نام آزمون: زاویه بین نیم مماس ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع $f(x)=[۲+\cos\frac{x}{۲}]\sin ۲x$ در $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

① $\frac{۱}{۹}$

② $\frac{۱}{۵}$

③ $\frac{۲}{۹}$

④ $\frac{۲}{۵}$

۲ - امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۳}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

① ۰٫۱۵

② ۰٫۲

③ ۰٫۲۵

④ ۰٫۳

۳ - اگر θ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه نمودار تابع $y=\frac{|x-۱|}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$

② $\frac{۳}{۴}$

③ $\frac{۴}{۳}$

④ $\frac{۳}{۲}$

۴- زاویهٔ بین مماس چپ و راست برای تابع $f(x)=\begin{cases}\tan x & ; \quad x\geq 0\\ \dfrac{x\cos x}{\sqrt{3}} & ; \quad x<0\end{cases}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{12}$

۲) $\frac{5\pi}{12}$

۳) $\frac{7\pi}{12}$

۴) $\frac{\pi}{2}$

۵- در نقطهٔ A به طول a واقع بر نمودار تابع $y=x^2+5x+7$ مماسی بر منحنی رسم کرده‌ایم. اگر تانژانت زاویهٔ بین مماس و محور طول‌ها ۵ باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $5, 1$

۲) $0, -1$

۳) $-5, 0$

۴) $5, 2$

۶- تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس راست و چپ بر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{|\sin x|\cos x}{1-\cos x}$ در نقطه‌ای به طول $x=\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{1}{4}$

۷ - زاویه‌ی بین مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3} & ; \ x\le 1\\ \frac{-1}{6}x^2 & ; \ x>1\end{cases}$ در $x=1$ کدام است؟

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$

۸ - تانژانت زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌های نمودار تابع $y=|\sin x+\cos x|$ در $x=\frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

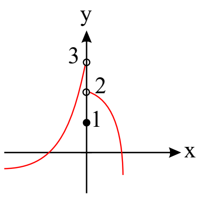
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $-\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}$

۹ - اگر شکل زیر مربوط به تابع g باشد، زاویه‌ی بین مماس‌های چپ و راست در نقطه‌ی $x=0$ در تابع $f(x)=|x|\,g(x)$ کدام است؟



① $\frac{\pi}{3}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{\pi}{6}$

۱۰ - هرگاه $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-2x^2}}$ باشد در مبدأ مختصات مماس‌های مرسوم بر منحنی چه زاویه‌ای می‌سازند؟

① 45°

② 60°

③ 90°

④ 30°

۱۱ - تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{1+|x|}$ در $x=0$ کدام است؟

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{1}{4}$

③ 2

④ $\frac{4}{3}$

۱۲ - اگر نیم‌مماس راست و نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |ax^2 - 4a|$ در $x=2$ برهم عمود باشند، a کدام است؟

① $\pm\frac{1}{2}$

② $\pm\frac{1}{4}$

③ ± 2

④ ± 4

۱۳ - اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه‌ی زاویه‌دار آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

① $\{-1\}$

② $\{1\}$

③ $\{-1, 1\}$

④ $\varnothing$

۱۴ - مماس‌های چپ و راست رسم شده بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{a - 2|x|}$ در نقطهٔ زاویه‌دار برهم عمودند. a کدام است؟

① 1

② -1

③ $\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{4}$

۱۵- نقطهٔ $x=1$ برای تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2-b & x\geq 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & x<1 \end{cases}$ یک نقطهٔ گوشه است و زاویهٔ ایجادشده در این گوشه برابر 90° است. مقدار $f(3)$ برابر کدام است؟

① ۲/۵
② ۵
③ ۴
④ ۴/۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را در یک همسایگی $x=\pi$ می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}2\sin 2x & ;\ x\le\pi\\ \sin 2x & ;\ x>\pi\end{cases}$$

پس برای مشتق تابع داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}4\cos 2x & ;\ x<\pi\\ 2\cos 2x & ;\ x>\pi\end{cases}$$
$$\Rightarrow f'_-(\pi)=4,\ f'_+(\pi)=2$$

درنتیجه $\tan\theta$ را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\tan\theta=\left|\frac{4-2}{1+4\times 2}\right|=\frac{2}{9}$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس و بعد معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3};\ f'_{(x)}=\frac{\cos x\cdot(1+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

$$m=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

شیب خط مماس برابر $\frac{2}{3}$ است و شیب خط $y=x$ هم عدد ۱ است؛ بنابراین زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_2\cdot m_2}\right|=\left|\frac{\frac{2}{3}-(1)}{1+\frac{2}{3}}\right|=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=0.2$$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $|x-a|\ f(x)=g(x)$، $\underline{x=a}$ به شرطی که ریشهٔ $g(x)$ نباشد نقطهٔ گوشه برای تابع $f(x)$ است. بنابراین در تابع $y=\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$، $\underline{x=1}$ گوشه است.

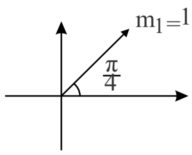
$$y=|x-1|\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\Rightarrow\begin{cases}y'(1^+)=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow m_1=\frac{1}{2}\\ y'(1^-)=\frac{-1}{\sqrt{x^2+3}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

زاویهٔ بین دو خط مماس در نقطهٔ گوشه : $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right|=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

۴ - گزینه ۱ ابتدا شیب مماس‌های چپ و راست را در نقطهٔ $x=0$ پیدا می‌کنیم.

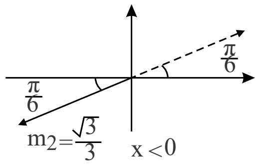
$$x>0\Rightarrow f(x)=\tan x\to f'(x)=1+\tan^2 x$$

$$m_1=f'_+(0)=1\Rightarrow$$

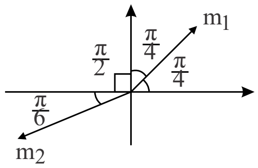


$$x<0\Rightarrow f(x)=\frac{x\cdot\cos x}{\sqrt{3}}\to f'(0)=\frac{1\times\cos(0)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow m_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

توجه: فقط از عامل صفر شوند (x) مشتق گرفتیم.



برای محاسبهٔ زاویهٔ بین دو نیم مماس باید هر دو را در یک دستگاه رسم کنیم.



زاویهٔ بین دو مماس $\theta = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$

۵ – گزینه ۳ فرض کنید شیب خط مماس m باشد، از آنجا که محور طول‌ها شیب صفر دارد، لذا زاویه بین خط مماس و محور طول‌ها برابر است با:

زاویهٔ خط مماس و محور طول‌ها $= \tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ \cdot m_۲}\right| = \left|\frac{m - ۰}{۱ + m(۰)}\right| = ۵ \Rightarrow |m| = ۵$

درنتیجه خط مماس در نقطه A به طول a ، شیب ۵ دارد، لذا خواهیم داشت:

$$y = x^۲ + ۵x + ۷ \Rightarrow y' = ۲x + ۵ \xrightarrow{x=a} y'(a) = ۲a + ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a + ۵ = ۵ \Rightarrow a = ۰ \\ ۲a + ۵ = -۵ \Rightarrow a = -۵ \end{cases}$$

۶ – گزینه ۲ ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم.

$۱)\ x > \pi \Rightarrow f(x) = \frac{-\sin x \cdot \cos x}{۱ - \cos x} \rightarrow$ فقط از عامل صفرکننده یعنی $\sin x$ مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{-\cos x \times (-۱)}{۱ - (-۱)} = \frac{۱ \times (-۱)}{۲} = \frac{-۱}{۲} = f'_+(\pi) = m_۱$$

به ازای ریشه‌ی قدرمطلق، مشتق چپ و راست قرینه‌ی یکدیگرند. پس:

$$f'_-(\pi) = \frac{۱}{۲} = m_۲$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ \cdot m_۲}\right| = \left|\frac{\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲})}{۱ - \frac{۱}{۴}}\right| = \left|\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}\right| = \frac{۴}{۳}$$

۷ – گزینه ۲ مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x^۲ & ; \quad x < ۱ \\ \frac{-۱}{۳}x & ; \quad x > ۱ \end{cases} \Rightarrow m_۱ = f'_-(۱) = \frac{۱}{۲},\ m_۲ = f'_+(۱) = \frac{-۱}{۳}$$

بنابراین داریم:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right| = \left|\frac{\frac{۱}{۲} - (\frac{-۱}{۳})}{۱ + (\frac{۱}{۲} \times (\frac{-۱}{۳}))}\right| = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

۸ – گزینه ۴ در همسایگی $x = \frac{۳\pi}{۴}$ می‌توان نوشت:

$$x < \frac{۳\pi}{۴} : \begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos x > -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos x > ۰ \Rightarrow y = +(\sin x + \cos x) \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$$

$$x > \frac{۳\pi}{۴} : \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos x < -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos x < ۰ \Rightarrow y = -(\sin x + \cos x) \Rightarrow y' = -\cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'_-(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ y'_+(\frac{3\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{1 - 2}\right| = 2\sqrt{2}$$

۹ - گزینه ۲

مشتق چپ و مشتق راست را می‌یابیم:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|g(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \cdot g(x)$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 2 = m_1 \\ f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} -g(x) = -3 = m_2 \end{cases}$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۱۰ - گزینه ۳

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - 2x^2}} - 0}{x} \xlongequal{\text{ضرب در مزدوج}} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}|x|}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2x^2}}}$$

$$\left.\begin{matrix} f'_+(0) = 1 \\ f'_-(0) = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ضرب شیب‌ها} = m_1 \cdot m_2 = -1$$

دو مماس بر هم عمودند پس زاویهٔ بین آن‌ها 90° است.

۱۱ - گزینه ۱ کافی است مشتق چپ و راست تابع را در نقطه $x = 0$ به‌دست آوریم تا شیب دو خط مماس بر تابع حاصل شود. لذا داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + |x|} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 + x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1 - x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1 + x)^2}} & x \geq 0 \Rightarrow f'_+(0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}} & x < 0 \Rightarrow f'_-(0) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تانژانت زاویه بین دو نیم‌مماس} = \tan\theta = \left(\left|\frac{\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3})}{1 + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})}\right|\right) = \left(\left|\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}}\right|\right) = \frac{3}{4}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|ax^2 - 4a| - 0}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|a|\overbrace{|x - 2|}^{+}\overbrace{|x + 2|}^{+}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{|a|(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4|a|$$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|a|\overbrace{|x - 2|}^{-}\overbrace{|x + 2|}^{+}}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|a|(-x + 2)(x + 2)}{x - 2} = -4|a|$$

چون قرار است دو نیم‌مماس برهم عمود باشند، پس باید شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم باشد.

$$\Rightarrow f'_+(2)f'_-(2) = -1 \Rightarrow (4|a|)(-4|a|) = -1 \Rightarrow 16|a|^2 = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{4}$$

۱۳ - گزینه ۳

$x = 0$ ریشه‌ی درون قدرمطلق و نقطه زاویه‌دار تابع است.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x + a) - 0}{x - 0} = a$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x(x+a)-0}{x} = -a$$

چون دو خط بر هم عمودند بنابراین باید حاصل‌ضرب شیب‌ها عدد -1 شود، پس:

$$mm' = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۱۴ - گزینه ۱

می‌دانیم هرگاه دو خط برهم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها -1 است.

$$\begin{cases} x \geq 0 : f(x) = \sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}} \Rightarrow f'_+(0) = \dfrac{-1}{\sqrt{a}} \\ x \leq 0 : f(x) = \sqrt{a+2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{a+2x}} \Rightarrow f'_-(0) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

مماس‌های چپ و راست برهم عمودند، پس:

$$f'_+(0)\cdot f'_-(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} = -1 \Rightarrow a = 1$$

۱۵ - گزینه ۴ باید f در $x=1$ پیوسته باشد، پس: $a-b=\dfrac{1}{2}$

اما چون نقطهٔ گوشه است، لذا باید شیب‌ها را در نقطهٔ $x=1$ به‌دست آورد:

$$\begin{cases} f'_+(1) = 2a \\ f'_-(1) = \left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'_{x=1} = \left(-\dfrac{1}{x^3}\right)_{x=1} = -1 \end{cases}$$

چون در نقطهٔ گوشه زاویهٔ 90° ایجاد می‌شود. پس باید ضرب شیب‌ها ۱- باشد.

$$(2a)(-1) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 0 \quad , \quad f(3) = 9a - b = 4/5$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳
۲ - ۲
۳ - ۳
۴ - ۱
۵ - ۳
۶ - ۲
۷ - ۲
۸ - ۴
۹ - ۲
۱۰ - ۳
۱۱ - ۱
۱۲ - ۲
۱۳ - ۳
۱۴ - ۱
۱۵ - ۴