

نام آزمون: مشتق

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

۱- اگر $f(a) = 2f'(a) = 8$ باشد، مشتق تابع $y = \sqrt[3]{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{3}{2}$

۲- مشتق تابع $f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$ در نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟

① ۲۰

② ۱۶

③ ۸

④ صفر

۳- اگر $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 4)$ و $g(x) = x^8 - 16$ باشد، حاصل $f'(1)g(1) - f(1)g'(1)$ کدام است؟

① ۲۲۵

② ۲۵۰

③ ۴۵۰

④ ۵۰۰



۴- مقدار مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{3x + 1}}\right)^3$ در $x = 1$ کدام است؟

① $\frac{15}{8}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{9}{8}$

④ $\frac{9}{4}$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x - 1}{x - 2}}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ کدام است؟

① $-\frac{5\sqrt{2}}{16}$

② $-\frac{3\sqrt{2}}{16}$

③ $-\frac{5\sqrt{2}}{8}$

④ $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$

۶- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{5x^2 - 1}}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 4x^2 + 4}{(5x^2 - 1)^2}}$ حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ کدام است؟

① $\frac{-22x}{(5x^2 - 1)^2}$

② $\frac{-44x}{(5x^2 - 1)^2}$

③ $\frac{-11x}{(5x^2 - 1)^3}$

④ $\frac{-20x}{(5x^2 - 1)^4}$



۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

① $\frac{7}{48}$

② $\frac{5}{24}$

③ $\frac{7}{24}$

④ $\frac{7}{16}$

۸- مقدار مشتق تابع $f(x) = 3\sqrt{x-a} + 2$ به ازای $x = 4$ برابر $\frac{1}{3}$ است. a کدام است؟

① $\frac{65}{4}$

② $-\frac{65}{4}$

③ $\frac{33}{2}$

④ $-\frac{33}{2}$

۹- اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)^2$ و $g(x) = (\frac{x+2}{x+1})^2$ ، آن‌گاه حاصل $f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ کدام است؟

① ۱۲

② -۱۲

③ ۶

④ -۶

۱۰- اگر $f(x) = (\frac{\sqrt{x}}{x-3})^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$ کدام است؟

① $-\frac{7}{4}$

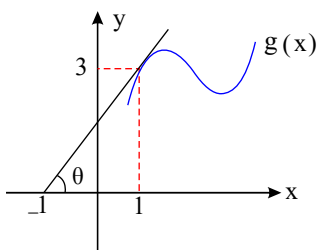
② $-\frac{21}{4}$

③ -۷

④ -۲۱



۱۱- شکل زیر، نمودار تابع پیوسته و مشتق پذیر g می باشد. هرگاه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x)}$ باشد، آن گاه مقدار $f'(1)$ چه قدر است؟



- ① $\frac{1}{3}$
- ② ۱
- ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{1}{9}$

۱۲- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 - 1)^2}$ باشد، مقدار $f'(\sqrt{3})$ کدام است؟

- ① $\frac{-9\sqrt{3}}{8}$
- ② $\frac{-7\sqrt{3}}{8}$
- ③ -27
- ④ $\frac{1}{4}$

۱۳- مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 3}}$ در $x = -1$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{8}$
- ② $\frac{3}{8}$
- ③ $-\frac{3}{16}$
- ④ $\frac{3}{16}$



۱۴- با فرض آنکه $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- ۱
- ۲ صفر
- ۳ $\sqrt[3]{3}$
- ۴ $\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}$

۱۵- فرض کنید $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x} + x^2}{3^x}$ و $g(x) = (\sqrt{x^4 + x} - x^2)3^{x+1}$ حاصل عبارت $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ به ازای $x = 1394$

کدام است؟

- ۱ ۴۱۸۲
- ۲ ۳
- ۳ $3(1394)^4$
- ۴ $3(1394)^2$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(a) = 2f'(a) = 8 \Rightarrow f(a) = 8, f'(a) = 4$$

$$y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}} \xrightarrow{x=a} y'(a) = \frac{f'(a)}{3\sqrt[3]{f^2(a)}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{4}{3 \times 4} = \frac{1}{3}$$

۲ - گزینه ۲ از مشتق حاصل ضرب کمک می‌گیریم.

$$f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}(3x-2)^2 + 9(3x-2)(\sqrt{5x+1})$$

$$f'(0) = \frac{5}{2} \times (-8) + 9(-2)(1) = -20 + 36 = 16$$

۳ - گزینه ۳ عبارت خواسته شده شبیه صورت مشتق $\frac{g}{f}$ است.

ابتدا حاصل $\frac{g(x)}{f(x)}$ را می‌یابیم:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^8 - 16}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} = \frac{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = x^2 - 2$$

حال از دو طرف رابطه بالا مشتق می‌گیریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = 2x \Rightarrow \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = 2x$$

$$\Rightarrow g'(x)f(x) - f'(x)g(x) = 2xf^2(x) \xrightarrow{x=1} g'(1)f(1) - f'(1)g(1) = 2f^2(1)$$

$$\Rightarrow g'(1)f(1) - f'(1)g(1) = 2((1+2)(1+4))^2 = 2 \times 15^2 = 450$$

۴ - گزینه ۱

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\right) \left(\frac{2x(\sqrt{3x+1}) - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2+1)}{(\sqrt{3x+1})^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2\left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{2(2) - \frac{3}{2}(2)}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{4}$$

۵ - گزینه ۳ می‌دانیم که $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است پس حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ برابر $f'(3)$ می‌باشد کافی است از تابع داده شده مشتق گرفته و سپس $x = 3$ را جایگزین کنید.

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \left(\frac{3(x-2) - 1(3x-1)}{(x-2)^2} \right)}{2\sqrt{\frac{3x-1}{x-2}}} \rightarrow f'(3) = \frac{-5}{2\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{-5\sqrt{8}}{16} = \frac{-10\sqrt{2}}{16} = \frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

۶ - گزینه ۱

$$(uv)' = u'v + v'u$$

عبارت نوشته شده، مشتق حاصل ضرب دو تابع است بنابراین دو تابع را در هم ضرب کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

$$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(5x^2-1)^2}} \times \sqrt{\frac{x^2+2}{5x^2-1}} = \sqrt{\frac{(x^2+2)^3}{(5x^2-1)^3}} = \frac{x^2+2}{5x^2-1}$$



$$\rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = \frac{2x(5x^2 - 1) - 1 \cdot x(x^2 + 2)}{(5x^2 - 1)^2} = \frac{-22x}{(5x^2 - 1)^2}$$

۷ - گزینه ۱

مشخص است که $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ می باشد، بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و به جای x آن عدد یک را قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{4(x+3)-1(4x+5)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \rightarrow f'(1) = \frac{\frac{4}{16}}{2(\frac{2}{4})} = \frac{1}{4}$$

۸ - گزینه ۲

$$f(x) = 3\sqrt{x-a} + 2 \rightarrow f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x-a}} \xrightarrow{f'(4)=\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \frac{3}{2\sqrt{4-a}}$$

$$\rightarrow 2\sqrt{4-a} = 6 \rightarrow \sqrt{4-a} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-a = 9 \rightarrow a = \frac{4-9}{1} = -5$$

۹ - گزینه ۲ می دانیم: $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (f(x) \cdot g(x))'$

عبارت خواسته شده، مشتق حاصل ضرب دو تابع در $x = 1$ است.

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 - x - 2)^2 \times \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 = ((x-2)(x+1))^2 \times \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$$

$$= (x-2)^2(x+1)^2 \times \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2} = (x-2)^2(x+2)^2 = (x^2 - 4)^2$$

پس: $(f(x) \cdot g(x))' = 2(x^2 - 4)(2x) \xrightarrow{x=1} 2(-3)(2) = -12$

۱۰ - گزینه ۴ می دانیم: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-3}\right)^3 \rightarrow f'(x) = 3\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) - 1(\sqrt{x})}{(x-3)^2}\right)$$

$$\rightarrow f'(4) = 3\left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{2}(1) - 2}{1}\right) = 3(4)\left(\frac{-1}{2}\right) = -6$$

۱۱ - گزینه ۱ از روی شکل مشخص است که $g(1) = 3$ می باشد و $g'(1)$ یعنی شیب خط مماس بر تابع g و $x = 1$ یعنی:

$$g'(1) = \tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot g(x) - g'(x) \cdot (x^2 + 1)}{(g(x))^2}$$

$$\rightarrow f'(1) = \frac{2g(1) - 2g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{6 - 2(\frac{3}{2})}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)(2x)\sqrt{x^2+1}}{(x^2-1)^4}$$

$$\rightarrow f'(\sqrt{3}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}) - 2(2)(2\sqrt{3})(2)}{16} = \frac{-14\sqrt{3}}{16} = \frac{-7\sqrt{3}}{8}$$

۱۳ - گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}} \rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}}} = \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2)}{(x^2+3)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}}}$$



$$\rightarrow f'(-1) = \frac{\frac{-8+2}{16}}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{3}{8}}{2(\frac{1}{2})} = -\frac{3}{8}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(2x)}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}} \rightarrow f'(0) = 0$$

۱۵ - گزینه ۲ عبارت خواسته شده مشتق حاصل ضرب دو تابع است زیرا: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ پس کافی است دو تابع را در هم ضرب کرده و سپس مشتق بگیریم.

$$(f(x) \cdot g(x))' = \overbrace{\left(\frac{\sqrt{x^x + x} - x^x}{3^x} \right)}^{\text{مزدوج}} \times (\sqrt{x^x + x + x^x}) 3^{x+1} = (3(x^x + x - x^x))' = (3x)' = 3$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۴

۱۳ - ۱

۲ - ۲

۵ - ۳

۸ - ۲

۱۱ - ۱

۱۴ - ۲

۳ - ۳

۶ - ۱

۹ - ۲

۱۲ - ۲

۱۵ - ۲