علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع $f(x)=|x|\sqrt[۳]{x^۳-x}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۲ - تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x-۱} & ; x\geq ۲\\ -x^۲+ax+b & ; x<۲\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

① -۲

② -۱

③ ۱

④ ۲

۳ - اگر $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+۱ & x\geq ۱\\ x^۳ & x<۱\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق پذیر باشد، (a,b) کدام است؟

① $(-۱,۱)$

② $(-۳,۳)$

③ $(۳,-۳)$

④ $(۲,-۲)$

۴ - به ازای کدام مقدار b، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۶}{\sqrt[۳]{x}} & x>۱\\ ax+b & x\leq ۱\end{cases}$ بر R مشتق پذیر است؟

① ۶

② ۸

③ ۴

④ ۱۲

۵ - اگر $f(x)=\begin{cases} x[x] & x<2 \\ ax^2+b & x\geq 2 \end{cases}$ در نقطه‌ای با طول ۲ مشتق‌پذیر باشد، ab کدام است؟

① ۱

② $\frac{1}{4}$

③ ۴

④ $\frac{3}{4}$

۶ - کدام بیان در مورد پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع درست است؟

① اگر تابعی در x_0 پیوسته نباشد، ممکن است مشتق‌پذیر باشد.

② اگر تابعی در x_0 پیوسته باشد، الزاماً در x_0 مشتق‌پذیر است.

③ اگر تابعی در x_0 مشتق‌پذیر باشد، ممکن است پیوسته نباشد.

④ اگر تابعی در x_0 مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در x_0 پیوسته است.

۷ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} bx^2-ax-1 & x\leq 1 \\ x^3 & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

① ۱

② صفر

③ -1

④ -2

۸ - اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^2-3x & , \ x<-1 \\ -x^2+bx-1 & , \ x\geq -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② صفر

③ -5

④ $\frac{3}{2}$

۹ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(5x-2)^2} & x\geq 2\\ ax+b & x<2\end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر است b کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{5}{3}$

۱۰ - کدام یک از توابع زیر در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\geq 1\\ x^4-x & x<1\end{cases}$

۲) $g(x)=(x+1)^2[x]$

۳) $h(x)=\begin{cases}4\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ -\sqrt{1-x} & x<1\end{cases}$

۴) $k(x)=|x|+\left|x^3+1\right|$

۱۱ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\geq 1\\ x^3-2x & x<1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر باشد. حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۱۳

۲) ۵

۳) ۲۶

۴) ۳۴

۱۲ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+2 & ; & x\geq 1\\ 16x-9 & ; & x<1\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ مشتق‌پذیر است. $a-b$ کدام است؟

۱) -17

۲) 17

۳) 10

۴) -10

۱۳ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۳} & x < ۲ \\ ax^{۲} - bx + ۱ & x \geq ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

① ۲۱

② $\frac{۸۵}{۴}$

③ ۲۲

④ $\frac{۴۳}{۲}$

۱۴ - اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^{۲} + bx + ۱ & x \geq ۲ \\ x^{۳} & x < ۲ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

① -۵

② $\frac{۱۷}{۴}$

③ $\frac{۱۳}{۲}$

④ $\frac{۸}{۳}$

۱۵ - اگر $f(x) = (x^{۳} - ۲)\,|x|$، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

① $f'(۰) = -۲$

② $f'_{+}(۰) = -۲$

③ $f'_{-}(۰) = -۲$

④ $f'(۱) = -۱$

۱۶ - اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x) = x^{۲}[x^{۲}]|x - ۲|$ در نقطه‌ی $x_۰ = ۲$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۳۲

② ۲۸

③ ۴

④ ۱۲

۱۷- اگر $f(x)=x^{۲}[x]$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ کدام است؟($[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

① $\circ$
② -۴
③ -۲
④ ۲

۱۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}$ مقدار $f'_+(۲)-f'_-(۲)$ کدام است؟

① -۱
② ۱
③ ۲
④ صفر

۱۹- در تابع $f(x)=|x-۲|x^{۲}$ مقدار $f'_-(۲)$ کدام است؟

① ۴
② -۴
③ ۸
④ -۸

۲۰- اگر $f(x)=[x]|x^{۲}-x-۲|$ باشد، حاصل $f'_+(-۲)-f'_-(۲)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۷
② ۱۲
③ ۱۳
④ ۱۸

۲۱ - اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{x[x]}{|۱-x|}}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\dfrac{۱}{۲}$

۲) ۲

۳) $-\dfrac{۱}{۲}$

۴) -۲

۲۲ - در تابع $f(x)=|۶x-x^{۲}|$، حاصل $f'_{+}(۶)-f'(۴)$ کدام است؟

۱) ۴

۲) -۴

۳) ۸

۴) -۸

۲۳ - مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt{-۲\sqrt{x}+۱+x}$ به‌ازای $x=\dfrac{۱}{۹}$ کدام است؟ ($۰<x<۱$)

۱) $-\dfrac{۲}{۳}$

۲) $-\dfrac{۳}{۲}$

۳) $\dfrac{۲}{۳}$

۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۲۴ - اگر $f(x)=\sqrt{۴-۲|x|}$، آنگاه حاصل $f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۴}$

۲) $\dfrac{۱}{۴}$

۳) ۱

۴) -۱

۲۵- اگر $f(x)=[x]|x^{۲}-x-۲|$، حاصل $f'_{+}(-۲)-f'_{-}(۲)$ کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳

(۴) ۱۸

۲۶- اگر $f(x)=(x-۱)\sqrt{۲x^{۳}+۶x^{۲}}$ باشد، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

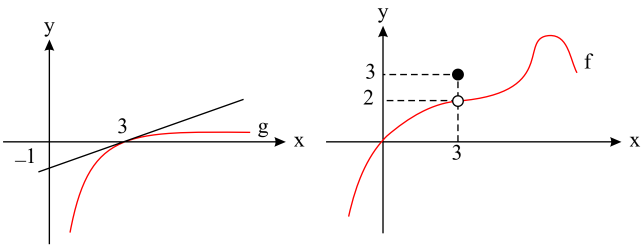
(۱) $-\sqrt{۲}$

(۲) $\sqrt{۲}$

(۳) $۲\sqrt{۲}$

(۴) ۲

۲۷- نمودار تابع f و g به‌صورت زیر است. مقدار مشتق تابع $f\circ g$ در $x=۳$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{۲}{۳}$

(۳) $\frac{۴}{۳}$

(۴) صفر

۲۸- مشتق دوم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۴)^{۲}\sqrt{x}$ در $x=۴$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱

۲۹- اگر $\lim\limits_{x\to -۴}\dfrac{f(x)-f(-۴)}{x+۴}=۳$ ، مشتق تابع $y=f(x^۳-۵x)$ در $x=۱$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) -۸

(۳) -۴۴

(۴) -۱۷۶

۳۰- اگر $g(۱)=g'(۱)=۲$, $f(x)=x^۲+x$ باشد، مشتق تابع fog در $x=۱$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۵

(۳) ۲۰

(۴) ۳۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(x)=|x|\cdot\sqrt[3]{x^3-x}=|x|\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x^2-1)}$$

$$f(x)=|x|\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$$

به‌ازای ریشه‌های زیر رادیکال و داخل قدرمطلق، ممکن است مشتق‌پذیر نباشد بنابراین ابتدا ریشه‌ها را می‌یابیم.

$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$ نقاط مشتق‌ناپذیر

عدد $x=0$ هم ریشهٔ زیر رادیکال و هم ریشهٔ قدرمطلق می‌باشد بنابراین در $x=0$ مشتق‌پذیر است، چون:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\sqrt[3]{x^3-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{x^3-x}=\lim_{x\to 0}\pm\sqrt{x^3-x}=0$$

بنابراین در دو نقطه مشتق ندارد.

۲ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=-4+2a+b\\ f(2)=1\end{cases}$$

پس $-4+2a+b=1$ و درنتیجه $2a+b=5$ است.

$$f'(2^+)=f'(2^-):\frac{-1}{(x-1)^2}=-2x+a\xrightarrow{x=2}-1=-4+a\Rightarrow a=3$$

$$\xrightarrow{2a+b=5}6+b=5\Rightarrow b=-1$$

۳ - گزینه ۳ تابع باید در $x=1$ پیوسته بوده و مشتق‌های راست و چپ در $x=1$ باهم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+bx+1)=a+b+1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^3=1\\ f(1)=a+b+1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=1\Rightarrow a+b=0\ (I)$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست و چپ}:\begin{cases}f'(1^+)=2ax+b=2a+b\\ f'(1^-)=3x^2=3\end{cases}\Rightarrow 2a+b=3\ (II)$$

از I و II نتیجه می‌شود که $a=3$ و $b=-3$ است.

۴ - گزینه ۲ سراغ نقطه‌ی مرزی $x=1$ می‌رویم: تابع در این نقطه باید پیوسته بوده و مشتق های راست و چپ آن برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}:\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{6}{1}=6\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=f(1)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=6$$

$$x>1\to f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}=6x^{-\frac{1}{3}}\to f'(x)=6(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}}\to f'(1^+)=-2$$

$$x<1\to f(x)=ax+b\to f'(x)=a\to f'(1^-)=a$$

پس: $a=-2\ ,\ b=8$

۵ - گزینه ۲

شرط مشتق پذیر بودن تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه، پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(ax^2+b)=4a+b\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}x\,[x]=2(1)=2\\ f(2)=4a+b\end{cases}\to 4a+b=2$$

تساوی مشتق های راست و چپ: $\begin{cases} f'_{+}(۲) = ۲ax = ۴a \\ f'_{-}(۲) = (x)' = ۱ \end{cases} \rightarrow ۴a = ۱ \rightarrow a = \dfrac{۱}{۴} \;,\; b = ۱ \;\rightarrow\; ab = \dfrac{۱}{۴}$

۶ - گزینه ۴ اگر تابعی در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در $x_{\circ}$ پیوسته است.

۷ - گزینه ۲ تابع باید در $x = ۱$ پیوسته باشد و در ضمن مشتق‌های راست و چپ آن نیز در $x = ۱$ باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x = ۱} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^{+}} x^{۳} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^{-}} (bx^{۲} - ax - ۱) = b - a - ۱ \\ f(۱) = b - a - ۱ \end{cases} \Longrightarrow b - a - ۱ = ۱ \rightarrow b - a = ۲ \;\; (I)$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ : $f'_{+}(۱) = f'_{-}(۱) \rightarrow ۳x^{۲} = ۲bx - a \rightarrow ۳ = ۲b - a \;\; (II)$

$I \;,\; II \rightarrow a = -۱, b = ۱ \rightarrow a + b = \circ$

۸ - گزینه ۲ شرط آنکه تابع f در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع در آن نقطه پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در آن نقطه باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x = -۱} \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۱)^{+}} (-x^{۲} + bx - ۱) = -۱ - b - ۱ = -b - ۲ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۱)^{-}} (ax^{۲} - ۳x) = a + ۳ \\ f(-۱) = -۱ - b - ۱ = -b - ۲ \end{cases} \Rightarrow a + ۳ = -b - ۲ \Rightarrow a + b = -۵$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ : $f'_{+}(-۱) = f'_{-}(-۱) \rightarrow -۲x + b = ۲ax - ۳ \rightarrow ۲ + b = -۲a - ۳ \rightarrow ۲a + b = -۵$

اگر با دو رابطه‌ی بدست آمده، تشکیل دستگاه دهیم $b = -۵, a = \circ$ حاصل می‌شود.

۹ - گزینه ۲ شرط مشتق پذیر بودن تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه، پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی :} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^{+}} \sqrt[۳]{(۵x - ۲)^{۲}} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^{-}} (ax + b) = ۲a + b \\ f(۲) = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲a + b = ۴$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ : $f'_{+}(۲) = f'_{-}(۲) \rightarrow \dfrac{۲(۵)}{۳\sqrt[۳]{۵x - ۲}} = a \rightarrow a = \dfrac{۵}{۳} \;,\; b = \dfrac{۲}{۳}$

۱۰ - گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x = a$ موجود، متناهی و با هم برابر باشند. برای این منظور به بررسی هر ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول : $\begin{cases} x \geq ۱ \rightarrow f'(x) = ۲x - ۱ \rightarrow f'(۱^{+}) = ۱ \\ x < \circ \rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} - ۱ \rightarrow f'(۱^{-}) = ۳ \end{cases} \rightarrow$ تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست

گزینه‌ی دوم : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^{+}} g(x) = ۴[۱^{+}] = ۴(۱) = ۴ \\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} g(x) = ۴[۱^{-}] = ۴(\circ) = \circ \end{cases} \rightarrow$ تابع در $x = ۱$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است

$$\text{گزینه‌ی سوم :} \begin{cases} x \geq ۱ \rightarrow f'(x) = ۴ \times \dfrac{۱}{۲\sqrt{x - ۱}} \rightarrow f'(۱^{+}) = +\infty \\ x < ۱ \rightarrow f'(x) = -\dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱ - x}} \rightarrow f'(۱^{-}) = +\infty \end{cases}$$

در $x = ۱$ مشتق‌های راست و چپ نامتناهی هستند پس مشتق‌پذیر نیست.

گزینه‌ی چهارم: در همسایگی $x = ۱$ تابع $k(x)$ به صورت $k(x) = x + x^{۳} + ۱$ در می‌آید که پیوسته است و مشتق آن در $x = ۱$ می‌شود:

$k'(x) = ۱ + ۳x^{۲} \rightarrow k'(۱) = ۱ + ۳ = ۴$

۱۱ - گزینه ۱ شرط آنکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که: ۱) تابع در $x = a$ پیوسته باشد. ۲) مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^{+}} (ax^{۲} + bx) = a + b \\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^{-}} (x^{۳} - ۲x) = ۱ - ۲ = -۱ \\ f(۲) = a + b \end{cases} \Rightarrow \; a + b = -۱$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ: $\begin{cases} f'(۱^{+}) = ۲ax + b = ۲a + b \\ f'(۱^{-}) = ۳x^{۲} - ۲ = ۳ - ۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a + b = ۱$

$$\begin{cases} a + b = -۱ \\ ۲a + b = ۲ \end{cases} \rightarrow \; a = ۲ \;,\; b = -۳ \rightarrow \; a^{۲} + b^{۲} = ۴ + ۹ = ۱۳$$

۱۲ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\underset{\text{شرط پیوستگی}}{x=۱}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(ax^۲+bx+۲)=a+b+۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۱۶x-۹)=۱۶-۹=۷\quad\Rightarrow\ a+b+۲=۷\Rightarrow a+b=۵\\ f(۱)=a+b+۲\end{cases}$$

$$f'(۱^+)=f'(۱^-)\to ۲ax+b=۱۶\to ۲a+b=۱۶$$

پس : $\begin{cases}a+b=۵\\ ۲a+b=۱۶\end{cases}\to a=۱۱\,,\,b=-۶\to a-b=۱۷$

۱۳ - گزینه ۲ شرط مشتق پذیر بودن تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

شرط پیوستگی : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۲-bx+۱)=۴a-۲b+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}x^۳=۸\\ f(۲)=۴a-۲b+۱\end{cases}\Rightarrow ۴a-۲b+۱=۸\Rightarrow ۴a-۲b=۷$

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\to ۲ax-b=۳x^۲\to ۴a-b=۱۲$$

$$\begin{cases}۴a-۲b=۷\\ ۴a-b=۱۲\end{cases}\to a=\frac{۱۷}{۴}\ ,\ b=۵\to ab=\frac{۸۵}{۴}$$

۱۴ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که: ۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد. ۲) مشتق‌های راست و چپ در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

شرط پیوستگی : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۲+bx+۱)=۴a+۲b+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}x^۳=۸\\ f(۲)=۴a+۲b+۱\end{cases}\to ۴a+۲b+۱=۸\to ۴a+۲b=۷$

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\to ۲ax+b=۳x^۲\to ۴a+b=۱۲\xrightarrow{۴a+۲b=۷}a=\frac{۱۷}{۴}\ ,\ b=-۵$$

۱۵ - گزینه ۲ توابع قدرمطلقی در ریشه‌ی غیرمکرر داخل قدرمطلق مشتق ناپذیر هستند بنابراین تابع داده شده در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است بنابراین گزینه‌ی اول نادرست است.

$$f(x)=(x^۳-۲)\,|x|=\begin{cases}x^۴-۲x & x\geq ۰\\ -x^۴+۲x & x<۰\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}۴x^۳-۲ & x>۰\\ -۴x^۳+۲ & x<۰\end{cases}$$

$$f'_+(۰)=۴(۰)-۲=-۲,\ f'_-(۰)=-۴(۰)+۲=۲\,,\ f'(۱)=۴(۱)-۲=۲$$

بنابراین گزینه‌ی دوم صحیح است.

۱۶ - گزینه ۲ تابع در $x=۲$ پیوسته است بنابراین در ۲ $x=$ مشتق پذیر است (علت پیوستگی: $(f(۲)=۰,\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۰$

برای محاسبه‌ی مشتق، ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت و جزء صحیح را تعیین عددی می‌کنیم و سپس مشتق می گیریم:

$$x\to ۲^+ : f(x)=x^۲[۴^+](x-۲)=۴x^۲(x-۲)\xrightarrow[\text{یعنی جمله‌ی } (x-۲) \text{ مشتق می‌گیریم}]{\text{فقط از عامل صفرشونده}} f'_+(۲)=(x-۲)'\times ۴x^۲=۴(۲)^۲=۱۶$$

$$x\to ۲^- : f(x)=x^۲[۴^-](-(x-۲))=-۳x^۲(x-۲)$$

$$\xrightarrow[\text{یعنی جمله‌ی } (x-۲) \text{ مشتق می‌گیریم}]{\text{فقط از عامل صفرشونده}} f'_-(۲)=(x-۲)'\times(-۳x^۲)=-۳(۲)^۲=-۱۲$$

بنابراین اختلاف مشتق‌های راست و چپ برابر ۲۸ می‌باشد.

۱۷ - گزینه ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲[x]-۱}{x-۱}\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'_+(۱)\xrightarrow{[۱^+]=۱}f(x)=x^۲\to f'(x)=۲x\to f'_+(۱)=۲$

۱۸ - گزینه ۳

$$f(x)=x^۲+\sqrt{x^۲-۴x+۴}\to f(x)=x^۲+\sqrt{(x-۲)^۲}\to f(x)=x^۲+|x-۲|$$

$$x=۲^+ : f(x)=x^۲+x-۲\to f'_+(۲)=۲x+۱=۵$$

$$x=۲^- : f(x)=x^۲-x+۲\to f'_-(۲)=۲x-۱=۳$$

پس $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۵-۳=۲$

۱۹ - گزینه ۲ ابتدا قدر مطلق را با توجه به علامت عبارت داخل آن حذف می‌کنیم:

$$x<۲\to f(x)=(۲-x)x^۲=۲x^۲-x^۳\Rightarrow f'(x)=۴x-۳x^۲\Rightarrow f'_-(۲)=۸-۱۲=-۴$$

۲۰ - گزینه ۳

$$f(x)=[x]|(x-۲)(x+۱)|$$

$$x\to(-۲)^+ : f(x)=(-۲)(x-۲)(x+۱)=-۲x^۲+۲x+۴\to f'(x)=-۴x+۲\to f'_+(-۲)=-۴(-۲)+۲=۱۰$$

$x \to 2^- : f(x) = -(1)(x-2)(x+1) = -x^2+x+2 \to f'(x) = -2x+1 \to f'_-(2) = -2(2)+1 = -3$

پس: $f'_+(-2) - f'_-(2) = 10 - (-3) = 13$

۲۱ - گزینه ۳ توجه کنید که $f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ است و توجه کنید که $[2^+] = 2$ است و داخل قدرمطلق یعنی $x-1$ وقتی $x\to 2^+$، منفی است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1\left(\frac{2(x-1)-1(2x)}{(x-1)^2}\right)}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$$

$$\longrightarrow f'(2^+) = \frac{\left(\frac{2-4}{1}\right)}{2\sqrt{4}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

۲۲ - گزینه ۳ $f(x) = |x(6-x)|$ است در $x=4$ داخل قدرمطلق منفی و در همسایگی راست $x=6$ داخل قدرمطلق مثبت است.

درنتیجه ضابطهٔ تابع در نقطهٔ $x=4$ برابر است با:

$$f(x)=|6x-x^2| = 6x-x^2 \Rightarrow f'(x)=6-2x \Rightarrow f'(4)=6-8=-2$$

همچنین زمانی که در همسایگی راست نقطهٔ $x=6$ قرار داریم، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=|6x-x^2| = x^2-6x \Rightarrow f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'_+(6)=12-6=6$$

بنابراین:

$$f'_+(6)-f'(4)=6-(-2)=8$$

۲۳ - گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}=\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}=|\sqrt{x}-1| \xrightarrow[\text{داخل قدر مطلق منفی}]{0<x<1} f(x)=1-\sqrt{x}$$

پس: $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$

۲۴ - گزینه ۳

$$x\ge 0 \to f(x)=\sqrt{4-2x} \to f'(x)=\frac{1(-2)}{2\sqrt{4-2x}} \to f'(0^+)=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$x<0 \to f(x)=\sqrt{4+2x}\to f'(x)=\frac{1(2)}{2\sqrt{4+2x}} \to f'(0^-)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

پس: $f'_-(0)-f'_+(0)=\frac{1}{2}-(\frac{-1}{2})=1$

۲۵ - گزینه ۳ ابتدا تکلیف قدرمطلق و جزء صحیح را در نقاط داده‌شده مشخص می‌کنیم.

$$x\to(-2)^+ : \begin{cases}[x]=[(-2)^+]=-2\\ |\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}| = x^2-x-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x^2+2x+4 \Rightarrow f'(x)=-4x+2\Rightarrow f'_+(-2)=10$$

$$x\to 2^- : \begin{cases}[x]=[2^-]=1\\ |\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}|=-x^2+x+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^2+x+2 \Rightarrow f'(x)=-2x+1\Rightarrow f'_-(2)=-3$$

پس: $f'_+(-2)-f'_-(2)=10-(-3)=13$

۲۶ - گزینه ۳ $x-1$ به‌ازای $x=1$، صفر می‌شود پس فقط کافی است از $x-1$ مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت، $x=1$ را جایگزین کنیم.

$f(x)=(x-۱)\sqrt{۲x^۳+۶x^۲} \to f'(۱)=۱\times\sqrt{۲+۶}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

۲۷ – گزینه ۲ وقتی عبارتی شامل صفر باشد یعنی به‌صورت ضرب $(x-a)$ در بقیهٔ عوامل باشد آنگاه برای محاسبهٔ مشتق در $x=a$ کافی است فقط از عامل صفر مشتق بگیریم و در حد بقیهٔ عوامل غیرصفر در نقطهٔ مورد نظر ضرب کنیم.

چون $g(۳)=۰$ است کافی است $g'(۳)$ که شیب خط مماس گذرنده از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ را به‌دست آوریم و در $\lim\limits_{x\to۳}f(x)$ ضرب کنیم.

$$\begin{cases} g'(۳)=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{-۱-۰}{۰-۳}=\dfrac{۱}{۳} \\ \lim\limits_{x\to۳}f(x)=۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\times۲=\frac{۲}{۳}$$

۲۸ – گزینه ۲ کافی است از عامل صفر شونده که از مرتبه‌ی دوم هست دو بار مشتق بگیریم و سپس $x=۴$ را جایگزین کنیم.

$$(x-۴)^۲ \xrightarrow{\text{مشتق}} ۲(x-۴) \xrightarrow{\text{مشتق}} ۲ \to f''(۲)=۲\sqrt{۴}=۲(۲)=۴$$

۲۹ – گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\\ y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)\end{array}}$

$$\lim_{x\to-۴}\frac{f(x)-f(-۴)}{x+۴}=۳\to f'(-۴)=۳$$

$$y=f(x^۳-۵x)\to y'=(۳x^۲-۵)f'(x^۳-۵x)\to y'(۱)=-۲f'(-۴)=-۲(۳)=-۶$$

۳۰ – گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=fog(x)\to y'=g'(x)\cdot f'(g(x))}$

مشتق $fog(x)=(f(g(x)))'=g'(x)\cdot f'(g(x)) \xlongequal{x=۱} g'(۱)\cdot f'(g(۱))=۲f'(۲)$

$$f(x)=x^۲+x\to f'(x)=۲x+۱\to f'(۲)=۵\to ۲f'(۲)=۱۰$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۱
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۱