightarrow V(۱)=۴۰(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^۲=۳۹/۲۰۴$$
$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{V(۱)-V(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۹/۲۰۴-۴۰}{۱}=-۰/۷۹۶$$

چون با گذشت زمان حجم باقی‌مانده در ظرف کاهش می‌یابد، آهنگ متوسط تغییر حجم منفی به دست آمده است.

ب)

$$t=۰ \Rightarrow V(۰)=۴۰ \ , \ t=۱۰۰ \Rightarrow V(۱۰۰)=۴۰(۱-\frac{۱۰۰}{۱۰۰})^۲=۰$$
$$\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=-\frac{۲}{۵}$$
$$V'(t)=۴۰\times ۲\times(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱-\frac{t}{۱۰۰})=-\frac{۸۰}{۱۰۰}(۱-\frac{t}{۱۰۰})=-\frac{۴}{۵}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$
$$V'(t)=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow -\frac{۴}{۵}(۱-\frac{t}{۱۰۰})=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow ۱-\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{t}{۱۰۰} \Rightarrow t=۵۰$$

۳۰ –

الف

$$f(۰)=۰ \ , \ f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$$
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}x=۰$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

ب

$$f(۱)=۱\ ,\ f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۰}{x-۱}=۰$$

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{۱-x}{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-(x-۱)}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{x}=-۱$$

تابع در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است.

پ

$$f(۴)=۲\ ,\ f'_{-}(۴)=\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{x-۴}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$f'_{+}(۴)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{\frac{۱}{۲}x-۲}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{\frac{۱}{۲}(x-۴)}{x-۴}=\frac{۱}{۲}$$

تابع در $x=۴$ مشتق‌ناپذیر است.

۳۱ -

الف

$$f'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳\times ۲(۲x-۵)^{۲}(۳x^{۲}-۴)$$

ب

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

پ

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\times(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$$

ت

$$f'(x)=\frac{۹\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}=\frac{\frac{۱۸x+۹x-۲}{۲\sqrt{x}}}{x}=\frac{۲۷x-۲}{۲x\sqrt{x}}$$

۳۲ -

الف

$$f'(x)=۳\cos x\sin^{۲}x-۲\sin x\cos x$$

ب

$$f'(x)=\frac{-\cos x(۱+\sin x)-\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)^{۲}}=\frac{-۲\cos x}{(۱+\sin x)^{۲}}$$

پ

$$f'(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)\tan x+۲\sin x$$

ت

$$f'(x)=\cos x\cos ۲x-۲\sin ۲x\sin x$$