نام آزمون: فصل دوم حسابان ۲

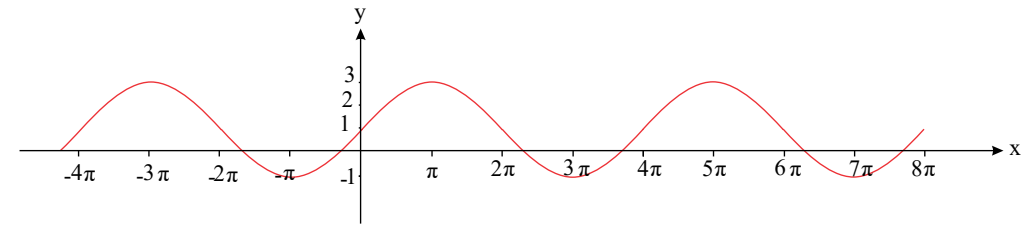
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

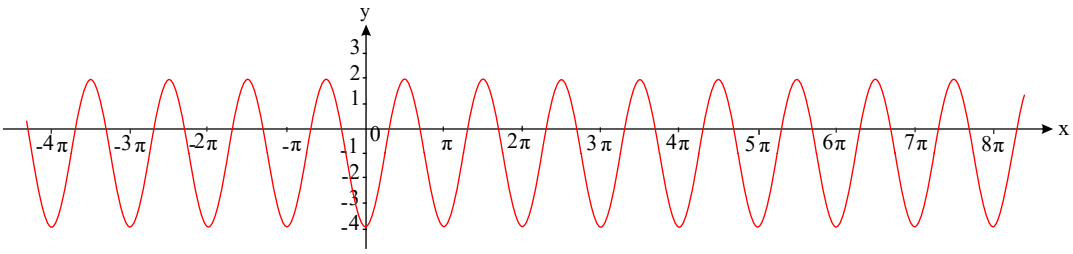
علی هاشمی

۱ – ضابطهٔ مربوط به هریک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید.

الف)



ب)



۲ – معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$$

ب

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

پ

$\cos x = \cos ۲x$

ت

$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

ث

$\cos^{۲} x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

ج

$\sin x - \cos ۲x = ۰$

ج

$\tan(۲x - ۱) = ۰$

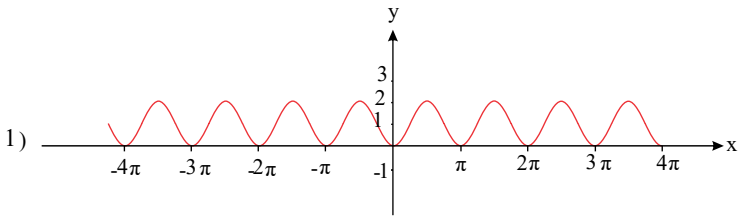
ح

$\tan ۳x = \tan \pi x$

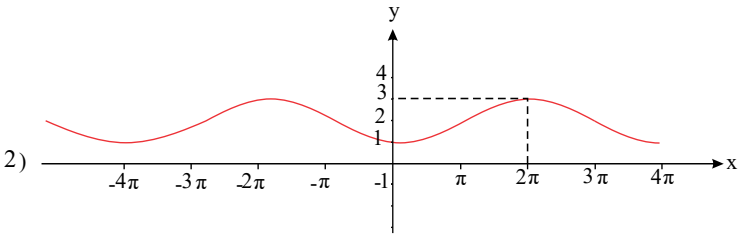
۳ – هریک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ **ب)** $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$ **پ)** $y = \sin ۲x$ **ت)** $y = ۱ - \cos ۲x$

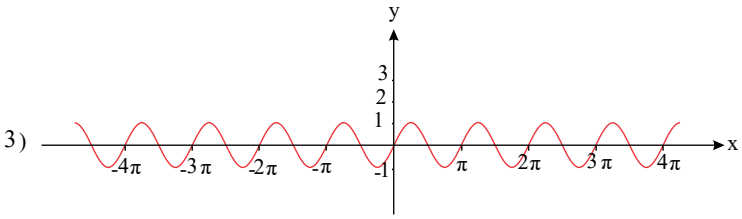
1)



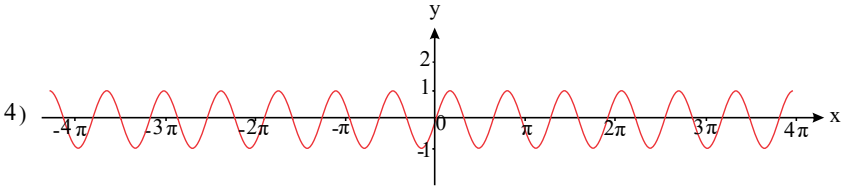
2)



3)



4)



۴ - با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ **ب)** $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

۵ - مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

۶ - دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف

$y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب

$y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

پ

$y = -\pi \sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت

$y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

۷ – در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف

$T = \pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۳$

ب

$T = ۳ \quad , \quad \max = ۹ \quad , \quad \min = ۳$

پ

$T = ۴\pi \quad , \quad \max = -۱ \quad , \quad \min = -۷$

ت

$T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max = ۱ \quad , \quad \min = -۱$

۸ - کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

پاسخنامه تشریحی

۱ - الف)

ضابطهٔ مربوط به این نمودار به‌صورت $f(x)=a\sin bx+c$ می‌باشد که داریم:

$$T=۴\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۳\\ \min=-|a|+c=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۲\Rightarrow c=۱\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow a=۲$$

با توجه به نمودار، a و b هردو مثبت هستند، پس داریم:

$$f(x)=۲\sin(\frac{۱}{۲}x)+۱$$

ب)

ضابطهٔ مربوط به این نمودار به‌صورت $f(x)=a\cos bx+c$ می‌باشد که داریم:

$$T=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=۲$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۲\\ \min=-|a|+c=-۴\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=-۲\Rightarrow c=-۱\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow a=-۳$$

با توجه به نمودار، a منفی و b مثبت است، پس داریم:

$$f(x)=-۳\cos(۲x)-۱$$

۲ -

الف

$$\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۳x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

ب

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x-۱-\cos x+۱=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x-\cos x=۰$$

$$\Rightarrow\cos x(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۲\cos x-۱=۰\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

پ

$$\cos x=\cos ۲x\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

ت

$$\cos ۲x-\sin x+۱=۱\Rightarrow\cos ۲x=\sin x$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$ داریم:

$$\cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

ث

$$\cos^۲x-\sin x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow۱-\sin^۲x-\sin x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲x+\sin x-\frac{۳}{۴}=۰$$

با فرض $\sin x=t$ داریم:

$$t^{۲}+t-\frac{۳}{۴}=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴\times۱\times(-\frac{۳}{۴})=۴\Rightarrow t=\frac{-۱\pm۲}{۲}=\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۲}$$

$$\sin x=-\frac{۳}{۲}\ \text{غ ق ق}\ ,\ \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$

ج

$$\sin x-\cos۲x=۰\Rightarrow\cos۲x=\sin x\Rightarrow\cos۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\Rightarrow۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

چ

$$\tan(۲x-۱)=۰\Rightarrow\tan(۲x-۱)=\tan۰\Rightarrow۲x-۱=k\pi+۰\Rightarrow۲x=۱+k\pi\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}+\frac{k\pi}{۲}$$

ح

$$\tan۳x=\tan\pi x\Rightarrow۳x=k\pi+\pi x\Rightarrow۳x-\pi x=k\pi\Rightarrow x(۳-\pi)=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳-\pi}$$

۳ -

با استفاده از دورهٔ تناوب توابع داریم:

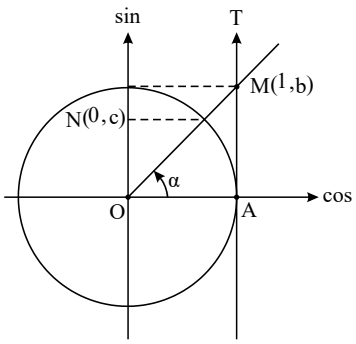
الف) $y=\sin\pi x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\Rightarrow$ نمودار (۴) ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi\Rightarrow$ نمودار (۲)

پ) $y=\sin۲x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow$ نمودار (۳) ت) $y=۱-\cos۲x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow$ نمودار (۱)

۴ - الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ اول در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin\alpha=ON=y_N=c>۰$$
$$\tan\alpha=AM=y_M=b>۰$$



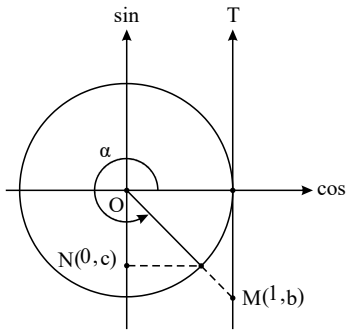
از روی شکل واضح است که:

$$c<b\Rightarrow\sin\alpha<\tan\alpha$$

ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:

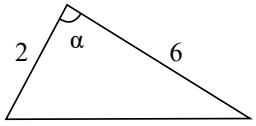
$$\sin\alpha=y_N=c<۰$$
$$\tan\alpha=y_M=b<۰$$



از روی شکل واضح است که:

$$b<c\Rightarrow\tan\alpha<\sin\alpha$$

۵ - مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع، پس داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\sin\alpha=۳\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ (۱)\ ,\ \alpha=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ (۲)$$

با توجه به اینکه زاویهٔ مثلث بین صفر تا ۱۸۰° می‌باشد، داریم:

$$(۱)\ k=۰\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۶}\ ,\ (۲)\ k=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۵\pi}{۶}$$

بنابراین دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۶ -

الف

$$y=۱+۲\sin ۷x\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{۷}\ ,\ \max=۱+|۲|=۱+۲=۳\ ,\ \min=۱-|۲|=۱-۲=-۱$$

ب

$$y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$$

$$\max=\sqrt{۳}+|-۱|=\sqrt{۳}+۱\ ,\ \min=\sqrt{۳}-|-۱|=\sqrt{۳}-۱$$

پ

$$y=-\pi\sin(\frac{۱}{۲}x)-۲\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

$$\max=|-\pi|-۲=\pi-۲\ ,\ \min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲$$

ت

$$y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x\longrightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ \max=|-\frac{۳}{۴}|=\frac{۳}{۴}\ ,\ \min=-|-\frac{۳}{۴}|=-\frac{۳}{۴}$$

۷ -

الف

با فرض $f(x)=a\cos bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=۲$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۳\\ \min=-|a|+c=-۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۰\Rightarrow c=۰\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow a=۳\Rightarrow f(x)=۳\cos ۲x$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به‌دست آورد.

ب

با فرض $f(x)=a\sin bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۳\Rightarrow|b|=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=۹\\ \min=-|a|+c=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۱۲\Rightarrow c=۶\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=-۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)+۶$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به دست آورد.

پ

با فرض $f(x)=a\cos bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=-۱\\ \min=-|a|+c=-۷\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=-۸\Rightarrow c=-۴\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow a=۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۳\cos(\frac{۱}{۲}x)-۴$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به‌دست آورد.

ت

با فرض $f(x)=a\sin bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |b|=۴\Rightarrow b=۴$$

$$\left.\begin{array}{l}\max=|a|+c=۱\\ \min=-|a|+c=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=۰\Rightarrow c=۰\Rightarrow |a|=۱\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=-\sin ۴x$$

تذکر: توجه کنید که می‌توان توابع مثلثاتی دیگری هم به‌عنوان جواب به دست آورد.

۸ -

الف نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

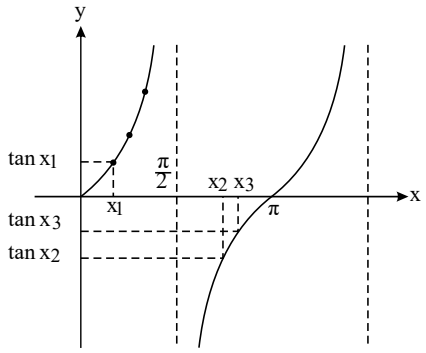
ب نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

پ درست، به‌عنوان مثال با توجه به نمودار تانژانت اگر بازهٔ $[۰,\pi]$ را در نظر بگیریم داریم:

$$x_۱<x_۲\Rightarrow \tan x_۱>\tan x_۲$$

بنابراین تابع تانژانت در این بازه غیرصعودی است. توجه کنید که این بدان معنی نیست که تابع تانژانت در این بازه نزولی است زیرا برای $x_۲$ و $x_۳$ از این بازه داریم:

$$x_۲<x_۳\Rightarrow \tan x_۲<\tan x_۳$$



در کل تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست.

ت درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.