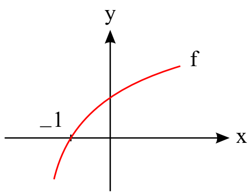
نام آزمون: مجانب قائم

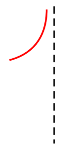
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

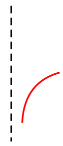
علی هاشمی

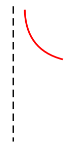
۱ - اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{f(x)}}$ در اطراف $x=-۱$ به‌کدام صورت است؟



① 

② 

③ 

④ 

۲ - به ازای چند مقدار برای a، تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۳+ax}$ دارای ۲ مجانب قائم است؟

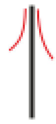
① ۴

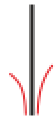
② ۲

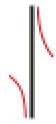
③ ۱

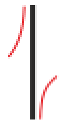
④ صفر

۳ - نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟

① 

② 

③ 

④ 

۴ - تابع $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{x(۲x-۱)^۲(x-۲)}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

① ۱

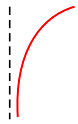
② ۲

③ ۳

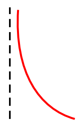
④ ۰

۵ - نمودار تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-x^۲}}{x-[x]}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

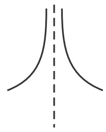
① 

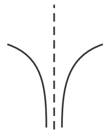
② 

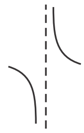
③ 

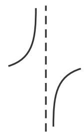
④ 

۶- نمودار تابع $y=\cot x-\cot ۳x$ در مجاورت خط $x=\pi$ چگونه است؟

① 

② 

③ 

④ 

۷- تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۹-x^۲}}{[x]+[-x]}$ دارای چند مجانب قائم است؟ ($[\ ]$، علامت جزء صحیح است.)

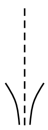
① بی‌شمار

② ۷

③ مجانب قائم ندارد.

④ ۵

۸- اگر نمودار تابع $y=\dfrac{a+۱}{x^۲+۲ax-۴a}$، در اطراف مجانب قائمش به‌صورت مقابل باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟



① ۳

② ۲

③ ۱

④ صفر

۹ - تابع $y=\dfrac{x+1}{|x|+|x-4|-4}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

① ۱

② ۰

③ ۲

④ بی شمار

۱۰ - نمودار تابع $y=\dfrac{\left[\dfrac{x}{3}\right]}{x(x^2-4)(x^2-9)}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

① ۵

② ۴

③ ۳

④ ۲

۱۱ - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-5}{-3x^2+ax+b}$ در مجاورت $x=3$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟

① ۴۵

② ۱۶

③ ۲۴

④ -8

۱۲ - تنها مجانب قائم $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+ax+b}$، $x=2$ است. $a+b$ کدام است؟

① صفر

② -3

③ -2

④ -3 یا صفر

۱۳ - کدام تابع خط مجانب قائم دارد؟

① $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۱}}+\dfrac{۱}{\sqrt{x+۱}}+\sqrt{۱-۴x^۲}$

② $y=\dfrac{\left(x^۲+۳x-۴\right)\left(x^۲-۳x-۴\right)}{\left|x^۲-۱\right|}$

③ $y=\dfrac{۱}{[x]}$

④ $y=\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x-x^۲}}$

۱۴ - تابع $f(x)=\dfrac{x\sqrt{۱۶-x^۲}}{\sin x}$ چند مجانب قائم دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۱۵ - تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۱}}{x-۲}-\dfrac{\sqrt{x-۲}}{x+۱}$ چند مجانب قائم دارد؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$\frac{2x+1}{f(x)} \ge 0 \Longrightarrow$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
عبارت ≥ 0	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$ $+$

$$\Longrightarrow D_g = (-\infty,-1)\cup[-\tfrac{1}{2},+\infty)$$

باتوجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x=-1$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}=\sqrt{\frac{-2+1}{0^-}}=\sqrt{\frac{-1}{0^-}}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

۲ - گزینه ۲ برای بررسی مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

دو حالت ایجاد می‌شود $x^3+ax=0\to x\cdot(x^2+a)=0\to$

$$\Rightarrow\begin{cases} a\ge 0 \;:\; x=0\;,\; x^2+a\ne 0 \\ a<0 \;:\; x=0\;,\; x=\pm\sqrt{-a}\end{cases}$$

در این حالت مخرج فقط یک ریشه دارد و نمی‌تواند دو مجانب قائم داشته باشد

در این حالت مخرج دارای ۳ ریشه است که یکی از آنها $x=0$ است و خط مجانب قائم می‌باشد و بین دو عدد $x=\pm\sqrt{-a}$ باید یکی از این اعداد ریشه صورت باشد و بعنوان مجانب قائم مورد قبول واقع نشود. برای این کار باید ریشه‌های صورت را در مخرج قرار دهیم.

ریشه‌های صورت : $x^2-3x+2=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=1 \xrightarrow{\text{مخرج}} a=-1 \\ x_2=2 \xrightarrow{\text{مخرج}} a=-4\end{cases}$

$$a=-1\;\Rightarrow\; f(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-2}{x\cdot(x+1)}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}$$ دو مجانب قائم

$$a=-4\;\Rightarrow\; f(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{x-1}{x\cdot(x+2)}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\end{cases}$$ دو مجانب قائم

بنابراین دو مقدار $\{-1,-4\}$ برای a وجود دارد تا منحنی فوق دارای دو خط مجانب قائم باشد.

۳ - گزینه ۳

$$x^3+x=0\to x(x^2+1)=0\to x=0$$

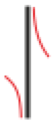
توجه: برای بررسی رفتار یک تابع در اطراف مجانب قائم آن، باید حد چپ و راست تابع را به‌ازای ریشهٔ مخرج بیابیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x(1)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \to \\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x(1)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \to \end{cases}$$

یعنی از راست به خط $x=0$ نزدیک می شویم باید به‌سمت بالا برویم

یعنی از چپ به خط $x=0$ نزدیک می شویم باید به‌سمت پایین برویم

در نتیجه تابع در اطراف مجانب قائم به شکل زیر می باشد:



۴ - گزینه ۱

توجه: برای بررسی رفتار یک تابع در اطراف مجانب قائم آن، باید حد چپ و راست تابع را به‌ازای ریشهٔ مخرج بیابیم.

$$f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x(2x-1)^2(x-2)}} : x(2x-1)^2(x-2)>0\Rightarrow D_f:(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{\sqrt{x\cdot(2x-1)^2(x-2)}}=0\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x}{\sqrt{x(2x-1)^2}\cdot\sqrt{x-2}}=+\infty\Rightarrow x=2\end{cases}$$ مجانب قائم

$x=\frac{1}{2}$ و $x=2$ و $x=0$ ریشه‌های مخرج هستند امّا $x=\frac{1}{2}$ در دامنه نیست و $x=0$ هم تابع را ∞ نمی‌کند پس فقط خط $x=2$ مجانب قائم است.

۵ - گزینه ۴ برای بررسی شکل تابع در اطراف مجانب قائم به ازای ریشه‌ی مخرج حد چپ و حد راست می گیریم.

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$x-x^2\geq 0 \to x-x^2=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

		0		1	
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
			ج		

$$x-[x]\neq 0 \to x\in Z$$

$$D_f=(0,1)$$

از طرفی می‌دانیم که اگر $0<x<1$ باشد $[x]=0$ است پس $y=\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}$ با توجه به دامنه، تابع در همسایگی راست ریشه مخرج $x=0$ تعریف شده، پس گزینه‌های ۱ و ۳ رد می شود.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\cdot(1-x)}}{x}$$

$$\to \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

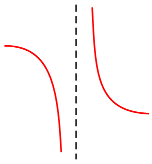
گزینه ۴ صحیح است.

۶ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b\\ \sin 2x=2\sin x\cdot\cos x\end{array}}$

$$y=\cot x-\cot 3x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\cos x\cdot\sin 3x-\sin x\cdot\cos 3x}{\sin x\cdot\sin 3x}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin 3x\cdot\sin x}=\frac{\sin 2x}{\sin 3x\cdot\sin x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin 3x\cdot\sin x}=\frac{2\cos x}{\sin 3x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi^+} y=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{2\cos x}{\sin 3x}=\dfrac{2(-1)}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\pi^-} y=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{2\cos x}{\sin 3x}=\dfrac{2(-1)}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$



$x=\pi$

۷ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}\ ,\quad [x]+[-x]\neq 0\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

$$9-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 9\Rightarrow -3\leq x\leq 3\Rightarrow D_f=[-3,3]-\{-3,-2,\cdots,2,3\}$$

$$\Rightarrow D_f=(-3,3)-\{-2,-1,0,1,2\}$$

اگر a عددی حقیقی از دامنهٔ تابع باشد، زمانی که $x\to a$ متغیر x عددی غیرصحیح است و داریم:

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow [x]+[-x]=-1\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}=\frac{\sqrt{9-a^2}}{-1}=-\sqrt{9-a^2}$$

تابع مجانب قائم ندارد.

۸ - گزینه ۳

$$y=\frac{a+1}{x^2+2ax-4a}$$

با توجه به مجانب قائم، باید مخرج کسر ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس داریم:

مخرج $\Delta=0\Rightarrow 4a^2+16a=0\Rightarrow 4a(a+4)=0\Rightarrow a=0$ یا $a=-4$

$a=0\Rightarrow y=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x=0$ مجانب قائم $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\Rightarrow$ غیر قابل قبول

$a=-4\Rightarrow y=\frac{-3}{x^2-8x+16}=\frac{-3}{(x-4)^2}\Rightarrow x=4$ مجانب قائم $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{-3}{(x-4)^2}=-\infty$

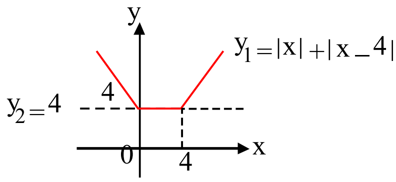
پس $a=-۴$ قابل قبول است.

۹ - گزینه ۳

کافی است ریشه‌های مخرج را به دست آوریم. لذا داریم:

$$y=\frac{x+۱}{|x|+|x-۴|-۴}\Rightarrow |x|+|x-۴|=۴$$

با رسم نمودار $y=|x|+|x-۴|$ نتیجه می‌شود، به‌ازای مجموعه مقادیر $x\in[۰,۴]$، معادله برقرار است لذا دامنهٔ تابع برابر $D_f=\mathbb{R}-[۰,۴]$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\dfrac{x+۱}{۰^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=\dfrac{x+۱}{۰^+}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$$ تابع دو مجانب قائم $x=۰$ و $x=۴$ دارد

توجه: مخرج دارای بی‌شمار ریشه است امّا فقط $x=۰$ و $x=۴$ در مخرج صفر حدی ایجاد می‌کنند بقیهٔ ریشه‌های مخرج صفر مطلق ایجاد می‌کنند که:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{۰ مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

۱۰ - گزینه ۲

هر عددی که بتواند تابع $f(x)$ را به ∞ میل دهد مجانب قائم منحنی محسوب می‌شود. پس ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را می‌یابیم.

$$x(x^۲-۴)(x^۲-۹)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ \pm۲,\pm۳$$

در $x=۲$ مجانب قائم ندارد چون $\lim\limits_{x\to۲} f(x)=۰$ است. در ۴ نقطهٔ دیگر مجانب قائم دارد. مثلاً داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} y=\frac{[۰^-]}{۰^-(-۴)\cdot(-۹)}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty\to$$ $x=۰$ خط مجانب قائم است.

۱۱ - گزینه ۱

اولاً $x=۳$ مجانب قائم تابع است. ثانیاً $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. زیرا حد چپ و راست تابع در $x=۳$ با هم برابر هستند. پس:

$$-۳x^۲+ax+b=-۳(x-۳)^۲=-۳(x^۲-۶x+۹)=-۳x^۲+۱۸x-۲۷\Rightarrow\begin{cases}a=۱۸\\ b=-۲۷\end{cases}\Rightarrow a-b=۴۵$$

توجه: هرگاه $x=k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجهٔ دوم باشد آنگاه:

$$ax^۲+bx+c=a\cdot(x-k)^۲$$

۱۲ - گزینه ۴ در صورتی $x=۲$ تنها مجانب قائم تابع $f(x)$ است که یا $x=۲$ ریشهٔ مضاعف $x^۲+ax+b$ باشد. یعنی:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴,b=۴\Rightarrow a+b=۰$$

یا مخرج بصورت $(x-۲)(x+۱)$ باشد، که داریم:

$$x^۲-x-۲=x^۲+ax+b\Rightarrow a=-۱,b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

۱۳ - گزینه ۴ در گزینهٔ (۱) داریم $x>۱,x>-۱,-\frac{۱}{۲}\le x\le\frac{۱}{۲}$ پس دامنه تهی است.

در گزینهٔ (۲) عامل‌های $x-۱$ و $x+۱$ از صورت و مخرج حذف می‌شوند و عبارت دیگر کسری نیست و به ∞ نمی‌رود پس مجانب قائم ندارد.

$$f(x)=\frac{(x-۱)\cdot(x+۴)\cdot(x+۱)\cdot(x-۴)}{|x-۱|\cdot|x+۱|}$$

در گزینهٔ (۳) حد راست یا چپ در هیچ نقطه‌ای بی‌نهایت نیست چون مخرج فقط می‌تواند صفر مطلق شود.

نکته: هرگاه همهٔ جملات مخرج داخل جزء صحیح باشد آن منحنی هرگز مجانب قائم ندارد.

در گزینهٔ (۴) حد راست در $x=۰$ برابر $(-\infty)$ می‌شود پس $x=۰$ مجانب قائم است. ($x=۲$ مجانب قائم نیست) زیرا کسر تبدیل به $\frac{۰}{۰}$ می‌شود و بعد از رفع ابهام جواب برابر عدد می‌شود.

۱۴ - گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x\sqrt{۱۶-x^۲}}{\sin x}$$

با در نظر گرفتن شرط رادیکال داریم:

$$۱۶-x^۲\ge۰\Rightarrow x^۲\le۱۶\Rightarrow|x|\le۴\Rightarrow-۴\le x\le۴\quad(۱)$$

حال ریشه های مخرج را می یابیم:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\xrightarrow{(۱)}x=-\pi,۰,\pi$$

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{x\sqrt{۱۶-x^۲}}{\sin x}=\frac{-\pi\sqrt{۱۶-\pi^۲}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{16-x^2}=4$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}=\frac{\pi\sqrt{16-\pi^2}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty$$

خطوط $x=\pm\pi$ مجانب‌های قائم تابع هستند. توجه کنید $x=0$ مجانب قائم نمی‌باشد. پس تابع دو تا مجانب قائم دارد.

۱۵ - گزینه ۲ ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}-\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\ ,\ \ x-2=0\Rightarrow x=2\ ,\ x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -1 \\ x-2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} x\geqslant 2\Rightarrow D_f=[2,+\infty)-\{2\}=(2,+\infty)$$

تابع در هیچ همسایگی $x=-1$ تعریف نشده است، پس $x=-1$ مجانب قائم تابع نیست. تابع فقط در همسایگی راست $x=2$ تعریف شده است. داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}-\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{0^+}-\frac{0}{3}=+\infty-0=+\infty$$

خط $x=2$ مجانب قائم تابع است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۴
۶	۳
۷	۳
۸	۳
۹	۳
۱۰	۲
۱۱	۱
۱۲	۴
۱۳	۴
۱۴	۲
۱۵	۲