نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - در تابع $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt{x^{۲}-x+۳}}{x-۳}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-۲} f(x)$ کدام است؟

① -۱

② ۱

③ $-\dfrac{۹}{۵}$

④ $\dfrac{۹}{۵}$

۲ - حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cot ۲x}$ کدام است؟

① $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

③ $\sqrt{۲}$

④ $-\sqrt{۲}$

۳ - اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^{n}+۲x+۳}{۳x^{۲}-۵x+۱}$ برابر ۲ باشد، $a+n$ کدام است؟

① ۲

② ۴

③ ۶

④ ۸

۴- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}} \dfrac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\cot x}$ ، کدام است؟

① $\sqrt{۲}$
② $-\sqrt{۲}$
③ ۲
④ -۲

۵- حد تابع $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{۴x^{۲}+۸x-۱}}{ax-۱}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر ۱٫۵ می‌باشد. حد همین تابع وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

① ۲
② ۳
③ $-\frac{۱}{۲}$
④ $-\frac{۱}{۳}$

۶- اگر در تابع $f(x)=\begin{cases} x-a & x\geq ۱ \\ x^{۲}+۲a & x<۱ \end{cases}$ مقدار حد راست در $x=۱$ ، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$
② $-\frac{۱}{۳}$
③ $\frac{۱}{۵}$
④ $\frac{۱}{۴}$

۷ - حاصل $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-4x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{8}$

۲) $\dfrac{1}{4}$

۳) $-\dfrac{1}{4}$

۴) $\dfrac{1}{8}$

۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-\sqrt{9x^2-x}}{\sqrt{x+12}-3x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{2}{3}$

۲) 1

۳) -1

۴) $\dfrac{1}{3}$

۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x+\sqrt{x+12}}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{24}{7}$

۲) $\dfrac{24}{7}$

۳) $\dfrac{4}{7}$

۴) $-\dfrac{4}{7}$

۱۰ - حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{4}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{5}{4}$

۱۱ - حد چپ تابع $f(x)=[2x-|x|]$ در $x=-1$ کدام است؟

(۱) -1

(۲) -2

(۳) -3

(۴) -4

۱۲ - اگر $f(x)=x^2[x]$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ کدام است؟([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) 0

(۲) -4

(۳) -2

(۴) 2

۱۳ - اگر $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=-1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x=-2$ کدام است؟

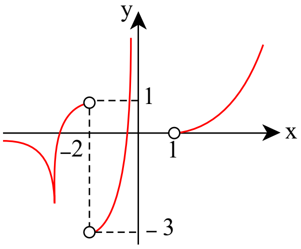
(۱) $-\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۱۴ - اگر نمودار f به صورت زیر باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



① $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۰$

② $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -\infty$

③ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = ۰$

④ $\lim_{x\to (-۲)^+} f(x) = -۳$

۱۵ - حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$

② $-\frac{۲}{۳}$

③ $\frac{۳}{۴}$

④ $\frac{۴}{۳}$

۱۶ - اگر حد $f(x) = \frac{a(x-۱)}{۲x-\sqrt{x^۲+۳}}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۳}$

② $\frac{۴}{۳}$

③ $\frac{۲}{۳}$

④ $\frac{۱}{۳}$

۱۷ - حاصل عبارت $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{۹x+۱}-۳\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۴x+۵}}$ کدام است؟

① صفر

② ۱

③ $\frac{۱}{۲}$

④ $+\infty$

۱۸ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & , \quad |x|\le 1 \\ x+b & , \quad |x|>1 \end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $2b-a$ کدام است؟

(۱) -5
(۲) -4
(۳) 5
(۴) 4

۱۹ - اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt{x^2+x}}{3x-1}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر ۲ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

(۱) 7
(۲) 3
(۳) $\dfrac{8}{3}$
(۴) $\dfrac{7}{3}$

۲۰ - اگر $f(x+1)=\dfrac{1}{x^2-1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$
(۲) $-\infty$
(۳) -1
(۴) صفر

۲۱ - حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) $\dfrac{5}{12}$
(۳) $\dfrac{1}{2}$
(۴) $\dfrac{7}{12}$

۲۲ - حاصل $\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to\pi}$ کدام است؟

① $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

② $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

③ $\dfrac{۱}{۲}$

④ وجود ندارد.

۲۳ - اگر $\dfrac{۴}{۵} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^۲+\sqrt{۴x^۴-۳x+۱}}{۵x^۲+۲}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^۲-a^۲}$ کدام است؟

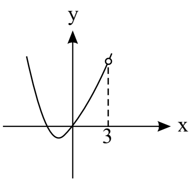
① $\dfrac{\sqrt{۲}}{۱۶}$

② $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳۲}$

③ $\dfrac{\sqrt{۳}}{۱۲}$

④ $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

۲۴ - شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۲x^۳-ax+۲b}{x-۳}$ می‌باشد. حاصل $a+۳b$ کدام است؟



① ۱۲

② ۱۸

③ ۲۴

④ ۳۰

۲۵- اگر $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^b+2x^2+5}{3x^2-x+1}=2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-b}{x^3-ax+3}$ کدام است؟

(۱) -6

(۲) -5

(۳) -4

(۴) -3

۲۶- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+2b & ; \quad x>3 \\ ax^2+bx+2 & ; \quad x<3 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -3

(۴) ۴

۲۷- اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{ax+3+\sqrt{4x^2-x}}{7x-1}=-\dfrac{3}{7}$ باشد، $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+a}{x^2+x+2a}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $-\dfrac{2}{7}$

(۳) -1

(۴) ۱

۲۸- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax+3\sqrt{x}-1}{2x+\sqrt[3]{x}-2}=3$، حاصل $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a-30}{x^2-7x+a}$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) $\dfrac{12}{5}$

(۳) $\dfrac{24}{5}$

(۴) $\dfrac{36}{5}$

۲۹- اگر در تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۳}+bx^{۲}-bx+۴}{۲x^{۳}-۲}$ داشته باشیم، $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۴

(۳) -۲

(۴) -۸

۳۰- حد عبارت $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۴

(۳) -۳

(۴) ۸

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-\sqrt{x^۲-x+۳}}{x-۳}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-\sqrt{x^۲}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-|\overbrace{x}^{-}|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{ax+x}^{x(a+۱)}}{x}=a+۱\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}۲\Rightarrow a=۱$$

$$\lim_{x\to-۲} f(x)=\lim_{x\to-۲}\frac{x-\sqrt{x^۲-x+۳}}{x-۳}=\frac{-۲-\sqrt{۹}}{-۵}=\frac{-۵}{-۵}=۱$$

۲ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x(\cos x-\sin x)}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳ ـ گزینه ۴ با توجه به این که حاصل حد، یک عدد شده است، یعنی بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند، پس $n=۲$ و طبق قاعده‌ی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{۳x^۲}=۲\Rightarrow\frac{a}{۳}=۲\Rightarrow a=۶,n=۲\Rightarrow a+n=۸$$

۴ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\cot x}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

برای رفع ابهام ضابطه را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\cot x}=\frac{\sqrt{۲\cos^۲ x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\sqrt{۲}\times|\cos x|\sin x}{\cos x}$$

چون x از $\frac{\pi}{۲}$ بیشتر است، پس در ربع دوم واقع است و کسینوس آن منفی است، بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sqrt{۲}(-\cos x)\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}-\sqrt{۲}\times\sin x=-\sqrt{۲}$$

۵ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{۴x^۲+۸x-۱}}{ax-۱}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{۴x^۲}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+|\overbrace{۲x}^{+}|}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=۱/۵\Rightarrow a=۲$$

حال برای محاسبه‌ی حد در $-\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+|\overbrace{۲x}^{-}|}{۲x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-۲x}{۲x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

۶ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}(x-a)=۱-a\\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(x^۲+۲a)=۱+۲a\end{cases}$$

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۱^-} f(x)\Rightarrow ۱-a=\frac{۱}{۲}(۱+۲a)\Rightarrow ۱-a=\frac{۱}{۲}+a\Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

۷ ـ گزینه ۱

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(1-\sqrt{x-3})(1+\sqrt{x-3})}{x(x-4)(1+\sqrt{x-3})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1-x+3}{x(x-4)(1+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)}{x(x-4)(1+\sqrt{x-3})}=\frac{-1}{4\times 2}=-\frac{1}{8}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-4x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x-4}=\frac{-\frac{1}{2(1)}}{8-4}=-\frac{1}{8}$$

۸ - گزینه ۴ چون $x\to\infty$، برای محاسبه‌ی حد، کافی است فقط جملات با بیشترین توان صورت و مخرج را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{9x^2-x}}{\sqrt{x+12}-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{9x^2}}{-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\overbrace{|3x|}^{+}}{-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3x}{-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{-3x}=\frac{1}{3}$$

۹ - گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)(x-\sqrt{x+12})}{(x+\sqrt{x+12})(x-\sqrt{x+12})}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)(x-\sqrt{x+12})}{x^2-x-12}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)(x-\sqrt{x+12})}{(x+3)(x-4)}=\frac{(-4)(-3-3)}{(-3-4)}=\frac{24}{-7}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x+\sqrt{x+12}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -3}\frac{2x+2}{1+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}}=\frac{-4}{\frac{7}{6}}=-\frac{24}{7}$$

۱۰ - گزینه ۱

روش اول: با ابهام صفر صفرم مواجه هستیم، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}\times\frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+x-3}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$\xlongequal{\text{صورت را بر } x+1 \text{ تقسیم می‌کنیم.}}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}=\frac{-7}{(-1)(-4)}=\frac{-7}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{2+\frac{1(-1)}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1}=\frac{2-\frac{1}{4}}{-1}=\frac{-7}{4}$$

۱۱ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}[2x-|x|]\xrightarrow{x<0}\lim_{x\to(-1)^-}[2x+x]=\lim_{x\to(-1)^-}[3x]=[3(-1)^-]=[-3^-]=-4$$

۱۲ - گزینه ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2[x]-1}{x-1}\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'_+(1)\xrightarrow{[1^+]=1}f(x)=x^2\to f'(x)=2x\to f'_+(1)=2$

۱۳ - گزینه ۴ داخل قدر مطلق وقتی x به ∞ میل می‌کند، مثبت است. پس قدر مطلق را برمی‌داریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2}\xlongequal{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1\to a=-1$$

اگر x به $(-2)^+$ میل کند، عبارت x^2-4 منفی خواهد شد. پس قدر مطلق را برداشته و عبارت را در منفی ضرب می‌کنیم. ($(-2)^+$ را حدوداً $-1/99$ در نظر می‌گیریم)

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\overbrace{|x^2-4|}^{-}}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-4)}{-(x^2+x-2)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$$

۱۴ - گزینه ۴

به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$ گزینه‌ی سوم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

گزینه‌ی دوم $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ گزینه‌ی چهارم $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-3$

۱۵ - گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to4}\frac{\frac{1(2)}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{2x-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{2x-\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{2x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{3x}=\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{2x-\sqrt{x^2+3}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{2}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$$

۱۷ - گزینه ۱ در ابتدای مسأله انتخاب توان بیشتر به کار نمی‌آید زیرا در صورت، عبارت‌ها قرینه‌ی هم شده و حاصل، صفر می‌گردد. برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم (مخرج، مبهم نمی‌باشد ولی صورت، مبهم است).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+5}}\times\frac{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x+1-9(x-1)}{(\sqrt{x}+\sqrt{4x})(\sqrt{9x}+3\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x+1-9x+9}{(3\sqrt{x})(6\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{18x}=\frac{10}{+\infty}=0$$

۱۸ - گزینه ۳ ابتدا شرط تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+1 & , \quad -1\le x\le 1\\ x+b & , \quad x>1 \ \text{یا}\ x<-1\end{cases}$$

چون تابع در تمام نقاط حد دارد پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نیز حد دارد.

$$x=1\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+b)=1+b\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2-ax+1)=1-a+1=2-a\end{cases}\to 1+b=2-a\to a+b=1$$

$$x=-1\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-ax+1)=1+a+1=a+2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+b)=-1+b\end{cases}\to a+2=-1+b\to a-b=-3$$

از حل دستگاه $a=-1$ و $b=2$ بدست می آید پس $2b-a=5$ است.

۱۹ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2+x}}{3x-1}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2}}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\overbrace{|x|}^{+}}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x}{3x}=\frac{a-1}{3}=2\to a-1=6\to a=7$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-\sqrt{x^2+x}}{3x-1}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-\sqrt{x^2}}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-\overbrace{|x|}^{-}}{3x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-(-x)}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{3x}=\frac{8}{3}$$

۲۰ - گزینه ۲ روش اول:

باید $x+1\to0^+$ میل کند پس $x\to(-1)^+$ میل می کند.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x+1) = \frac{1}{\left((-1)^+\right)^2-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$x+1=t \to x=t-1 \to f(t) = \frac{1}{(t-1)^2-1} = \frac{1}{t^2+1-2t-1} = \frac{1}{t^2-2t} \to f(x) = \frac{1}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{0^+(-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۲۱ – گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{5x-2}-2)(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4)}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{5(x-2)}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2})+4} = \frac{5}{1\times(4+4+4)} = \frac{5}{12}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1(5)}{3\sqrt[3]{(5x-2)^2}}}{2x-3} = \frac{5}{12}$$

۲۲ – گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin u = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2} \ , \ 1+\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}}$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

چون داخل قدر مطلق، صفر است باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه نمود.

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{2}\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{-}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه کسینوس منفی است

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{2}\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{+}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ در ناحیه‌ی اول است و در این ناحیه کسینوس مثبت است

چون حد راست و حد چپ تابع در $x=\pi$ با هم برابر نیستند پس در $x=\pi$ حد وجود ندارد.

۲۳ – گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+\sqrt{4x^4-3x+1}}{5x^2+1} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+\sqrt{4x^4}}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+2x^2}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(a+2)x^2}{5x^2}$$

$$= \frac{a+2}{5} = \frac{4}{5} \to a+2=4 \to a=2$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^2-a^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

۲۴ – گزینه ۲ نمودار تابع داده شده از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = \frac{0-0+2b}{0-3} \Rightarrow b=0$$

تابع در $x=3$ مقدار ندارد ولی حد دارد و اولین قدم در مسائل حدی عددگذاری است.

$$x=۳ \xrightarrow{\text{تابع}} \frac{۵۴-۳a+۲b}{۰} = \frac{۵۴-۳a}{۰} \xrightarrow[\text{رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{این کسر حتماً } \frac{۰}{۰} \text{ بوده که پس از}} ۵۴-۳a=۰ \to a=۱۸$$

پس $a+۳b=۱۸+۰=۱۸$ است.

۲۵ - گزینه ۴ چون جواب حد عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند بنابراین $b=۲$ است. دقت کنید اگر $۰ \le b < ۲$ باشد نیز بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابر می‌شوند ولی جواب حد $\frac{۲}{۳}$ می‌شود که خلاف فرض است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۲+۲x^۲+۵}{۳x^۲-x+۱} \stackrel{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a+۲)x^۲}{۳x^۲} = \frac{a+۲}{۳} = ۲ \to a+۲=۶ \to a=۴$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{x^۲+x-۲}{x^۳-۴x+۳} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to۱} \frac{۲x+۱}{۳x^۲-۴} = \frac{۲+۱}{۳-۴} = -۳$$

۲۶ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=۶ \to \lim\limits_{x\to۳^+} (ax+۲b)=۶ \to ۳a+۲b=۶ \\ \lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=۲ \to \lim\limits_{x\to۳^-} (ax^۲+bx+۲)=۲ \to ۹a+۳b=۰ \end{array}\right\} \to b=۶\,,\ a=-۲$$

پس $a+b=۴$ است.

۲۷ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۳+\sqrt{۴x^۲-x}}{۷x-۱} \stackrel{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۷x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۲|\overset{-}{\overbrace{x}}|}{۷x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax-۲x}{۷x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(a-۲)x}{۷x} = \frac{a-۲}{۷} = \frac{-۳}{۷} \to a-۲=-۳ \to a=-۱$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{x^۳+a}{x^۲+x+۲a} = \lim_{x\to۱} \frac{x^۳-۱}{x^۲+x-۲} = \lim_{x\to۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x+۲)} = \frac{۱+۱+۱}{۱+۲} = ۱$$

۲۸ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+۳\sqrt{x}-۱}{۲x+\sqrt[۳]{x}-۲} \stackrel{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{۲x} = \frac{a}{۲} = ۳ \to a=۶$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^۲-a-۳۰}{x^۲-۷x+a} = \lim_{x\to۶} \frac{x^۲-۳۶}{x^۲-۷x+۶} = \lim_{x\to۶} \frac{(x-۶)(x+۶)}{(x-۶)(x-۱)} = \frac{۱۲}{۵}$$

۲۹ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to۱} \frac{ax^۳+bx^۲-bx+۴}{۲x^۳-۲} = \frac{a+b-b+۴}{۰} = \frac{a+۴}{۰}$$

چون جواب حد، برابر عدد شده است پس حتماً صورت نیز صفر بوده است که پس از رفع ابهام جواب حد، عدد شده است.

یعنی $a+۴=۰ \to a=-۴$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \stackrel{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^۳}{۲x^۳} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۴x^۳}{۲x^۳} = -۲$$

۳۰ - گزینه ۴ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱} \frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}} = \lim_{x\to-۱} \frac{(x+\sqrt{۲x+۳})(x-\sqrt{۲x+۳})(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})(x-\sqrt{۲x+۳})}$$

$$\lim_{x\to-۱} \frac{(x^۲-۲x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۴-۳+x)(x-\sqrt{۲x+۳})} = \lim_{x\to-۱} \frac{(x+۱)(x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}$$

$$= \frac{-۴\times۴}{-۱-۱} = ۸$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-۱} \frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to-۱} \frac{۱+\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x+۳}}}{-\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۳-x}}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۴}} = ۸$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۴	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۴	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۴	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۴	۱۹ - ۳	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۴	۳۰ - ۴