

علی هاشمی

نام آزمون: فصل سوم حسابان ۲

سایت: ALIGEBRA.COM

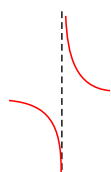
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

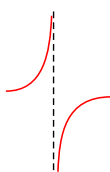
۲- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

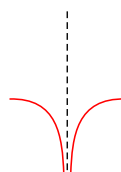
۴- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



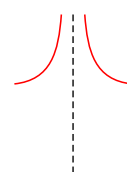
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

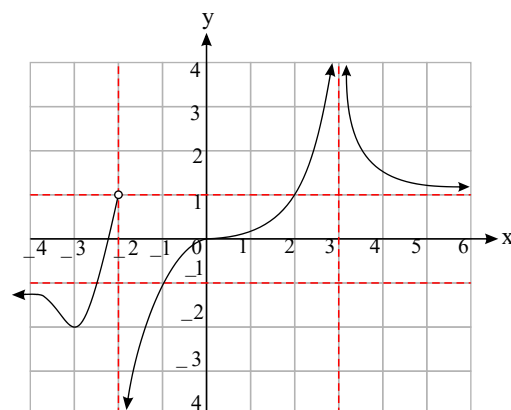
۵- مفهوم هریک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$



۶- برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:



- الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
 ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
 پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$
 ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$
 ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
 مجانب‌های افقی و قائم ج)

۷- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

- الف) $f(1) = f(-2) = 0$
 ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
 پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

۸- با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$$



ب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$$

۹- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = -\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12}$$



پ

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$$

۱۰ - حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$$

ب

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$$



ت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$$

۱۱ - مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هریک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$y = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

مجانب‌های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید.

ب

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

مجانب‌های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید.

پ

$$y = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$$

مجانب‌های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید.



ت

$$y = \frac{2x}{1+x^2}$$

۱۲ - مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$$

ب

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$$



پاسخنامه تشریحی

۱ - ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم، برای این کار باید ریشه های مخرج را به دست آوریم.

$$x - |x| = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq 0$$

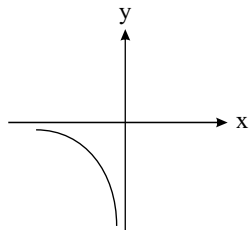
$$D_f = \mathbb{R} - [0, +\infty) = (-\infty, 0)$$

به ازای $x \geq 0$ مخرج صفر می شود، پس دامنه تابع به صورت مقابل است.

توجه کنید که تابع در اعداد حقیقی نامنفی تعریف نشده است، پس هیچ عدد حقیقی مثبتی نمی تواند مجانب قائم تابع باشد. حال فقط باید حد چپ تابع در $x = 0$ را بررسی کنیم که داریم:

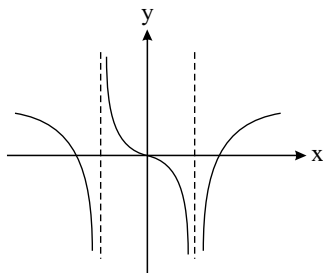
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \times 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

نمودار تابع در همسایگی چپ $x = 0$ به صورت مقابل است.



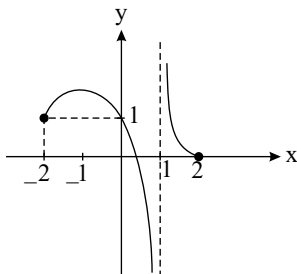
۲ -

تابع مقابل در $x = -1$ و $x = 1$ مجانب قائم دارد.



۳ -

تابع مقابل در $x = 1$ مجانب قائم دارد.



۴ - باید حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon-1)^2} = \frac{1}{+\varepsilon^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon-1)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

جواب مورد (الف) است.

۵ - (الف)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ به این معناست که در تابع f اگر x به دلخواه بزرگ (مثبت) باشد، یعنی x به $+\infty$ برود، مقادیر تابع یعنی $f(x)$ ها به عدد ۲ نزدیک می شوند. به بیان دیگر مقادیر تابع $f(x)$ را هرچقدر بخواهیم می توانیم به ۲ نزدیک کنیم. به شرط آنکه x به قدر کافی بزرگ انتخاب شود.

(ب)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ یعنی در تابع f اگر x به دلخواه کوچک (منفی) باشد یعنی x به $-\infty$ برود، مقادیر تابع یعنی $f(x)$ ها به عدد ۴ نزدیک می شوند. به زبان دیگر مقادیر تابع $f(x)$ را هرچقدر بخواهیم می توانیم به ۴ نزدیک کنیم به شرط آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی انتخاب شود.

۶ -

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$



هرچه x به $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت ۱ نزدیک‌تر می‌شوند.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

هرچه x به $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت -1 نزدیک‌تر می‌شوند.

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

هرچه x به ۳ از سمت راست نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

هرچه x به ۳ از سمت چپ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

هرچه x به -2 از سمت راست نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کنند.

ج) مجانب‌های افقی و قائم

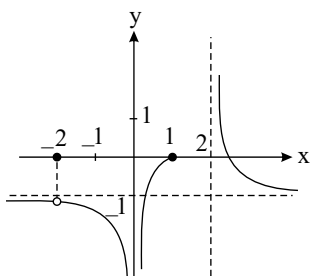
خطوط $x = 3$ و $x = -2$ مجانب‌های قائم تابع و خطوط $y = 1$ و $y = -1$ مجانب‌های افقی تابع هستند زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ یعنی تابع در هر دو طرف $x = 0$ به $-\infty$ میل می‌کند و خط $x = 0$ مجانب قائم است. همچنین چون $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ پس تابع در سمت راست $x = 2$ به $+\infty$

میل می‌کند و خط $x = 2$ نیز مجانب قائم تابع است.

توجه کنید که می‌توان نمودارهای متفاوتی برای این تابع رسم کرد.



- ۸

الف

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3+x^2} = \sqrt{3} > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad g(x) = x^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

با فرض $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ و $g(x) = x^2$ داریم:

ب

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^4 = 0, \quad g(x) = (x-2)^4 \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

با فرض $f(x) = 1$ و $g(x) = (x-2)^4$ داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پ

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} |5-x| = |5-(-2)| = 7 \\ \lim_{x \rightarrow -2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} |2+x| = 0, \quad g(x) = |2+x| \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{|2+x|} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

با فرض $f(x) = |5-x|$ و $g(x) = |2+x|$ داریم:

- ۹

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2 \times 2}{(2-\varepsilon-2) \times 4} = \frac{4}{-4\varepsilon} = \frac{+4}{0^-} = -\infty$$

با تجزیه مخرج کسر داریم:

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-3)(x+4)} = \frac{9+6-1}{(3-\varepsilon-3) \times 7} = \frac{14}{-7\varepsilon} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

با تجزیه مخرج کسر داریم:

پ

با تجزیه مخرج کسر داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{(3-x)(3+x)} = \frac{4}{(3-(3+\varepsilon)) \times 6} = \frac{2}{-\varepsilon \times 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

- ۱۰

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty$ داریم:

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

ب

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2}x = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}(-\infty) = +\infty \end{cases}$$

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty$ داریم:

ت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = -\infty$$

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty$ داریم:

- ۱۱

الف

$$y = \frac{2x-1}{x-3}, \quad x-3=0 \Rightarrow x=3$$

۱- برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 - \varepsilon - 3} = \frac{5}{-\varepsilon} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 + \varepsilon - 3} = \frac{5}{+\varepsilon} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

۲- برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

خط $x=3$ مجانب قائم و خط $y=2$ مجانب افقی است.

ب

$$y = \frac{x}{x^2-4}, \quad x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2-\varepsilon-2) \times 4} = \frac{1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2+\varepsilon-2) \times 4} = \frac{1}{+2\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4(-2-\varepsilon+2)} = \frac{1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4(-2+\varepsilon+2)} = \frac{1}{+2\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

خطوط $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم و خط $y=0$ مجانب افقی می‌باشند.

پ

$$y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}, \quad 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1+1)(1-1+\varepsilon)} = \frac{3}{+2\varepsilon} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{2(1-1-\varepsilon)} = \frac{3}{-2\varepsilon} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + 2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1-(1-\varepsilon)) \times 2} = \frac{3}{+2\varepsilon} = \frac{3}{\circ^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + 2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1-(1+\varepsilon)) \times 2} = \frac{3}{-2\varepsilon} = \frac{3}{\circ^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:
خطوط $x = 1$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم و خط $y = -2$ مجانب افقی می‌باشند.

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

ت

غیر قابل قبول $1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$, $y = \frac{2x}{1+x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$$

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

چون مخرج ریشه ندارد، تابع مجانب قائم ندارد. خط $y = 0$ تنها مجانب افقی تابع است.

- ۱۲

الف

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 - (3 - \varepsilon)} = \frac{5}{+\varepsilon} = \frac{5}{\circ^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 - (3 + \varepsilon)} = \frac{5}{-\varepsilon} = \frac{5}{\circ^-} = -\infty$$

ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

بنابراین خط $x = 3$ مجانب قائم تابع است.

ب

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

ابتدا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

خط $x = 0$ مجانب قائم تابع نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-\varepsilon-1} = \frac{2}{-\varepsilon} = \frac{2}{\circ^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1+\varepsilon-1} = \frac{2}{+\varepsilon} = \frac{2}{\circ^+} = +\infty$$

خط $x = 1$ مجانب قائم تابع است.