نام آزمون: مجانب افقی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$ است. b کدام است؟

① -10

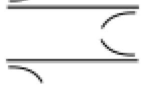
② -5

③ 5

④ 10

۲ - نمودار تابع $y=2-\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ در مجاورت مجانب افقی تابع به کدام صورت است؟

① 

② 

③ 

④ 

۳ - نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می‌کند؟

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{2}{3}$

۴- امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$ ، نیمساز ناحیه اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $2\sqrt{5}$

④ $4\sqrt{2}$

۵- مجانب افقی تابع حقیقی $f(x)$ با ضابطه ی $f(x)=(x^2+1)\tan(\frac{1}{x^2+1})$ کدام است؟

① $y=1$

② $y=2$

③ $y=\frac{1}{2}$

④ $y=0$

۶- معادله‌ی خط مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{4-2x}{\sqrt{x^2-2x}}$ وقتی $x<0$ کدام است؟

① $y=-2$

② $y=-1$

③ $y=1$

④ $y=2$

۷- مجانب‌های افقی $f(x)=2x(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2})$ در چه فاصله ای از یکدیگر قرار دارند؟

① ۲

② ۴

③ ۳

④ ۶

۸ – مجانب‌های افقی منحنی $y = ۲x(\sqrt{x^۲ + k} - \sqrt{x^۲ - k})$ در فاصله‌ی ۸ واحد از یکدیگر قرار دارند. مقدار k کدام است؟

① $\sqrt{۳۴}$

② ۸

③ $\sqrt{۱۷}$

④ ۲

۹ – مجانب منحنی $y = \dfrac{x^۲ - ۱}{۲x^۲ + x + ۱}$ نمودار آن را با کدام طول قطع می‌کند؟

① ۳-

② ۲-

③ ۱

④ ۲

۱۰ – مبداء مختصات مرکز تقارن منحنی $y = \dfrac{ax}{\sqrt{x^۲ + bx + ۵}}$ است. اگر تابع صعودی و دارای خط مجانب $y = ۲$ باشد. $a + b$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

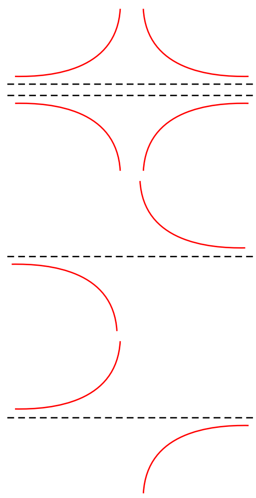
۱۱ – نمودار تابع $y = x\tan\dfrac{۱}{x}$ در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟

①

②

③

④



۱۲ – فاصله‌ی خطوط مجانب افقی تابع $f(x) = \log_3(\frac{9^{x+1}+1}{9^x+27})$ از یکدیگر چقدر است؟

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۳ – فاصله‌ی مجانب های منحنی $y = x(\sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2+4x-2})$ از یکدیگر چقدر است؟

(۱) ۱

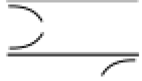
(۲) ۲

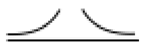
(۳) ۳

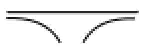
(۴) ۰

۱۴ – نمودار تابع $y = -\frac{1}{x}$ در اطراف مجانب افقی خود شبیه کدام گزینه است؟

(۱) 

(۲) 

(۳) 

(۴) 

۱۵ – اگر تابع $y = \frac{x+1}{x^2+mx+4}$ فقط دو مجانب داشته باشد، m کدام یک از مقادیر زیر را نمی‌تواند اختیار کند؟

(۱) ۴

(۲) -4

(۳) ۵

(۴) -5

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ اولاً: باید a مثبت باشد، زیرا اگر $a < 0$ باشد دامنه‌ی f محدود خواهد بود و نمی‌تواند $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ و در نتیجه f مجانب افقی نخواهد داشت. در ضمن اگر $a = 0$ باشد، آن‌گاه f در بی‌نهایت نمی‌تواند حد متناهی (مثلاً $\frac{3}{2}$) داشته باشد. پس a حتماً مثبت است.

ثانیاً: تابع f فقط در $x \to -\infty$ می‌تواند مجانب افقی داشته باشد، زیرا در $x \to +\infty$، حد تابع f نامتناهی $(+\infty)$ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} (2x - 1 + \sqrt{ax^2 + bx}) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} (2x - 1 + \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}|) = \lim_{x\to-\infty} (2x - 1 - \sqrt{a}x - \frac{b\sqrt{a}}{2a}) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} ((2 - \sqrt{a})x + (-1 - \frac{b}{2\sqrt{a}})) = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 4 \\ -1 - \dfrac{b}{2\sqrt{a}} = \dfrac{3}{2} \xrightarrow{a=4} \dfrac{-b}{4} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow b = -10 \end{cases}$$

۲ - گزینه ۲ برای محاسبه مجانب افقی باید حد تابع را در بی‌نهایت بدست آوریم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \lim_{x\to\pm\infty} 2 - \sqrt{\frac{x}{x}} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$x \to +\infty : x - 1 < x + 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} < 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} > 1 \Rightarrow y > 1$$

در نتیجه در x های مثبت، نمودار بالای مجانب افقی قرار دارد.

$$x \to -\infty : x - 1 < x + 2 \overset{x<0}{\Rightarrow} \frac{x-1}{x+2} > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} > 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} < 1 \Rightarrow y < 1$$

لذا به ازای xهای منفی، نمودار پایین مجانب افقی قرار می گیرد.

۳ - گزینه ۱ تابع f مجانب قائم ندارد چون کسری نیست بنابراین مجانب های افقی و مایل را در صورت وجود به دست می‌آوریم و برای این کار حد تابع را وقتی $x \to \infty$ محاسبه می کنیم:

از هم‌ارزی مقابل کمک می گیریم:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1}} \xlongequal{n \text{ فرد}} \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na}) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x + \sqrt[3]{-x^3 + x^2}) = \lim_{x\to\infty} (x - (x - \frac{1}{3})) = \frac{1}{3}$$

بنابراین تابع مجانب افقی $y = \frac{1}{3}$ دارد و مجانب مایل ندارد و برای محاسبه محل برخورد منحنی و خط $y = \frac{1}{3}$ باید گزینه‌ها را در معادله $x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \frac{1}{3}$ امتحان کنیم آنگاه: $x = \frac{1}{9}$

۴ - گزینه ۴ منحنی مجانب قائم ندارد چون کسری نیست برای محاسبه مجانب افقی و مایل از تابع حد در ∞ می‌گیریم.

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x\to\pm\infty} |x + 1| - |x - 1|$$

$1)\ x \to +\infty \quad y = x + 1 - x + 1 = 2$ مجانب افقی و $2)\ x \to -\infty \quad y = -x - 1 + x - 1 = -2$ مجانب افقی

نیم ساز ناحیه اول و سوم خط $y = x$ است بنابراین نقاط برخورد $A\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

۵ - گزینه ۱ کافی است حد بی‌نهایت تابع $f(x)$ را به دست آوریم. لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 1)\tan(\frac{1}{x^2 + 1}) \xlongequal{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$$

۶ - گزینه ۴ کافی است حد در بی‌نهایت تابع $f(x)$ را به دست آوریم. از آن جا که $x < 0$ لذا باید x را به $(-\infty)$ میل دهیم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x} + \frac{4 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}}) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x} + \frac{4 - 2x}{|x - 1|}) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x} + \frac{4 - 2x}{-(x - 1)}) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow y = 2$$

۷ - گزینه ۴ برای محاسبه مجانب افقی تابع $f(x)$، کافی است حد آن را در بی نهایت بدست آوریم. لذا عبارت را در مزدوج خود ضرب و تقسیم میکنیم. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 2}) \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} 2x(\frac{(x^2 - 1) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}})$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x}{|x| + |x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6x}{x + x} = -3 \Rightarrow y = -3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6x}{-x - x} = 3 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

در این صورت فاصله بین مجانب های تابع برابر ۶ است.

۸ - گزینه ۴ کافی است حد تابع را در بی نهایت بدست آوریم. لذا عبارت را در مزدوج خود ضرب و تقسیم می کنیم. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ۲x(\sqrt{x^۲+k} - \sqrt{x^۲-k})$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x[(x^۲+k)-(x^۲-k)]}{\sqrt{x^۲+k}+\sqrt{x^۲-k}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴kx}{\sqrt{x^۲+k}+\sqrt{x^۲-k}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴kx}{|x|+|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۴kx}{x+x} = ۲k \Rightarrow y = ۲k \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۴kx}{-x-x} = -۲k \Rightarrow y = -۲k \end{cases}$$

با توجه به اینکه فاصله میان دو مجانب، ۸ واحد است، لذا داریم:

$$۲k - (-۲k) = ۴k = ۸ \Rightarrow k = ۲$$

۹ - گزینه ۱ چون مخرج ریشه ندارد پس نمودار تابع مجانب قائم ندارد، معادله مجانب افقی منحنی خط $y = \frac{۱}{۲}$ است و باید با معادله منحنی قطع بدهیم.

$$\frac{x^۲-۱}{۲x^۲+x+۱} = \frac{۱}{۲}$$
$$۲x^۲+x+۱ = ۲x^۲-۲ \Rightarrow x = -۳$$

۱۰ - گزینه ۲ تابع $y = \dfrac{ax}{\sqrt{x^۲+bx+۵}}$ فرد است زیرا در صورت سؤال گفته شده مبدأ مختصات مرکز تقارت آن است. لذا $b = ۰$ است. از طرفی منحنی دارای مجانب افقی $y = ۲$ است و چون تابع صعودی می‌باشد بنابراین در شاخه $+\infty$ مجانب افقی بزرگتر (عدد ۲) دارد.

$$y = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{|x|} \to \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x} = a \to a = ۲$$

در نتیجه $a + b = ۲$ می‌باشد.

۱۱ - گزینه ۱ مجانب افقی تابع $y = ۱$ است، چون $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\frac{۱}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\tan\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}} = ۱$ حال باید حد تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ محاسبه کنیم:

$$I)\ \lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{۱}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}} \xrightarrow{\frac{۱}{x}=u} \lim_{u\to۰^+} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که $u \to ۰^+$ باشد، $\tan u > u$ است، پس عبارت از یک بیشتر است و منحنی بالای خط $y = ۱$ است.

$$II)\ \lim_{x\to-\infty} x\tan\frac{۱}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\tan\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}} \xrightarrow{\frac{۱}{x}=u} \lim_{u\to۰^-} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که $u \to ۰^-$ باشد، $\tan u < u$ است. پس:

$$\tan u < u \xrightarrow[u<۰]{\div u} \frac{\tan u}{u} > ۱$$

از طرفی تابع از یک بیشتر است پس تابع در $\pm\infty$ با مقادیر بیشتر از یک به آن نزدیک می‌شود و منحنی در هر دو شاخه‌ی بی‌نهایت در بالای مجانب افقی قرار دارد.

۱۲ - گزینه ۴

برای محاسبه‌ی مجانب افقی، از تابع حد در بی‌نهایت می گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log_۳ \frac{۹^{x+۱}+۱}{۹^x+۲۷} = \lim_{x\to+\infty} \log_۳ \frac{۹(۹^x)}{۹^x} = \log_۳ ۹ = ۲ \to$$ خط $y = ۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log_۳ \frac{۹^{x+۱}+۱}{۹^x+۲۷} = \lim_{x\to-\infty} \log_۳ \frac{۰+۱}{۰+۲۷} = \log_۳ \frac{۱}{۲۷} = -۳ \to$$ خط $y = -۳$ مجانب افقی است.

فاصله‌ی این دو خط افقی از هم برابر ۵ واحد است.

۱۳ - گزینه ۳ چون مخرج ریشه ندارد پس نمودار تابع مجانب قائم ندارد.

از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم و عبارت را در مزدوج ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(x^۲+۴x+۱-x^۲-۴x+۲)}{\sqrt{x^۲+۴x+۱}+\sqrt{x^۲+۴x-۲}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۳x}{|x|+|x|}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x}{-۲x} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x}{۲x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}$$ مجانب افقی

فاصله دو مجانب $= \left|\frac{۳}{۲} - (-\frac{۳}{۲})\right| = ۳$

۱۴ - گزینه ۲ با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-\frac{۱}{x})$ بنابراین $y = ۰$ مجانب افقی تابع $f(x)$ است. به ازای x های مثبت، $(-\frac{۱}{x}) < ۰$ پس تابع با مقادیر منفی به صفر میل می کند و این شاخه ی منحنی، پایین محور x ها قرار دارد. برای x های منفی، $(-\frac{۱}{x}) > ۰$ ، لذا تابع با مقادیر مثبت به صفر میل کرده و این شاخه از منحنی، بالای محور x ها قرار می گیرد.

۱۵ - گزینه ۴

ابتدا مجانب افقی را می‌یابیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+۱}{x^۲+mx+۴} \overset{\text{قانون پرتوان}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^۲} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۱}{x} = \frac{۱}{\pm\infty} = ۰$$

خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است. باتوجه به صورت سؤال، تابع فقط یک مجانب قائم دارد. در نتیجه یکی از دو حالت زیر در مورد مخرج کسر رخ می‌دهد:

الف) مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد

$$\text{مخرج } \Delta = ۰ \to m^۲ - ۴(۱)(۴) = ۰ \to m = \pm ۴$$

ب) ریشه‌ی صورت ($x=-۱$) ریشه‌ی مخرج نیز می‌باشد.

$$x^۲+mx+۴ \Big|_{x=-۱}^{۰} \to (-۱)^۲ + m(-۱) + ۴ = ۰ \to m = ۵$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۴ - ۴	۷ - ۴	۱۰ - ۲	۱۳ - ۳
۲ - ۲	۵ - ۱	۸ - ۴	۱۱ - ۱	۱۴ - ۲
۳ - ۱	۶ - ۴	۹ - ۱	۱۲ - ۴	۱۵ - ۴