نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{۲\cos ۲x - ۱}{۲\sin^۲ x + \sin x - ۱}$ کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$

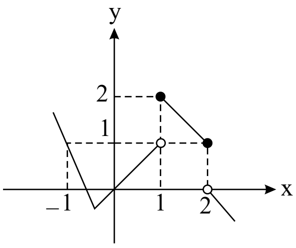
② $\frac{۲}{۳}$

③ $\frac{۴}{۳}$

④ $-\frac{۴}{۳}$

۲ - شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. تابع $g(x) = f(x) - [f(x)]$ در کدام‌یک از نقطه‌های زیر حد دارد؟

([ ]، نماد جزء صحیح است.)



① $x = -۱$

② $x = ۰$

③ $x = ۱$

④ $x = ۲$

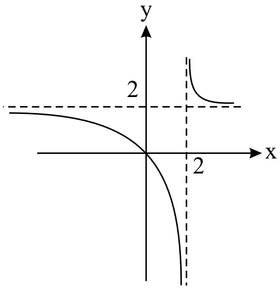
۳ - باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^{۱۰} + kx^۸ + ۲x^۳ - ۵x + ۲$ بر $x - ۱$ برابر با -۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x^۲ - x - ۲$ کدام است؟

① $۲x - ۴$

② $-۲x + ۴$

③ $۲x + ۴$

④ $-۲x - ۴$



۴ـ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $+\infty$

(۳) $-\infty$

(۴) صفر

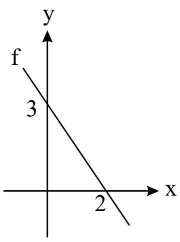
۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x(x-1)+x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]}{x^2\left(2+\left[-\dfrac{1}{x}\right]\right)+1}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\dfrac{3}{2}$

(۴) $-\dfrac{1}{2}$



۶ـ با توجه به نمودار تابع خطی f در شکل زیر، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+|x|}{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{3}{4}$

(۲) $-\dfrac{3}{4}$

(۳) $-\dfrac{15}{4}$

(۴) $\dfrac{15}{4}$

۷ـ اگر چندجمله‌ای $f(x)=x^2-x+2-2a$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۸ - اگر $L = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^3+2x^2+x+k}{1-x^2}$ باشد، مقدار $L-k$ کدام است؟ (L عددی حقیقی مشخص و مخالف صفر است.)

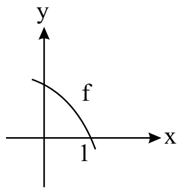
(۱) 1

(۲) -1

(۳) 5

(۴) -5

۹ - شکل روبه‌رو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) $-\infty$

(۳) $+\infty$

(۴) -1

۱۰ - تابع $f(x) = \dfrac{(a+1)x^3+bx^2-2}{ax^2+3x-2}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) 3

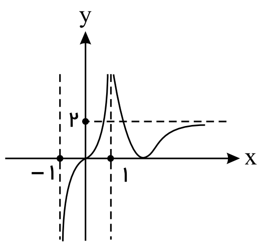
(۲) 4

(۳) -3

(۴) -4

۱۱ - تابع $f(x) = \dfrac{(2+a)x^3+5x-7}{2x^3-x^2+4}$ مفروض است. اگر نمودار تابع $g(x)$ مطابق شکل زیر باشد و داشته باشیم:

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-g(x)) = 1$ ، در این صورت مقدار a کدام است؟



(۱) 2

(۲) -2

(۳) 4

(۴) -4

۱۲ - با فرض $f(x)=-x^2+4x$، حاصل عبارت‌های $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to 2} f(x)]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

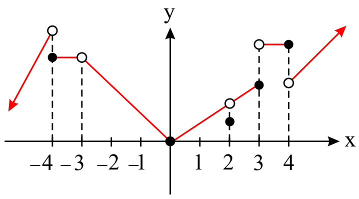
۱) ۴ و ۳

۲) ۳ و ۳

۳) ۳ و ۴

۴) ۴ و ۴

۱۳ - نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. مجموع طول نقاطی که تابع f در آنها حد ندارد، کدام است؟



۱) صفر

۲) -1

۳) 1

۴) 3

۱۴ - اگر $f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ; x<a\\ x^2-3x & ; x\ge a\end{cases}$، $a\in\mathbb{Z}$ و $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=0$ باشد، $f(-\frac{a}{3})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

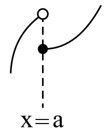
۱) 2

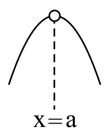
۲) -2

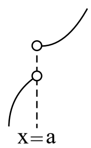
۳) -3

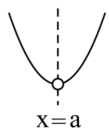
۴) -4

۱۵ - تابع مربوط به کدام نمودار، در $x=a$ تعریف‌شده نیست و حد ندارد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۶ - دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+b)\sqrt{a-x^2}}$ به‌صورت یک همسایگی محذوف ۱ است و شامل همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد. اگر این دامنه هیچ همسایگی راست عدد ۲ را نداشته باشد، $a+b$ کدام است؟ ($a>0$)

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۱۷ - در تابع $f(x)=\begin{cases} 3 & ;\ x\in\mathbb{Z} \\ -2 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)+f(2)$ کدام است؟

① -6
② 3
③ 9
④ -3

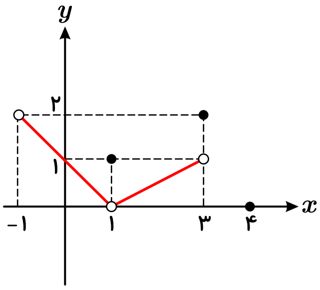
۱۸ - تابع $f(x)$، در $\mathbb{R}$ حد دارد. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f(x)+x}{2f^2(x)-8x^2}=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\left|f(x)-\dfrac{3}{4}\right|$ کدام است؟

① $\dfrac{9}{4}$
② 2
③ $\dfrac{3}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$

۱۹ - حد چپ تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ در نقطه‌ای به‌طول صحیح a، دو برابر حد راست تابع f در این نقطه است. a کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① 1
② -1
③ -2
④ 2

۲۰ - با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه صحیح است؟



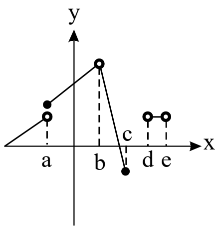
۱) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) = ۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱$

۲۱ - کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد تابع f که نمودار آن در شکل مقابل آورده شده است، درست است؟



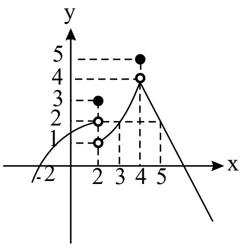
۱) تابع f در $x = a$ فقط حد راست دارد.

۲) حد چپ و راست تابع f در $x = c$ موجود است ولی با هم برابر نیستند.

۳) تابع f در $x = b$ دارای حد است.

۴) تابع f در $x = d$ حد چپ دارد.

۲۲ - شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x)$ است. حاصل عبارت $A = \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۴} f(x) + \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)$ کدام است؟



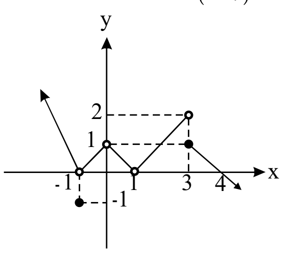
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۵

۲۳ - نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع f در $x = a$ حد نداشته باشد، حاصل عبارت $-f(a-۴) + \lim\limits_{x\to (a-۲)} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) صفر

۲۴- اگر $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\frac{۳}{۲}$ و $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=-۴$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to a}(f-۲g)(x)$ کدام است؟ $(g(a)\neq ۰)$

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۳

۲۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}(x^۲-۳x+۲)}{x^۲-۱}$ کدام است؟

(۱) -۴

(۲) -۱

(۳) $\frac{۱}{۴}$

(۴) ۴

۲۶- حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{x[x]-۶}{|۲x^۲-۲x-۱۲|}$ ، کدام است؟ ($[\,]$ ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) $-\frac{۱}{۴}$

(۲) $\frac{۱}{۴}$

(۳) $-\frac{۱}{۵}$

(۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۷- اگر حاصل حدِ تعریف شده $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{ax^۲+۴x}{x^۲-۴}=b$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲+۵x-۳a}{x^۲+۴b}$ کدام است؟ $(b\neq ۰)$

(۱) $-۰/۲۵$

(۲) $-۰/۳$

(۳) $۰/۷$

(۴) $-۰/۷$

۲۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{|۱+\cos x|}{\sin^۲ x}$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$

② $\frac{۱}{۲}$

③ ۱

④ -۱

۲۹ - کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست عدد ۲ است؟

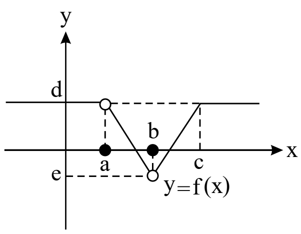
① $(۲,۳)$

② $(۱,۲)$

③ $(۰,۴)$

④ $(۱,۳)-\{۲\}$

۳۰ - تابعی که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده است، در چند نقطه حد ندارد؟



① ۱

② ۲

③ ۳

④ در تمام نقاط حد دارد.

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2(1-2\sin^2 x) - 1}{2\sin^2 x + 2\sin x - \sin x - 1}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{2\sin x(\sin x + 1) - (\sin x + 1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x + 1)}{\sin x + 1} = \frac{-(2\times\frac{1}{2}+1)}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

۲ - گزینه ۳

گزینهٔ ۱: $\begin{cases} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) - [f(x)] = 1 - [1^-] = 1 - 0 = 1 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) - [f(x)] = 1 - [1^+] = 1 - 1 = 0 \end{cases}$ حد ندارد.

گزینهٔ ۲: $\begin{cases} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) - [f(x)] = 0 - [0^+] = 0 - 0 = 0 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) - [f(x)] = 0 - [0^-] = -(-1) = 1 \end{cases}$ حد ندارد.

گزینهٔ ۳: $\begin{cases} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) - [f(x)] = 2 - [2^-] = 2 - 1 = 1 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) - [f(x)] = 1 - [1^-] = 1 - 0 = 1 \end{cases}$ حد دارد.

گزینهٔ ۴: $\begin{cases} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - [f(x)] = 0 - [0^-] = -(-1) = 1 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) - [f(x)] = 1 - [1^+] = 1 - 1 = 0 \end{cases}$ حد ندارد.

۳ - گزینه ۳

$$f(x) = x^{10} + kx^8 + 2x^3 - 5x + 2$$

$$\text{باقی‌ماندهٔ } f(x) \text{ بر } x-1 = f(1) = -4 \Rightarrow 1 + k + 2 - 5 + 2 = -4 \Rightarrow k = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{10} - 4x^8 + 2x^3 - 5x + 2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ عبارت درجهٔ اولی به‌صورت $ax + b$ است. با توجه به رابطهٔ تقسیم داریم:

$$x^{10} - 4x^8 + 2x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x+1)q(x) + ax + b$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^{10} - 4\times 2^8 + 16 - 10 + 2 = 0 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 8$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^{10} - 4 - 2 + 5 + 2 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = 2$$

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 2x + 4$$

۴ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} fof(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$$

توجه کنید وقتی $x \to +\infty$ تابع $f(x)$ با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شوند، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2^+ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right) = \lim_{t\to 2^+} f(t)=+\infty$$

۵ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=\left[\frac{1}{-\infty}\right]=\left[0^-\right]=-1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]=\left[0^+\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3x+x^2\left[\frac{1}{x}\right]}{x^2\left(2+\left[-\frac{1}{x}\right]\right)+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3x-x^2}{x^2(2+0)+1} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

۶ - گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$ و $A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ را می‌نویسیم.

$$\frac{y-3}{x}=\frac{3-0}{0-2}=\frac{-3}{2}\to 2y-6=-3x\to y=-\frac{3}{2}x+3\to f(x)=-\frac{3}{2}x+3$$

اکنون باید ضابطهٔ معکوس تابع را به‌دست آوریم (x را برحسب y به‌دست آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.)

$$y=-\frac{3}{2}x+3\to\frac{3}{2}x=-y+3\to 3x=-2y+6\to x=-\frac{2}{3}y+2\to f^{-1}(x)=-\frac{2}{3}x+2$$

پس: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+|x|}{f^{-1}(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{3}{2}x+3+|\overbrace{x}^{+}|}{-\frac{2}{3}x+2} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{3}{2}x+x}{-\frac{2}{3}x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{2}x}{\frac{-2}{3}x}=\frac{3}{4}$$

۷ - گزینه ۳ از آنجایی‌که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، لذا $f(-2)=0$ خواهد بود.

$$f(-2)=0\Rightarrow 4+2+2-2a=0\Rightarrow a=4$$

درنتیجه $f(x)=x^2-x-6$ می‌باشد. برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-4)$ کافی است $f(4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(4)=4^2-4-6=6$$

۸ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^3+2x^2+x+k}{1-x^2}=\frac{-3+2-1+k}{0}=\frac{-2+k}{0}$$

چون حاصل حد برابر با یک عدد حقیقی شده است پس حد صورت هم باید صفر باشد چون در غیر این صورت حاصل حد، نامتناهی می‌شود پس $k=2$ است.

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^3+2x^2+x+2}{1-x^2}=\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-1}\frac{9x^2+4x+1}{-2x}=\frac{9-4+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

اگر نخواستید از روش هوپیتال استفاده کنید می‌توانید صورت و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x+1$ تقسیم کنید و در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x^2-x+2)}{(1-x)(1+x)}=\frac{6}{2}=3$$

پس $L-k=1$ است.

۹ - گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع f، وقتی با مقادیر کمتر از یک به عدد یک نزدیک می‌شویم، $f(x)$ با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. همچنین داریم:

$$\lim_{x\to1^-}f(x-1)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\text{عدد مثبت}$$

درنتیجه:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x-1)}{f(x)}=\frac{\text{عددی مثبت}}{0^+}=+\infty$$

۱۰ - گزینه ۲ چون حاصل حد تابع f وقتی $x\to+\infty$ عددی حقیقی شده، بنابراین باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکسان باشد، پس باید ضریب x^3 در صورت صفر باشد:

$$a+1=0\Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2-2}{-x^2+3x-2}=-2\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2}{-x^2}=-2\Rightarrow -b=-2\Rightarrow b=2$$

حال حاصل $\lim_{x\to1}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{-x^2+3x-2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x-2)}=\frac{2(2)}{-(-1)}=4$$

البته می‌توانید از روش هوپیتال نیز استفاده کنید.

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{4x}{-2x+3}=\frac{4}{1}=4$$

۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)=۱$$

با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=۲$ بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-۲=۱\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=۳$$

حال با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲+a)x^۳+۵x-۷}{۲x^۳-x^۲+۴}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲+a)x^۳}{۲x^۳}=\frac{۲+a}{۲}\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۳\Rightarrow ۲+a=۶\Rightarrow a=۴$$

۱۲ - گزینه ۳

$$f(x)=-x^۲+۴x=-(x-۲)^۲+۴\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}[f(x)]=[۰^-+۴]=[۴^-]=۳\\ \lim\limits_{x\to۲^-}[f(x)]=[۰^-+۴]=[۴^-]=۳\end{cases}\to\lim_{x\to۲}[f(x)]=۳$$

درضمن : $\lim\limits_{x\to۲}f(x)=۴\to[\lim\limits_{x\to۲}f(x)]=[۴]=۴$

۱۳ - گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع، مشخص است که تابع در نقاط ۴−، ۳ و ۴ حد ندارد، پس مجموع طول نقاطی که تابع f در آنها حد ندارد به‌صورت زیر است.

$$-۴+۳+۴=۳$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}(x^۲-۳x)=a^۲-۳a\quad,\quad\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}[x]-۳=a-۱-۳=a-۴$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)=۰\Rightarrow a^۲-۳a-a+۴=۰\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰$$

$$\Rightarrow(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۲\Rightarrow f(x)=\begin{cases}[x]-۳ & ,\ x<۲\\ x^۲-۳x & ,\ x\geq ۲\end{cases}$$

$$f(-\frac{a}{۳})=f(-\frac{۲}{۳})=[-\frac{۲}{۳}]-۳=-۱-۳=-۴$$

۱۵ - گزینه ۳ گزینهٔ ۱) تابع در $x=a$ تعریف‌شده است ولی حد ندارد، زیرا حد چپ و راست در این نقطه، دو عدد متفاوت هستند.

گزینهٔ ۲) تابع در $x=a$ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

گزینهٔ ۳) تابع در $x=a$ تعریف نشده و حد هم ندارد، زیرا حد چپ و راست در این نقطه، دو عدد متفاوت هستند.

گزینهٔ ۴) تابع در $x=a$ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

۱۶ - گزینه ۳

$$x+b\neq۰\to x\neq-b\ ,\ a-x^۲>۰\to x^۲<a\to-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\to D_f=(-\sqrt{a},\sqrt{a})-\{-b\}$$

چون دامنهٔ تابع به‌صورت یک همسایگی محذوف ۱ است، پس داریم:

$$-b=۱\Rightarrow b=-۱$$

همچنین چون دامنهٔ تابع شامل همسایگی چپ ۲ می‌باشد ولی شامل هیچ همسایگی راست ۲ نیست، پس داریم:

$$\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴\Rightarrow D_f=(-۲,۲)-\{-۱\}$$

پس : $a+b=۴+(-۱)=۳$

۱۷ - گزینه ۴ وقتی $x\to a$، می‌توان نتیجه گرفت که x در یک همسایگی از عدد a قرار می‌گیرد که حتماً غیرصحیح است پس: وقتی x به هر سه عدد نزدیک می‌شود مقدار حد ۲− می‌شود و $f(۲)=۳$ خواهد بود.

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $=-۲+(-۲)+(-۲)+۳=-۳$

۱۸ - گزینه ۱ چون تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ حد دارد، فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=L$ پس:

$$\frac{۳L+۱}{۲L^۲-۸}=۱\Rightarrow ۲L^۲-۸=۳L+۱\Rightarrow ۲L^۲-۳L-۹=۰$$

$$\Rightarrow(۲L+۳)(L-۳)=۰\Rightarrow L=-\frac{۳}{۲},L=۳$$

$$L=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to۱}\left|f(x)-\frac{۳}{۴}\right|=\left|\lim_{x\to۱}f(x)-\frac{۳}{۴}\right|=\left|-\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۴}\right|=\left|-\frac{۹}{۴}\right|=\frac{۹}{۴}$$

$$L = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| = \left|\lim_{x\to 1} f(x)-\frac{3}{4}\right| = \left|3-\frac{3}{4}\right| = \frac{9}{4}$$

۱۹ ـ گزینه ۴

می‌دانیم که $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & , x\in\mathbb{Z} \\ -1 & , x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است.

ابتدا ضابطهٔ f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = [x]+3([x]+[-x]) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x & ; x\in\mathbb{Z} \\ [x]-3 & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = [a^-]-3 = a-1-3 = a-4 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = [a^+]-3 = a-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فرض سوال}} a-4 = 2a-6 \Rightarrow a = 2$$

توجه: در مسائل حدی، همواره عدد موردنظر غیرصحیح است چون متغیر به سمت آن عدد میل می‌کند و هرگز به آن نمی‌رسد و در همسایگی آن عدد قرار دارد.

۲۰ ـ گزینه ۴ تابع برای $x>4$ تعریف نشده است پس گزینهٔ یک نادرست است.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ پس گزینهٔ دو نادرست است.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$ پس $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ وجود ندارد بنابراین گزینهٔ سه نادرست است.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ پس گزینهٔ چهار درست است.

۲۱ ـ گزینه ۳ تابع f در $x=a$ هم حدراست و هم حد چپ دارد پس گزینهٔ ۱ نادرست است.

تابع f در $x=c$ فقط حد چپ دارد پس گزینهٔ ۲ نادرست است.

تابع f در $x=b$ دارای حد چپ و راست برابر است و حد دارد پس گزینهٔ ۳ درست است.

تابع f در $x=d$ فقط حد راست دارد پس گزینهٔ ۴ نادرست است.

۲۲ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \quad ، \quad \lim_{x\to 4} f(x) = 4 \quad ، \quad \lim_{x\to (-2)^+} f(x) = 0 \Rightarrow A = 1+4+0 = 5$$

۲۳ ـ گزینه ۱ با توجه به شکل حد چپ و راست تابع f در $x=3$ برابر نیستند، پس تابع f در $x=3$ حد ندارد و $a=3$.

$$\Rightarrow -f(a-4)+\lim_{x\to (a-2)} f(x) = -f(3-4)+\lim_{x\to (3-2)} f(x) = -f(-1)+\lim_{x\to 1} f(x) = -(-1)+0 = 1$$

۲۴ ـ گزینه ۳ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ باشند؛ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1+L_2 = \frac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} = -4 \to L_1 = -4L_2 \end{array}\right\} L_1 = 2, L_2 = -\frac{1}{2}$$

پس: $\lim\limits_{x\to a}(f-2g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - 2\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 - 2L_2 = 2-2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

۲۵ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}(x^2-3x+2)}{x^2-1} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}(x-2)}{(x+1)} = \frac{2(-1)}{2} = -1$$

۲۶ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 3^-}[x] = [3^-] = 2 \to \lim_{x\to 3^-}\frac{2x-6}{|2x^2-2x-12|} = \frac{0}{0}$$

$$\to \lim_{x\to 3^-}\frac{2(x-3)}{2|x^2-x-6|} = \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)}{\underbrace{|x-3|}_{-}\underbrace{|x+2|}_{+}} = \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)}{-(x-3)(x+2)} = -\frac{1}{5}$$

۲۷ ـ گزینه ۱

چون $x=2$ مخرج کسر را صفر می‌کند پس صورت کسر هم به ازای $x=2$ باید صفر شود تا حد به‌دست آید. یعنی داریم:

$$a(2)^2+4(2) = 0 \to 4a+8 = 0 \to a = -2$$

پس: $\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{x^2+5x-3a}{x^2+4b} \to \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x^2+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{-4}{4} = -1 \to b = -1$

$$= \lim_{x\to(-2)} \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to(-2)} \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{-4} = -0/25$$

۲۸ - گزینه ۲

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس $1+\cos x$ همواره مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\overbrace{|1+\cos x|}^{+}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

۲۹ - گزینه ۱ اگر $r > 0$ باشد، بازهٔ $(a, a+r)$ را یک همسایگی راست عدد a می‌گوییم.

با توجه به تعریف فوق بازهٔ $(2,3)$ همسایگی راست ۲ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

بازهٔ $(1,2)$ همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد.

بازهٔ $(0,4)$ یک همسایگی ۲ است.

مجموعهٔ $(1,3) - \{2\}$ همسایگی محذوف ۲ می‌باشد.

۳۰ - گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع داده‌شده، داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = d \ , \ \lim_{x\to b} f(x) = e \ , \ \lim_{x\to c} f(x) = d$$

توجه کنید که حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه ارتباطی ندارد، پس این تابع در تمام نقاط حد دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۳	۲۹ - ۱
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۴	۲۵ - ۲	۳۰ - ۴