نام آزمون: حد

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر $f(۲x+۳)=\dfrac{۳x^۲+x-۲}{۱-x^۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۷}{۲}$

۲) $\dfrac{۵}{۲}$

۳) $-\dfrac{۵}{۲}$

۴) موجود نیست.

۲ - حد عبارت $\dfrac{x-\sqrt{x^۲+۲x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+x}}$ وقتی $x\to -\infty$ کدام است؟

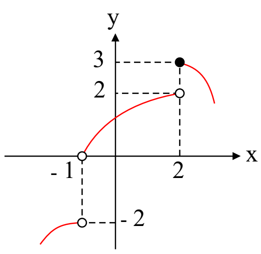
۱) صفر

۲) ۲

۳) $\dfrac{۱}{۳}$

۴) $\dfrac{۲}{۵}$

۳ - اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(۱-x)$ کدام است؟



۱) -۱

۲) -۲

۳) ۲

۴) صفر

۴- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x+1}+ax+b\right)=3$ ، آنگاه $a-b$ کدام است؟

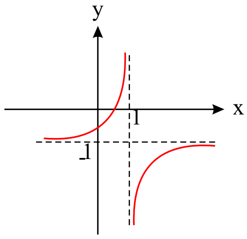
(۱) 3

(۲) 2

(۳) -2

(۴) -3

۵- منحنی تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ ، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to(-L)^-}f(x)$ کدام است؟



(۱) 1

(۲) -1

(۳) $+\infty$

(۴) $-\infty$

۶- اگر $\lim\limits_{x\to1}\frac{b-x^2}{1-\sqrt{x}}=k$ باشد، آنگاه حاصل $b-k$ کدام است؟ (k عددی صحیح، متناهی و غیرصفر است.)

(۱) 3

(۲) -3

(۳) -4

(۴) 4

۷- اگر $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{4x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

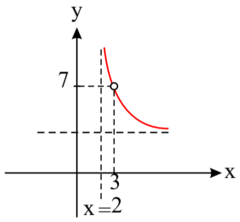
(۱) -2

(۲) 2

(۳) -4

(۴) 4

۲



۸- اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{۲x^۲+ax+b}{x^۲+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab+cd$ کدام است؟

(۱) -۱۵
(۲) ۱۵
(۳) ۳۰
(۴) -۳۰

۹- حد راست تابع $y=x[\dfrac{۳}{-x}]$ در نقطهٔ $x=۳$ از حد چپ در همین نقطه چقدر بیش‌تر است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۰- اگر $۱=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|۳a|x^۵-ax^n+۷x^۲-۲}{۴x^۵+۱}$، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

۱۱- حد عبارت $\dfrac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x}$ وقتی $x\to\dfrac{\pi}{۴}$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۱۲ـ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^{۳} - ax^{۲} + bx + ۱$ بر چندجمله‌ای‌های $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای $۲x - ۱$ کدام است؟

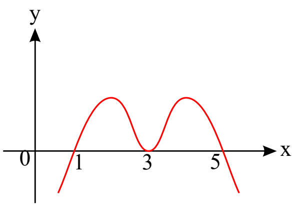
① صفر

② ۱

③ -۱

④ ۲

۱۳ـ نمودار تابع f به‌صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۵} \dfrac{(-۱)^{[x]}}{f(x) - f(x-۴)}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



① $-\infty$

② ۱

③ -۱

④ $+\infty$

۱۴ـ حاصل $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{[x] + [-x]}{|x - ۳|}$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

① $+\infty$

② صفر

③ $-\infty$

④ -۱

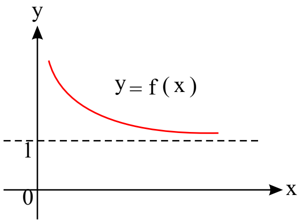
۱۵ـ مقدار $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + ۱)\left[\dfrac{۲}{۱ - x}\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① -۲

② $+\infty$

③ صفر

④ $-\infty$



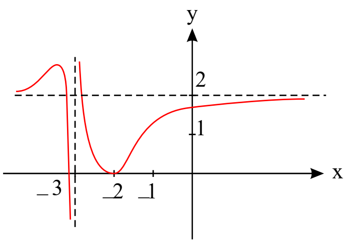
۱۶ـ باتوجه به نمودار تابع $y = f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{۱ - f(x)}$ کدام است؟

① $-\dfrac{۱}{۲}$

② ۱

③ -۱

④ $\dfrac{۱}{۲}$



۱۷ـ اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to (-۳)^+} \dfrac{-x + ۱}{(fof)(x) - ۲}$ کدام است؟

① ۲

② $-\infty$

③ ۱

④ $+\infty$

۱۸ـ اگر $f(x) = \dfrac{(m^۲ - ۱)x^۴ + (۲m + ۳)x^۳ + ۲x^۲ - ۱}{mx + ۵}$ و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ باشد، مقدار m کدام است؟

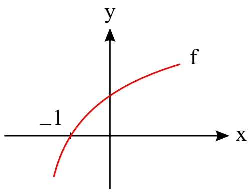
① ۱

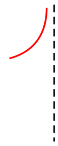
② هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

③ ± ۱

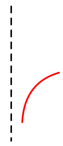
④ -۱

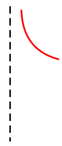
۱۹- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x=-1$ به‌کدام صورت است؟



(۱) 

(۲) 

(۳) 

(۴) 

۲۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-5$ و $x-4$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، نمودار تابع $y=f(f(x))+2x$، خط $x=4$ را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۱) ۸
(۲) ۱۵
(۳) ۱۱
(۴) ۵

۲۱- اگر $(c, 2a+b)\cup(3b-2a, 7)$ یک همسایگی محذوف عدد ۴ باشد، آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی برای کدام‌یک از عددهای زیر است؟

(۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{8}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{9}{4}$

۲۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{x^۲-[x+۱]}{۲x-\sqrt{x}-۱}$ برابر کدام است؟

① ۲

② $\dfrac{۲}{۳}$

③ $\dfrac{۴}{۳}$

④ ۴

۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\sqrt{\cos x}}{\tan^۲ x}$ برابر کدام است؟

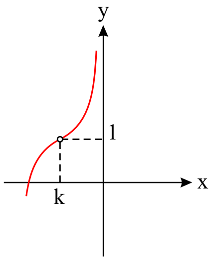
① $\dfrac{۱}{۲}$

② $\dfrac{۱}{۴}$

③ $\dfrac{۱}{۸}$

④ $\dfrac{۱}{۱۶}$

۲۴- اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to k^+} \dfrac{x}{۱-f(x)}$ کدام است؟



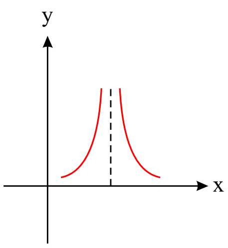
① $+\infty$

② $-\infty$

③ صفر

④ $-k$

۲۵- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۲x+a}{۴x^۲+bx+۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



① $(۰,۴)$

② $(۰,-۴)$

③ $(-۲,۴)$

④ $(-۲,-۴)$

۲۶- اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(a+۲)x^۳+bx^۲-۱}{ax^۲+۱}=۲$ باشد، $a-b$ کدام است؟

① -۲

② ۲

③ -۴

④ ۴

۲۷- اگر بازهٔ $\left(\dfrac{x+۵}{x+۱}, ۲x-۱\right)$ یک همسایگی $\dfrac{۱}{۲}$ باشد، حدود x کدام است؟

① $\mathbb{R}-(-۸,-۱)$

② $(-\infty,-۹)\cup(-۱,\frac{۳}{۴})$

③ $\mathbb{R}-(-۹,-۱)$

④ $(-\infty,-۸)\cup(-۱,\frac{۳}{۴})$

۲۸- حاصل حدهای $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\dfrac{۳}{\cos x}\right]$ و $\lim\limits_{x\to ۰}[۳\sin x]$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

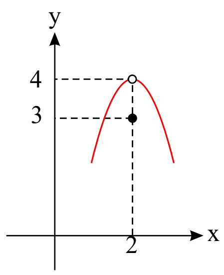
① ۳ و صفر

② ۲ و صفر

③ ۳ و حد ندارد.

④ هیچ‌کدام حد ندارد.

۲۹- نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل $\left[\lim\limits_{x\to ۲} f(x)\right]-\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)



① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2+3x-6}{3x^2-x-10}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{(۲x+۳)\to ۱} f(۲x+۳)=\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^۲+x-۲}{۱-x^۲}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۳x-۲)}{(۱-x)(۱+x)}=\frac{-۵}{۲}$$

توجه: $(۲x+۳)\to ۱ : ۲x+۳=۱\Rightarrow x=-۱$

۲ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲+۲x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲}}{۳x+\sqrt{۴x^۲}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-|\overbrace{x}^{-}|}{۳x+۲|\overbrace{x}^{-}|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+x}{۳x-۲x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x}{x}=۲$$

۳ ـ گزینه ۴

$$x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow -x>-۲\Rightarrow ۱-x>-۱$$

پس وقتی $x\to ۲^-$ آنگاه $۱-x\to(-۱)^+$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(۱-x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱^+)=۰$$

۴ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^۲+۲x-۱}{x+۱}+ax+b\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^۲+۲x-۱+ax^۲+ax+bx+b}{x+۱}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(۱+a)x^۲+(۲+a+b)x-۱+b}{x+۱}\right)$$

چون جواب حد عددی غیر صفر شده است بنابراین بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند بنابراین $x^۲$ باید از صورت حذف شود پس ضریبش باید صفر باشد یعنی:

$$۱+a=۰\to a=-۱\xrightarrow{\text{توان بیش‌تر}}\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(۲+a+b)x}{x}\right)=۲+a+b=۱+b=۳\to b=۲$$

پس $a-b=-۱-۲=-۳$ است.

۵ ـ گزینه ۳ باتوجه به شکل مشخص است که تابع در $-\infty$ به (-۱) نزدیک می‌شود. بنابراین $L=-۱$ و با توجه به شکل، حد خواسته شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x\to(-L)^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=+\infty$$

۶ ـ گزینه ۲ اولین قدم در حل مسائل حدی، عددگذاری است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{b-x^۲}{۱-\sqrt{x}}=\frac{b-۱}{۰}\xrightarrow[\text{کسر } \frac{۰}{۰} \text{ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.}]{\text{چون جواب حد، عدد شده است حتماً این}} b-۱=۰\to b=۱$$

پس: $\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x^۲}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱+x)(۱-x)(۱+\sqrt{x})}{(۱-x)}=۴=k$

پس $b-k=۱-۴=-۳$ است.

البته توجه کنید برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توانید استفاده کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x^۲}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{-۲x}{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{-۲}{-\frac{۱}{۲}}=۴$$

۷ ـ گزینه ۳ صورت کسر به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ منفی است و چون جواب حد برابر $-\infty$ شده است بنابراین مخرج باید ۰^+ باشد پس حتماً $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است یعنی مخرج به‌صورت $۴(x-\frac{۱}{۲})^۲$ است.

$$۴(x-\frac{۱}{۲})^۲=۴(x^۲-x+\frac{۱}{۴})=۴x^۲-۴x+۱\xrightarrow{\text{مقایسه با مخرج}}\begin{cases}a=-۴\\ b=۱\end{cases}\to ab=-۴$$

۸ ـ گزینه ۱ تابع در $x=۲$ نامتناهی می‌شود بنابراین $x=۲$ ریشهٔ مخرج است.

$$x=۲\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۴+۲c+d=۰\to ۲c+d=-۴$$

تابع در $x=۳$ توخالی است بنابراین $x=۳$ ریشهٔ مخرج است.

$$x=۳\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۹+۳c+d=۰\to ۳c+d=-۹$$

از حل دو معادله به جواب $c=-۵$ و $d=۶$ می‌رسیم پس مخرج $x^۲-۵x+۶$ یا همان $(x-۲)(x-۳)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x=۳$ حدی برابر ۷ دارد.

$$x=۳\to \frac{۱۸+۳a+b}{۰}\xrightarrow[\text{جوابش ۷ شده است.}]{\text{این کسر حتماً } \frac{۰}{۰} \text{ بوده که پس از رفع ابهام}} ۱۸+۳a+b=۰$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x^۲+ax+b}{(x-۲)(x-۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(۲x+a+۶)}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{۱۲+a}{۱}=۷\to a=-۵, b=-۳$$

پس $ab+cd=۱۵-۳۰=-۱۵$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $۲x^۲+ax+b$ را به‌صورت $(x-۳)(۲x+a+۶)$ نوشتیم باید توجه کنید که $۲x^۲+ax+b$ را بر $x-۳$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲+ax+b & x-۳ \\ \cline{2-2} & ۲x+a+۶ \\ \underline{-۲x^۲+۶x} & \\ (a+۶)x+b & \\ \underline{-(a+۶)x+۳a+۱۸} & \\ \underbrace{۳a+۱۸+b}_{\text{صفر است}} & \end{array}$$

$$\to ۲x^۲+ax+b=(x-۳)(۲x+a+۶)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim_{x\to ۳}\frac{۲x^۲+ax+b}{x^۲-۵x+۶}$ می‌توان از روش هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x^۲+ax+b}{x^۲-۵x+۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{۴x+a}{۲x-۵}=\frac{۱۲+a}{۱}=۷\to a=-۵$$

۹ ـ گزینه ۳

$$x\to ۳^+ : x>۳\to \frac{۱}{x}<\frac{۱}{۳}\to \frac{۳}{x}<۱\to -\frac{۳}{x}>-۱$$

پس: $\lim_{x\to ۳^+} x[\frac{۳}{-x}]=۳[(-۱)^+]=۳(-۱)=-۳$

$$x\to ۳^- : x<۳\to \frac{۱}{x}>\frac{۱}{۳}\to \frac{۳}{x}>۱\to \frac{-۳}{x}<-۱$$

پس: $\lim_{x\to ۳^-} x[\frac{۳}{-x}]=۳[(-۱)^-]=۳(-۲)=-۶$

بنابراین حد راست ۳ واحد بیش‌تر از حد چپ است.

۱۰ ـ گزینه ۲ چون جواب حد، عددی غیرصفر شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند.

حالت اول: وقتی $n<۵$ است.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{|۳a|x^۵}{۴x^۵}=\frac{|۳a|}{۴}=۱\to |۳a|=۴\to ۳a=\pm ۴\to a=\pm\frac{۴}{۳}$$

حالت دوم: وقتی $n=۵$ است.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{|۳a|x^۵-ax^۵}{۴x^۵}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(|۳a|-a)x^۵}{۴x^۵}=\frac{|۳a|-a}{۴}=۱$$

$$\to |۳a|-a=۴\to \begin{cases} a\ge ۰\to ۳a-a=۴\to ۲a=۴\to a=۲ \quad \text{ق ق} \\ a<۰\to -۳a-a=۴\to -۴a=۴\to a=-۱ \quad \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{۴}{۳}-\frac{۴}{۳}+۲-۱=۱$ است.

۱۱ ـ گزینه ۲ می‌دانیم $\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\tan x}-\frac{۱}{\sqrt{\tan x}}}{\cos ۲x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\tan x-۱}{\sqrt{\tan x}}}{\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(\tan x-۱)(۱+\tan^۲ x)}{\sqrt{\tan x}(۱-\tan^۲ x)}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{-(۱-\tan x)(۱+\tan^۲ x)}{\sqrt{\tan x}(۱+\tan x)(۱-\tan x)}=\frac{-(۱+۱)}{۱(۱+۱)}=-۱$$

۱۲ ـ گزینه ۱ چون $p(x)=x^۳-ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p(۲)=۰\Rightarrow ۸-۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a-۲b=۹ \\ p(-۱)=۰\Rightarrow -۱-a-b+۱=۰\Rightarrow a+b=۰\end{array}\right\}\to a=\frac{۳}{۲}, b=-\frac{۳}{۲}$$

پس $p(x)=x^{۳}-\frac{۳}{۲}x^{۲}-\frac{۳}{۲}x+۱$ است.

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow p(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۸}-\frac{۳}{۴}+۱=۰$$

۱۳ - گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در ۵ $x=$ محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۵^-}\frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)}=\frac{(-۱)^{[۵^-]}}{f(۵^-)-f(۵^--۴)}=\frac{(-۱)^{۴}}{۰^+-f(۱^-)}$$

$$=\frac{۱}{۰^+-۰^-}=\frac{۱}{۰^++۰^+}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۵^+}\frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)}=\frac{(-۱)^{[۵^+]}}{f(۵^+)-f(۵^+-۴)}=\frac{(-۱)^{۵}}{۰^--f(۱^+)}$$

$$=\frac{-۱}{۰^--۰^+}=\frac{-۱}{۰^-+۰^-}=+\infty$$

بنابراین جواب حد داده شده برابر $+\infty$ است.

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to a}([x]+[-x])=-۱$ است.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{[x]+[-x]}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۱}{\underbrace{|x-۳|}_{\text{همواره مثبت}}}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

۱۵ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty}(x+۱)\left[\frac{۲}{۱-x}\right]=(+\infty+۱)\left[\frac{۲}{۱-(+\infty)}\right]=+\infty[\frac{۲}{-\infty}]$$

$$=+\infty[۰^-]=+\infty\times(-۱)=-\infty$$

۱۶ - گزینه ۱

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)}\times\frac{f(x)+\sqrt{f(x)}}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{f^{۲}(x)-f(x)}{(۱-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-f(x)(۱-f(x))}{(۱-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-f(x)}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\frac{-۱}{۱+\sqrt{۱}}=\frac{-۱}{۲}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to (-۳)^+}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to (-۳)^+}f(f(x))=\lim_{x\to +\infty}f(x)=۲^-$$

$$\lim_{x\to (-۳)^+}\frac{-x+۱}{(fof)(x)-۲}=\frac{-(-۳)+۱}{۲^--۲}=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

۱۸ - گزینه ۴ حالت ۱: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت چهار باشد داریم:

$$\lim_{x\to \pm\infty}f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(m^{۲}-۱)x^{۴}}{mx}=\lim_{x\to \pm\infty}(\frac{m^{۲}-۱}{m})x^{۳}$$

حد فوق در $x\to +\infty$ و $x\to -\infty$ متفاوت می‌باشد زیرا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}x^{۳}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}x^{۳}=-\infty\end{cases}$$

چون حد تابع در $x\to \pm\infty$ فقط برابر $-\infty$ می‌باشد، پس نمی‌تواند بزرگ‌ترین درجهٔ صورت برابر چهار باشد.

حالت ۲: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت سه باشد داریم:

$$m^{۲}-۱=۰\Rightarrow m=\pm ۱$$

$$m=۱\Rightarrow\lim_{x\to \pm\infty}\frac{۵x^{۳}+۲x^{۲}-۱}{x+۵}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{۵x^{۳}}{x}=\lim_{x\to \pm\infty}۵x^{۲}=۵(\pm\infty)^{۲}=+\infty$$

پس $m=۱$ غیر قابل قبول است.

$$m=-۱\Rightarrow\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^{۳}+۲x^{۲}-۱}{-x}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^{۳}}{-x}=\lim_{x\to \pm\infty}(-x^{۲})=-(\pm\infty)^{۲}=-\infty$$

بنابراین $m=-1$ قابل قبول است.

۱۹ - گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$\frac{2x+1}{f(x)}\geq 0 \Longrightarrow$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$
عبارت ≥ 0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Longrightarrow D_g=(-\infty,-1)\cup[-\frac{1}{2},+\infty)$$

باتوجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x=-1$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}=\sqrt{\frac{-2+1}{0^-}}=\sqrt{\frac{-1}{0^-}}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

۲۰ - گزینه ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-5$ و $x-4$ به‌ترتیب ۳ و ۵ است. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}x-4=0\Rightarrow x=4\Rightarrow f(4)=5\\ x-5=0\Rightarrow x=5\Rightarrow f(5)=3\end{aligned}\right\}(*)$$

برای محاسبهٔ محل برخورد نمودار تابع $y=f(f(x))+2x$ و خط $x=4$ باید در ضابطهٔ تابع داده شده، x را برابر ۴ قرار دهیم:

$$y=f(f(x))+2x\xrightarrow{x=4}y=f(f(4))+2(4)\xrightarrow{(*)}y=f(5)+8\xrightarrow{(*)}y=3+8=11$$

بنابراین تابع مورد نظر خط $x=4$ را در عرض ۱۱ قطع می‌کند.

۲۱ - گزینه ۳ توجه کنید $(a,b)\cup(b,c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است.

با توجه به تساوی $(3b-2a,7)\cup(c,2a+b)=(c,2a+b)\cup(3b-2a,7)$ داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=4\\3b-2a=4\end{cases}\Rightarrow 4b=8\Rightarrow b=2\Rightarrow 2a+b=4\xrightarrow{b=2}a=1$$

بازهٔ (a,b) برابر با $(1,2)$ است که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{4}{3}$ است.

۲۲ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-[x]-1}{2x-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\to\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}\times\frac{2x-1+\sqrt{x}}{2x-1+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(2x-1)^2-(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2-1)(2x-1+\sqrt{x})}{4x^2-5x+1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+1)(x-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(x-1)(4x-1)}=\frac{(2)(2)}{3}=\frac{4}{3}$$

البته توجه کنید که حد داده شده را به راحتی به روش هوپیتال می‌توان حل کرد.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

۲۳ - گزینه ۲ روش اول: با تبدیل $\tan^2x$ به $\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\tan^2x}:\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2x}\times\cos^2x=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos^2x}\times\cos^2x$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\times\cos^2x=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}\times\cos^2x$$

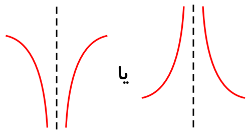
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=\frac{\cos^2(0)}{(1+\sqrt{\cos 0})(1+\cos 0)}=\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u\to0}(1-\cos^m u)\sim\frac{u^2}{2}\times m$ و $\lim_{u\to0}\tan^n u\sim u^n$ است.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^{\frac{1}{2}}x}{\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{2}}{x^2}=\frac{1}{4}$$

۲۴ - گزینه ۱ با توجه به نمودار، $k<0$ است، از طرفی وقتی $x\to k^+$، آنگاه $f(x)\to1^+$ بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+}\frac{x}{1-f(x)}=\frac{k}{0^-}=\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$$

۲۵ ـ گزینه ۲ شکل تابع در اطراف ریشهٔ مضاعف مخرج به صورت  یا است.

بنابراین مخرج باید دارای ریشهٔ مضاعف مثبت باشد.

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to b^۲ - ۱۶ = ۰ \to b = \pm ۴ \\ -\dfrac{b}{۲a} > ۰ \to -\dfrac{b}{۸} > ۰ \to b < ۰ \end{cases} \to b = -۴$$

چون جواب حد $+\infty$ شده پس صورت کسر به‌ازای ریشهٔ مخرج $(\frac{-b}{۲a})$ یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ باید یک عدد مثبت باشد:

$$۲(\frac{۱}{۲}) + a > ۰ \to ۱ + a > ۰ \to a > -۱$$

گزینهٔ دوم می‌تواند صحیح باشد.

۲۶ ـ گزینه ۲ چون حاصل حد عددی حقیقی و غیرصفر است، بنابراین باید درجهٔ صورت و مخرج یکسان باشد. درنتیجه صورت نیز باید از درجه دوم باشد. پس ضریب $x^۳$ باید صفر باشد:

$$a + ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

حال حد را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-bx^۲ - ۱}{۲x^۲ + ۱} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=} \lim_{x\to-\infty} \frac{bx^۲}{-۲x^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{b}{-۲} = ۲ \Rightarrow b = -۴$$

در نتیجه:

$$a - b = -۲ - (-۴) = ۲$$

۲۷ ـ گزینه ۲

عدد $\frac{۱}{۲}$ باید درون بازهٔ داده شده قرار داشته باشد.

$$\frac{۱}{۲} \in (۲x - ۱, \frac{x + ۵}{x + ۱}) \Rightarrow ۲x - ۱ < \frac{۱}{۲} < \frac{x + ۵}{x + ۱}$$

$$۲x - ۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow x < \frac{۳}{۴} \quad (I)$$

$$\frac{x + ۵}{x + ۱} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x + ۵}{x + ۱} - \frac{۱}{۲} > ۰ \Rightarrow \frac{۲x + ۱۰ - x - ۱}{۲(x + ۱)} > ۰ \Rightarrow \frac{x + ۹}{۲(x + ۱)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۹		-۱		$+\infty$
$\frac{x+۹}{۲(x+۱)}$		+	۰	−	ت ن	+	

$$\Longrightarrow x < -۹ \ \text{یا}\ x > -۱ \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x < -۹ \ \text{یا}\ -۱ < x < \frac{۳}{۴} \Rightarrow x \in (-\infty, -۹) \cup (-۱, \frac{۳}{۴})$$

۲۸ ـ گزینه ۳ هرگاه در مسائل حدی، کسینوس برابر یک شد حتما ۱^- است.

$$\lim_{x\to۰} \left[\frac{۳}{\cos x}\right] = \left[\frac{۳}{۱^-}\right] = [۳^+] = ۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \underset{\text{ناحیهٔ اول}}{\lim_{x\to۰^+}} [۳\sin x] = [۳ \times ۰^+] = [۰^+] = ۰ \\ \text{حد چپ} = \underset{\text{ناحیهٔ چهارم}}{\lim_{x\to۰^-}} [۳\sin x] = [۳ \times ۰^-] = [۰^-] = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to۰} [۳\sin x] : \text{حد ندارد.}$$

۲۹ ـ گزینه ۲ در $x \to ۲$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می‌شوند.

$$۲\lim_{x\to۲} [f(x)] - \left[\lim_{x\to۲} f(x)\right] = ۲[۴^-] - [۴] = ۲ \times ۳ - ۴ = ۲$$

۳۰ ـ گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to۲} \frac{۲x^۳ - ۴x^۲ + ۳x - ۶}{۳x^۲ - x - ۱۰} = \frac{۰}{۰} \to \lim_{x\to۲} \frac{۲x^۲(x - ۲) + ۳(x - ۲)}{(x - ۲)(۳x + ۵)} = \lim_{x\to۲} \frac{(x - ۲)(۲x^۲ + ۳)}{(x - ۲)(۳x + ۵)}$$

$$= \lim_{x\to۲} \frac{۲x^۲ + ۳}{۳x + ۵} = \frac{۸ + ۳}{۶ + ۵} = \frac{۱۱}{۱۱} = ۱$$

روش دوم: از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-4x^2+3x-6}{3x^2-x-10}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-8x+3}{6x-1}=\frac{11}{11}=1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۴	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲