نام آزمون: مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر $f(x)=x^{۲}[x^{۲}]$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

(۱) $۲\sqrt{۲}$

(۲) $-۲\sqrt{۲}$

(۳) $۴\sqrt{۲}$

(۴) $-۴\sqrt{۲}$

۲- مشتق مرتبهٔ دوم تابع $f(x)=(۲x-۱)^{۲}\sqrt{x+\dfrac{۱}{۲}}$ در $x=\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱۶

۳- اگر $f(x)=x\sqrt[۳]{x}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $y=f'of(x)$ در $x=۱$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۴}{۳}$

(۲) $\dfrac{۴}{۹}$

(۳) $\dfrac{۱۶}{۲۷}$

(۴) $\dfrac{۱۶}{۹}$

۴- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱)-f(۱+h)}{۳h}=۲$ باشد، مشتق تابع $y=۳f(x^{۲}+۳x+۱)$ در $x=۰$ کدام است؟

(۱) -۲۴

(۲) -۱۸

(۳) -۷۲

(۴) -۵۴

۵- اگر $\frac{۱}{۲} = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ و $g(x) = f(\frac{۱}{x^۲})$ باشند، آن‌گاه $g'(-۱)$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$

② $\frac{۱}{۴}$

③ $\frac{۱}{۲}$

④ ۱

۶- اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و داشته باشیم ۲ $= \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۱)-f(۱-h)}{h}$ ، مقدار مشتق $y = f(\frac{۱}{x^۲})$ در $x = ۱$ کدام است؟

① ۴

② -۴

③ ۸

④ -۸

۷- اگر $f(x) = \frac{x^۳+x}{x+۱}$، حاصل $f''(۱)$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$

② $\frac{۳}{۲}$

③ $-\frac{۱}{۲}$

④ ۱

۸- در نقطه‌ای با کدام طول، خط مماس بر نمودار تابع $y = x^۲ - ۳x + ۲$ موازی خط گذرابر دو نقطه‌ی $(۱,۴)$ و $(۳,۲)$ است؟

① -۲

② -۱

③ ۱

④ ۲

۹- خط مماس بر منحنی $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$، بر خط $x - ۳y = ۲$ عمود است. کدام نقطه روی این خط مماس قرار دارد؟

(۱) (۳ و ۱)

(۲) (۴ و ۱)

(۳) (−۴ و ۲)

(۴) (−۶ و ۲)

۱۰- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x^۲ + ۳x}$ در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $-\frac{۳}{۵}$

(۲) $\frac{۳}{۴}$

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) ۲

۱۱- مشتق تابع $y = f(\sqrt[۳]{۶x + ۲})$ در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ برابر -۲ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

(۱) -۴

(۲) $\frac{۱}{۳}$

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۲- معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = x^۳ - ۵x^۲ + ۷x + ۱$ در $x = ۱$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y = x^۲ - ۵x + ۶$ جدا می کند؟

(۱) $\sqrt{۱۷}$

(۲) $\sqrt{۱۳}$

(۳) $\sqrt{۱۱}$

(۴) $\sqrt{۱۹}$

۱۳- منحنی $f(x)=\dfrac{x+a}{x+1}$ بر منحنی $g(x)=x^2+b$ در $x=1$ مماس است. b کدام است؟

① -3

② -4

③ -7

④ -5

۱۴- خط $f(x)=2x-5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع $g(x)=ax^2+bx+1$ مماس است. مقدار a کدام است؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۶

۱۵- اگر نمودارهای دوتابع با ضابطه‌های $y=2x+b$ و $y=ax^2+bx-3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع باشند، a کدام است؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۵

۱۶- نمودارهای دو تابع $y=2x^2+ax+b$ و $y=2x+b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر روی محور xها متقاطع اند. a کدام است؟

① -2

② -1

③ ۳

④ ۴

۱۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y=-2x+b$، در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟

① ۲ و -1

② ۳ و -1

③ -1 و صفر

④ ۲ و صفر

۱۸ – به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 1$ با خط $g(x) = mx$ تقاطع ندارد؟

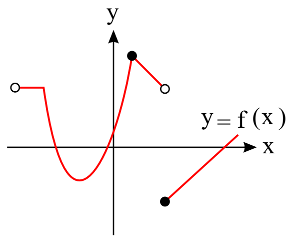
① $0 \le m \le 4$

② $0 \le m < 4$

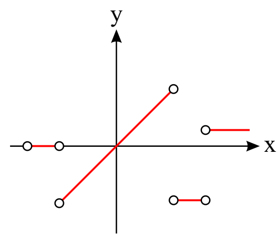
③ $m > 4$ یا $m < 0$

④ $m \ge 0$

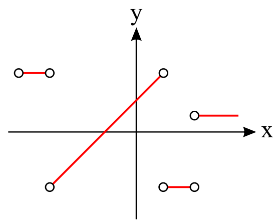
۱۹ – با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f' باشد؟



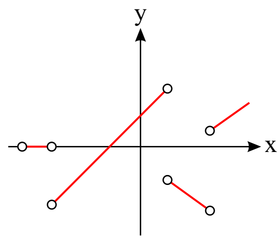
①



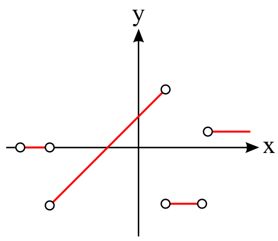
②



③



④



۲۰ – کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1| & x > 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$ صحیح است؟

① تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

② تابع در فاصلهٔ $(-\infty, 0]$ مشتق‌پذیر است.

③ $f'_-(0) = f'_+(0) = -1$ است.

④ تابع در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

۲۱ - تابع $f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \geq -۱ \\ |(x-۲)(x+۳)^۲| & x < -۱ \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۲ - تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\sqrt{x}} & , x \geq ۱ \\ bx^۳ - x + ۶ & , x < ۱ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $a-b$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۳ - مساحت ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات و خط نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-۱} & ; x \geq ۱ \\ -۲x^۲ + ۲ & ; x < ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۱$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۲

۲۴ - اگر نیم‌مماس راست و نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |ax^۲ - ۴a|$ در $x = ۲$ برهم عمود باشند، a کدام است؟

(۱) $\pm\frac{۱}{۲}$

(۲) $\pm\frac{۱}{۴}$

(۳) ±۲

(۴) ±۴

۲۵ - به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۳x+۷ & x\geq a \\ x^{۲}+۹ & x<a \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است؟

① $\{۱,۲\}$

② $\{۲\}$

③ $\{۱\}$

④ هیچ مقدار a

۲۶ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x+۱ & ,\ -۲\leq x<۰ \\ \sqrt[۳]{x-۱} & ,\ ۰\leq x<۲ \\ [x]-۱ & ,\ ۲\leq x\leq ۴ \end{cases}$ در دامنهٔ خود در کدام نقاط مشتق‌ناپذیر است؟

① $\{-۱,۰,۱,۲\}$

② $\{۰,\frac{۱}{۲},۲,۳,۴\}$

③ $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$

④ $\{۱,\frac{۱}{۲},۲,۳\}$

۲۷ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+۲ & ,\ x\geq ۱ \\ x^{۳}-bx & ,\ x<۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

① -۱۵

② -۱

③ ۱۵

④ ۱

۲۸ - در مورد تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

① $f'(۰)=۰$

② $f'(۰)=+\infty$

③ $f'_{+}(۰)=+\infty$

④ $f'_{+}(۰)=-\infty$

۲۹ - مقادیر مشتق چپ و راست کدام تابع در $x = -۲$ موجود و نابرابر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \geq -۲ \\ ۴x & x < -۲ \end{cases}$

(۲) $g(x) = x|x-۲|$

(۳) $h(x) = x[x]$

(۴) $i(x) = (x+۲)[x]$

۳۰ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+۲}{x+a} & x > ۰ \\ \sqrt{x^{۲}+b} + \dfrac{x}{۸} & x \leq ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه b کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{۱}{۴}$

(۳) $\frac{۱}{۲}$

(۴) ۱

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(f(u))' = u' \cdot f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to ۰^-}\frac{f'(\sqrt{۲}-h)}{۱} = f'((\sqrt{۲})^+)$$
$$x \to (\sqrt{۲})^+ \Rightarrow f(x)=x^۲[۲^+] = ۲x^۲ \to f'(x)=۴x \to f'((\sqrt{۲})^+) = ۴\sqrt{۲}$$

۲ - گزینه ۳ عبارت $(۲x-۱)^۲$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$، صفر می‌شود بنابراین برای محاسبهٔ $f''(\frac{۱}{۲})$ کافی است از این عامل صفرشونده ۲ بار مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت، $x=\frac{۱}{۲}$ را جایگزین کنیم.

$$(۲x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{مشتق}} ۲(۲x-۱)(۲) \xrightarrow{\text{مشتق}} ۸$$

پس: $f''(\frac{۱}{۲}) = ۸\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}} = ۸$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم $f(x)=x\sqrt[۳]{x}=x^{\frac{۴}{۳}}$ است در نتیجه $f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$ می‌باشد.

حالا $f'of(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(f(x)) = f'(x^{\frac{۴}{۳}}) = \frac{۴}{۳}(x^{\frac{۴}{۳}})^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۹}}$$

مشتق $f'of$ برابر است با:

$$(\frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۹}})' = \frac{۱۶}{۲۷}x^{\frac{۴}{۹}-۱} = \frac{۱۶}{۲۷}x^{-\frac{۵}{۹}} \xrightarrow{x=۱} (f'of)'(۱) = \frac{۱۶}{۲۷}$$

۴ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱+h)}{۳h} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to ۰}\frac{-f'(۱+h)}{۳} = \frac{-f'(۱)}{۳} = ۲ \to f'(۱) = -۶$$
$$y=۳f(x^۲+۳x+۱)\to y'=۳(۲x+۳)f'(x^۲+۳x+۱) \xrightarrow{x=۰} y'=۹f'(۱)=۹(-۶)=-۵۴$$

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h} = \frac{۱}{۲} \to f'(۱) = \frac{۱}{۲}$$
$$g(x)=f(\frac{۱}{x^۲}) \to g'(x) = \frac{-۲x}{x^۴}f'(\frac{۱}{x^۲}) \to g'(-۱) = \frac{۲}{۱}f'(۱) = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱-h)}{h} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to ۰}\frac{f'(۱-h)}{۱} = f'(۱) = ۲$$
$$(f(\frac{۱}{x^۲}))' = (\frac{۱}{x^۲})' \times f'(\frac{۱}{x^۲}) = (\frac{-۲}{x^۳}) \times f'(\frac{۱}{x^۲}) \xrightarrow{x=۱} \frac{-۲}{(۱)^۳} \times f'(۱) = -۲f'(۱) \overset{f'(۱)=۲}{=\!=\!=} -۲\times ۲ = -۴$$

۷ - گزینه ۲ ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x & x+۱ \\ \cline{2-2} & x^۲-x+۲ \\ \underline{-x^۳-x^۲} & \\ -x^۲+x & \\ \underline{x^۲+x} & \\ ۲x & \\ \underline{-۲x-۲} & \\ -۲ & \end{array}$$

$$\to f(x) = x^۲-x+۲-\frac{۲}{x+۱} = x^۲-x+۲-۲(x+۱)^{-۱}$$

مشتق اول تابع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x-۱-۲(-۱)(x+۱)^{-۲} = ۲x-۱+۲(x+۱)^{-۲}$$

مشتق دوم تابع، با مشتق‌گیری از f' به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f''(x)=2+2(-2)(x+1)^{-3}=2-4(x+1)^{-3}=2-\frac{4}{(x+1)^3}$$

با جایگذاری $x=1$ در عبارت بالا، داریم:

$$f''(1)=2-\frac{4}{8}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۸ - گزینه ۳ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4-2}{1-3}=-1\xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}}=-1$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر -1 قرار دهیم.

$$y'=-1\to 2x-3=-1\to 2x=2\to x=1$$

۹ - گزینه ۴

$$x-3y=2\to m_{\text{خط}}=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}}=-3$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی -3 قرار دهیم.

$$y'=3x^2+6x=-3\Rightarrow 3x^2+6x+3=0\Rightarrow x^2+2x+1=(x+1)^2=0$$
$$\Rightarrow x=-1\xrightarrow{\text{تابع}} y=-1+3+1=3$$

حال معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.,\ m=-3\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1): y-3=-3(x+1)\Rightarrow y=-3x$$

فقط مختصات نقطهٔ گزینه‌ی چهارم در معادله این خط صدق می‌کند.

۱۰ - گزینه ۲

$$1)\ x=1\to y=\sqrt{4}=2\to A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$
$$2)\ y'=\frac{1(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x}}\to m_{\text{مماس}}=\frac{5}{4}$$
$$3)\ y-2=\frac{5}{4}(x-1)\xrightarrow{x=0} y-2=-\frac{5}{4}\to y=\frac{3}{4}$$

۱۱ - گزینه ۱

می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار f در $x=a$، $f'(a)$ است.

داریم:

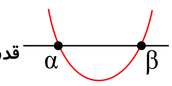
$$y=f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\Rightarrow y'=\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'(\sqrt[3]{6x+2})\xrightarrow{x=1} y'=\frac{6}{12}f'(2)=-2\Rightarrow f'(2)=-4$$

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

$$1)\ x=1\xrightarrow{\text{تابع}} y=1-5+7+1=4\to A\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$$
$$2)\ y'=3x^2-10x+7\to m_{\text{مماس}}=3-10+7=0$$
$$3)\ y-4=0(x-1)\to y=4:\ \text{معادله‌ی خط مماس}$$

اکنون برای محاسبه‌ی طول وتری که خط $y=4$ روی سهمی داده شده ایجاد می‌کند باید معادله‌ی تلاقی را تشکیل دهیم.

$$x^2-5x+6=4\to x^2-5x+2=0:\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که طول وتر ایجاد شده 

قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی تلاقی است.

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|1|}=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$$

۱۳ - گزینه ۲ اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند، آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است.

$$f(1)=g(1)\to\frac{1+a}{1+1}=1+b\to 1+a=2+2b\to a-2b=1$$
$$f'(1)=g'(1)\to\frac{1(x+1)-1(x+a)}{(x+1)^2}=2x\to\frac{2-(1+a)}{4}=2\to 1-a=8$$
$$\to a=-7,\ b=-4$$

۱۴ - گزینه ۴ هرگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آنگاه $\begin{cases}f(a)=g(a)\\f'(a)=g'(a)\end{cases}$ است.

$$\begin{cases} f(۱)=g(۱)\Rightarrow ۲-۵=a+b+۱\Rightarrow a+b=-۴\\ f'(۱)=g'(۱)\Rightarrow ۲=۲ax+b\Rightarrow ۲a+b=۲\end{cases}\Rightarrow a=۶\ ,\ b=-۱۰$$

۱۵ – گزینه ۴

چون دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند، پس مختصات این نقطه‌ی مشترک ($A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$) در هر دو تابع صدق می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=۲x+b}۰=-۲+b\to b=۲$$

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=ax^۲+bx-۳}۰=a+۲(-۱)-۳\to a=۵$$

۱۶ – گزینه ۱ کافی‌است نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ را در دو تابع صدق دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=۲x+b}۰=۴+b\ \Rightarrow\ b=-۴$$

$$A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=۲x^۲+ax+b}۰=۸+۲a+b\ \Rightarrow\ ۰=۸+۲a-۴\ \Rightarrow\ a=-۲$$

۱۷ – گزینه ۳ چون نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+۲x=b$ در نقطه‌ای به طول یک روی محور xها متقاطع هستند پس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ در ضابطه‌ی تابع و خط صدق می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^۳+ax+b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\۰\end{smallmatrix}\right.}۰=۱+a+b\\ y+۲x=b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\۰\end{smallmatrix}\right.}۰+۲=b\end{matrix}\right\}\to b=۲\ ,\ a=-۳$$

برای پیدا کردن طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر منحنی و خط، باید آنها را تلاقی دهیم.

$$x^۳+ax+b=b-۲x\xrightarrow{a=-۳\ ,\ b=۲}x^۳-۳x+۲=۲-۲x$$

$$\to x^۳-x=۰\to x(x^۲-۱)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

۱۸ – گزینه ۲ دو تابع را تلاقی می‌دهیم و معادلهٔ تلاقی نباید ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

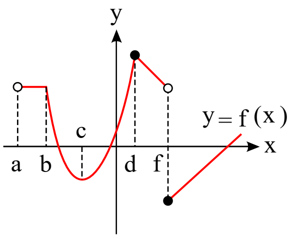
$$\begin{cases}f(x)=mx^۲+۱\\g(x)=mx\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}mx^۲+۱=mx\longrightarrow mx^۲-mx+۱=۰:\ \text{معادلهٔ تلاقی}$$

$$\Delta<۰\longrightarrow b^۲-۴ac<۰\longrightarrow m^۲-۴m<۰\longrightarrow m(m-۴)<۰$$

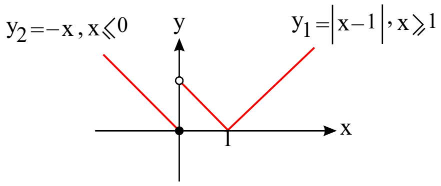
$$\longrightarrow\begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & ۰ & & ۴ & & +\infty\\ \hline \text{عبارت}<۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}\longrightarrow ۰<m<۴$$

توجه کنید اگر $m=۰$ باشد دو تابع به‌صورت $f(x)=۱$ و $g(x)=۰$ در می‌آیند که هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند بنابراین $۰\le m<۴$ است.

۱۹ – گزینه ۴ در نقاط $\{b,d,f\}$ مشتق نداریم. در نقطهٔ $\{c\}$ مشتق باید صفر باشد، طول نقطهٔ c منفی است در بازهٔ a تا b مشتق صفر است، چون شیب صفر است. در بازهٔ b تا c تابع نزولی و $f'<۰$، در بازهٔ c تا d تابع صعودی و $f'>۰$، در بازهٔ d تا f تابع نزولی $f'<۰$ و در بازهٔ $(f,+\infty)$ تابع صعودی و $f'>۰$ است. در بازه‌های d تا f و f تا $+\infty$ تابع خطی است لذا f' ثابت است.



۲۰ – گزینه ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم. مطابق شکل تابع در $x=۰$ از راست پیوسته نیست پس $f'_+(۰)$ موجود نیست و تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند.) به‌علاوه در $x=۱$ نقطهٔ گوشه داریم و تابع نمی‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر باشد (گزینهٔ ۴ حذف می‌شود.) در $x=۰$ مشتق چپ وجود دارد پس اگرچه $f'(۰)$ موجود نیست ولی تابع، در فاصلهٔ $(-\infty,۰]$ مشتق‌پذیر است.



۲۱ – گزینه ۲ در توابع چندضابطه‌ای باید مشتق‌پذیری‌های تک تک ضابطه‌ها را بررسی کرده و مشتق‌پذیری نقطهٔ مرزی را هم بررسی کنیم.

در مورد ضابطهٔ بالایی واضح است که در دامنه‌اش در همه‌جا مشتق‌پذیر است. اما درمورد ضابطهٔ پایینی، می‌دانیم که توابع قدرمطلقی در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، مشتق‌ناپذیرند. پس:

$$y_۲ = |(\underbrace{x-۲}_{\substack{x=۲ \\ \text{ریشهٔ ساده}}})(\underbrace{x+۳}_{\substack{x=-۳ \\ \text{ریشهٔ مضاعف}}})^۲|$$

لذا این تابع فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x = ۲$ دارد که آن هم جزء دامنهٔ این ضابطه $(x < -۱)$ نیست. پس این ضابطه هم هیچ نقطهٔ مشتق‌ناپذیری ندارد. نهایتاً می‌رسیم به بررسی نقطهٔ مرزی یعنی $x = -۱$، ابتدا پیوستگی را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-۱) = \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^+} x^۳ = (-۱)^۳ = -۱ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} |(x-۲)(x+۳)^۲| = |(-۱-۲)(-۱+۳)^۲| = ۱۲ \end{cases}$$

پس تابع در این نقطه پیوسته نیست و قطعاً مشتق‌ناپذیر است. لذا تابع فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۲۲ – گزینه ۴ شرط این‌که تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x = a$ باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x = ۱} \begin{cases} \lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^+} \dfrac{ax+b}{\sqrt{x}} = a+b \\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^-} (bx^۳ - x + ۶) = b+۵ \Rightarrow a+b = b+۵ \Rightarrow a = ۵ \\ f(۱) = a+b \end{cases}$$

از طرفی: $f'(۱^+) = f'(۱^-) \to \dfrac{a(\sqrt{x}) - \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(ax+b)}{x} = ۳bx^۲ - ۱$

$$\xrightarrow[x=۱]{a=۵} \frac{۵ - \dfrac{۱}{۲}(۵+b)}{۱} = ۳b - ۱ \to ۵ - \frac{۵}{۲} - \frac{b}{۲} = ۳b - ۱ \to \frac{۷b}{۲} = \frac{۷}{۲} \to b = ۱$$

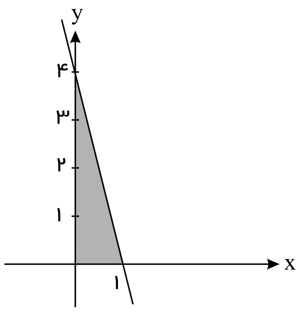
پس $a - b = ۵ - ۱ = ۴$ است.

۲۳ – گزینه ۴ شیب نیم‌مماس چپ در $x = ۱$ برابر با مشتق چپ در این نقطه است، پس داریم:

$$f'(۱^-) = -۴x = -۴ \to \begin{cases} A \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix} \right. \\ m = -۴ \end{cases} \to y - ۰ = -۴(x-۱) \to y = -۴x + ۴$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x = ۰ \to y = ۴, y = ۰ \to x = ۱$$



$$\to S = \frac{۴ \times ۱}{۲} = ۲$$

۲۴ – گزینه ۲

$$f'_+(۲) = \lim_{x\to۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to۲^+} \frac{|ax^۲ - ۴a| - ۰}{x-۲} = \lim_{x\to۲^+} \frac{|a|\overbrace{|x-۲|}^{+}\overbrace{|x+۲|}^{+}}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to۲^+} \frac{|a|(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = ۴|a|$$

$$f'_-(۲) = \lim_{x\to۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to۲^-} \frac{|a|\overbrace{|x-۲|}^{-}\overbrace{|x+۲|}^{+}}{x-۲} = \lim_{x\to۲^-} \frac{|a|(-x+۲)(x+۲)}{x-۲} = -۴|a|$$

چون قرار است دو نیم‌مماس برهم عمود باشند، پس باید شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم باشد.

$$\Rightarrow f'_+(۲)f'_-(۲) = -۱ \Rightarrow (۴|a|)(-۴|a|) = -۱ \Rightarrow ۱۶|a|^۲ = ۱ \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۴}$$

۲۵ - گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که:

۱) تابع f در $x = a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند:

$$\text{شرط پیوستگی:}\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+}(۳x+۷) = ۳a+۷ \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(x^۲+۹) = a^۲+۹ \\ f(a) = ۳a+۷ \end{cases} \to a^۲+۹ = ۳a+۷$$

$$\to a^۲ - ۳a + ۲ = ۰ \to (a-۱)(a-۲) = ۰ \to a = ۱, a = ۲$$

$$a = ۱ \to \begin{cases} f'(۱^+) = ۳ \\ f'(۱^-) = ۲x = ۲ \end{cases} \quad , \quad a = ۲ \to \begin{cases} f'(۲^+) = ۳ \\ f'(۲^-) = ۲x = ۴ \end{cases}$$

چون مشتق‌های راست و چپ در هر دو حالت با هم برابر نمی‌باشند پس تابع به ازای هیچ مقدار a در R مشتق‌پذیر نیست.

۲۶ - گزینه ۳ ۱- بررسی ضابطه‌ها:

ضابطهٔ اول که $(x+۱)^۲$ بوده و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و ضابطهٔ دوم $\sqrt[۳]{x-۱}$ است که در نقطهٔ $x = ۱$ دارای مماس قائم بوده و مشتق برابر بی‌نهایت است و در $x = ۱$ مشتق‌ناپذیر است. ضابطهٔ سوم $۱ - [x]$ است که در نقاط ۳ و ۴ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۲- بررسی نقاط مرزی:

در $x = ۰$ حد ضابطهٔ بالا برابر یک و حد ضابطهٔ پایین -۱ است. پس در $x = ۰$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x = ۲$ ضابطهٔ دوم و سوم دارای عرض ۱ هستند ولی مشتق ضابطهٔ بالا مخالف صفر و مشتق ضابطهٔ پایین صفر است. پس $x = ۲$ یک نقطهٔ گوشه (دارای مشتق چپ و راست متفاوت) و مشتق‌ناپذیر است.

$$\text{نقاط مشتق‌ناپذیر} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$$

۲۷ - گزینه ۱ شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f در $x = a$ آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x = ۱}\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(a\sqrt{x}+۲) = a+۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۳ - bx) = ۱-b \\ f(۱) = a+۲ \end{cases} \Rightarrow \quad a+۲ = ۱-b \to a+b = -۱$$

$$f'(۱^+) = f'(۱^-) \to \frac{a}{۲\sqrt{x}} = ۳x^۲ - b \to \frac{a}{۲} = ۳ - b \to a = ۶ - ۲b \to a + ۲b = ۶$$

$$\begin{cases} a+b = -۱ \\ a+۲b = ۶ \end{cases} \to a = -۸\,,\ b = ۷ \to a - b = -۱۵$$

۲۸ - گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \quad (۱)$$

$$\sqrt{۲} - \sqrt{۲-x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲} \geq \sqrt{۲-x} \Rightarrow ۲ \geq ۲ - x \Rightarrow x \geq ۰ \quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) : ۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_f = [۰, ۲]$$

با توجه به دامنه، تنها مشتق راست در نقطهٔ $x = ۰$ قابل محاسبه است.

$$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}} - ۰}{x} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}}{x} \times \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲-۲+x}}{x\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x}\times\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}$$

$$= \frac{۱}{۰^+ \times \sqrt{۲\sqrt{۲}}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

۲۹ - گزینه ۴ گزینه‌های «۱» و «۳» در $x=-۲$ پیوسته نیستند، آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱}: \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=(-۲)^۲=۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=۴(-۲)=-۸ \\ f(-۲)=(-۲)^۲=۴ \end{cases}$$

تابع از چپ در $x=-۲$ پیوسته نیست. پس مشتق چپ موجود نیست.

$$\text{گزینهٔ ۳}: \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} h(x)=-۲(-۲)=۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} h(x)=-۲(-۳)=۶ \\ h(-۲)=-۲(-۲)=۴ \end{cases}$$

تابع از چپ در $x=-۲$ پیوسته نیست. پس مشتق چپ موجود نیست.

گزینهٔ ۲: تابع در $x=-۲$ مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق آن برابر است با:

$$g(x)=x|x-۲| \xrightarrow{\text{اطراف } x=-۲} g(x)=-x(x-۲)=-x^۲+۲x$$

$$g'(x)=-۲x+۲ \xrightarrow{x=-۲} ۴+۲=۶$$

گزینهٔ ۴: مشتق چپ و راست موجود و نابرابرند.

$$i'_+(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{i(x)-i(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{(x+۲)[x]-۰}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}[x]=-۲$$

$$i'_-(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{i(x)-i(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(x+۲)[x]-۰}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}[x]=-۳$$

مشتق چپ و راست موجود و نابرابرند.

۳۰ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x=۰}\begin{cases} \lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\dfrac{x+۲}{x+a}=\dfrac{۲}{a} \\ \lim\limits_{x\to۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}\left(\sqrt{x^۲+b}+\dfrac{x}{۸}\right)=\sqrt{b} \\ f(۰)=\sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b}=\frac{۲}{a}$$

$$f'(۰^+)=f'(۰^-)\longrightarrow \frac{۱(x+a)-۱(x+۲)}{(x+a)^۲}=\frac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+b}}+\frac{۱}{۸}$$

$$\longrightarrow \frac{a-۲}{a^۲}=\frac{۱}{۸}\longrightarrow a^۲=۸a-۱۶\longrightarrow a^۲-۸a+۱۶=۰$$

$$\longrightarrow (a-۴)^۲=۰\longrightarrow a=۴\xrightarrow{\sqrt{b}=\frac{۲}{a}}\sqrt{b}=\frac{۲}{۴}\longrightarrow b=\frac{۱}{۴}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۳	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۴	۳۰ - ۲