



علی هاشمی

۱- اگر $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1$ مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

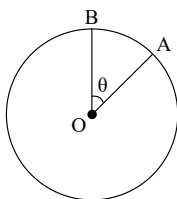
① $-\frac{24}{5}$

② $\frac{5}{24}$

③ $-\frac{5}{12}$

④ $-\frac{12}{5}$

۲- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵، طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{2}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی θ بر حسب درجه کدام است؟



① 1°

② 2°

③ 18°

④ 36°

۳- اگر $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

① اول

② دوم

③ اول و چهارم

④ دوم و سوم

۴- حاصل $\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ}$ کدام است؟

① $8\sqrt{3}$

② $-8\sqrt{3}$

③ $4\sqrt{3}$

④ $-4\sqrt{3}$



۵- اگر انتهای کمان زاویه x در ناحیه دوم دایره ی مثلثاتی باشد و داشته باشیم $\cos(\pi + 2x) = \frac{1}{3}$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

- ① $\sqrt{3}$
- ② $-\sqrt{3}$
- ③ $-\sqrt{5}$
- ④ $-\sqrt{2}$

۶- اگر $\sin x - 2 \cos x = 0$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$
- ② $-\frac{4}{3}$
- ③ $\frac{4}{3}$
- ④ $\frac{3}{4}$

۷- حاصل عبارت $B = \frac{3 \sin 155^\circ}{5 \sin 335^\circ + \sin 385^\circ}$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $-\frac{3}{4}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{1}{2}$



۸- اگر $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{6}$ مقدار $\cos^4 x$ کدام است؟

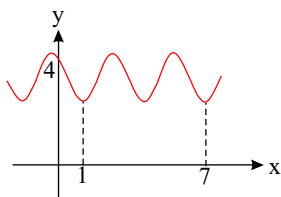
① $-\frac{17}{18}$

② $-\frac{8}{9}$

③ $-\frac{5}{6}$

④ $-\frac{7}{9}$

۹- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد. حاصل ab کدام است؟



① $-\frac{8}{3}$

② -2

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{4}{3}$

۱۰- جواب کلی معادله $1 + \cot x = 2 \cot 2x$ کدام است؟

① $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

② $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

③ $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

④ $x = \frac{k\pi}{4}$

۱۱- جواب کلی معادله $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos^2 \frac{3\pi}{4}$ ، کدام است؟

① $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

② $x = k\pi \pm \frac{\pi}{24}$

③ $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

④ $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$



۱۲- حاصل $\frac{\tan^2 x}{1 - \tan^4 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{6}}{72}$

② $\frac{\sqrt{3}}{72}$

③ $\frac{\sqrt{6}}{24}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{24}$

۱۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟ ($k \in Z$)

① $\{0, 1, 3\}$

② $\{1, 3\}$

③ $\{0, 1\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

۱۴- اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 5$ مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

① $-\frac{5}{12}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{7}{12}$

④ $-\frac{2}{3}$



۱۵- اگر $\tan 20^\circ = 0.4$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ}$ کدام است؟

① $\frac{16}{13}$

② $\frac{15}{13}$

③ $\frac{17}{13}$

④ $\frac{15}{26}$

۱۶- مجموع ریشه‌های معادله $(7 \sin x - 1)(8 \cos x + 1) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

① π

② 2π

③ 3π

④ 4π

۱۷- مجموع جواب‌های معادله $(1 + \cot^2 x) \sin(\pi + 2x) = 2$ مثلثاتی در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

① 2π

② 3π

③ $\frac{5\pi}{2}$

④ $\frac{13\pi}{2}$

۱۸- اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ ، آن گاه حاصل $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}$ کدام می‌تواند باشد؟

① ۲

② $\frac{1}{2}$

③ ۴

④ $\frac{1}{4}$



۱۹- حاصل $\frac{\sin 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\sin 10^\circ$
- ۲) $\cos 10^\circ$
- ۳) $\tan 10^\circ$
- ۴) $\tan 40^\circ$

۲۰- اگر $\tan x > 0$ و $\sin x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱) اول
- ۲) دوم
- ۳) سوم
- ۴) چهارم

۲۱- اگر مقدار $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 110^\circ + \cos 340^\circ}{2 \cos 110^\circ + \cos 650^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{20}{3}$
- ۲) 5
- ۳) $-\frac{20}{9}$
- ۴) $-\frac{17}{3}$

۲۲- اگر $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ، آن گاه حدود تغییرات $\sin x$ کدام است؟

- ۱) $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
- ۲) $[\frac{1}{2}, 1]$
- ۳) $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$
- ۴) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$



۲۳- اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر ۱۰ سانتی متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

- ① $\frac{1}{50}$
- ② $\frac{1}{10}$
- ③ $\frac{18}{\pi}$
- ④ $\frac{36}{\pi}$

۲۴- زاویه‌ی θ کمانی به طول $\frac{1}{2}$ سانتی متر در دایره‌ای با شعاع $\frac{1}{4}$ سانتی متر بریده است. مقدار θ بر حسب رادیان کدام است؟

- ① صفر
- ② ۱
- ③ ۲
- ④ ۳

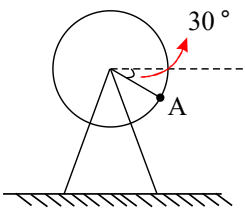
۲۵- اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ قطع کند، مقدار

$$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)}$$

کدام است؟

- ① ۲۷
- ② -۲۷
- ③ $\frac{27}{2}$
- ④ $-\frac{27}{2}$

۲۶- چرخ و فلکی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۲ متر دارای تعدادی کابین است. مطابق شکل، کابین A در ارتفاع ۱۸ متری از سطح زمین قرار دارد. اگر چرخ و فلک 210° حول مبدأ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، کابین A در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار خواهد گرفت؟ (زاویه‌ی کابین A با سطح افقی 30° است.)



- ① $6(4 + \sqrt{3})$
- ② $3(7 + 2\sqrt{3})$
- ③ ۲۴
- ④ ۲۱



۲۷- مجموعه جواب کلی معادله $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x + 1 = 0$ کدام است؟

- ① $x = 2k\pi$
- ② $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ③ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
- ④ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲۸- جواب های معادله $1 + \sin x = (2 + \sqrt{2}) \cos^2 x$ بر روی دایره ی مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

- ① مثلث متساوی الاضلاع
- ② مثلث قائم الزاویه
- ③ مثلث متساوی الساقین
- ④ مثلث با زاویه بیش از 90°

۲۹- اگر $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3$ ، حاصل $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{9}$
- ② $\frac{1}{9}$
- ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ④ $\frac{1}{3}$

۳۰- جواب کلی معادله $\sin x \cos x = \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- ① $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
- ② $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ③ $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
- ④ جواب ندارد.



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{3 \tan x - 4}{\tan x + 6} = 1 \rightarrow 3 \tan x - 4 = \tan x + 6$$

$$\rightarrow 2 \tan x = 10 \rightarrow \tan x = 5$$

پس $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{10}{1 - 25} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12} \rightarrow \cot 2x = -\frac{12}{5}$

۲ - گزینه ۳ اگر θ بر حسب رادیان و r شعاع دایره و L اندازهی کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ باشد داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\pi}{10} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{10} \rightarrow D = 18^\circ$$

۳ - گزینه ۱ اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$\cos x \geq 0 \Rightarrow$ (* انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول یا چهارم است.

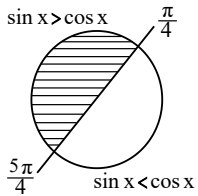
از طرفی:

$$\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$$

چون طرف چپ نامنفی است، پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، در نتیجه:

$$\sin x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت (*) داریم:



\Rightarrow انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول است.

۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a, \cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}$

$$\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ} = \cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ = (\cot 15^\circ + \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)$$

$$= \left(\frac{2}{\sin 30^\circ}\right) (2 \cot 30^\circ) = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right) (2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$$

۵ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

$$\cos(\pi + 2x) = \frac{1}{3} \rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{3} \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 \rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی}} \tan x = -\sqrt{2}$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$$\sin x - 2 \cos x = 0 \rightarrow \sin x = 2 \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 2$$



$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan 2x = \frac{2(2)}{1 - 4} = \frac{4}{-3}$$

۷ - گزینه ۲

$$\sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\sin 335^\circ = \sin(360^\circ - 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\sin 385^\circ = \sin(360^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$B = \frac{3 \sin 155^\circ}{5 \sin 335^\circ + \sin 385^\circ} = \frac{3 \sin 25^\circ}{-5 \sin 25^\circ + \sin 25^\circ} = \frac{3 \sin 25^\circ}{-4 \sin 25^\circ} = -\frac{3}{4}$$

۸ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{6} \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{6} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{6}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \rightarrow \cos 4x = 2\left(\frac{1}{6}\right) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

۹ - گزینه ۱ نمودار تابع از نقطه $\frac{\pi}{4}$ می‌گذرد پس این نقطه در تابع صدق می‌کند.

صدق

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow 4 = a + \sin \circ \rightarrow a = 4$$

باتوجه به شکل، فاصله‌ی ۱ تا ۷ دو برابر دوره‌ی تناوب است و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = k \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$2T = 7 - 1 \rightarrow 2T = 6 \rightarrow T = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \rightarrow 3 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow 3 = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{3} \rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

$$ab = (4)\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-8}{3}$$

چون نمودار تابع در $x = 0$ نزولی است پس فقط $b = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است.

۱۰ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$2 \cot 2a = \cot a - \tan a$$

$$2 \cot 2x = 1 + \cot x \rightarrow \cot x - \tan x = 1 + \cot x \rightarrow \tan x = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\frac{x=k\pi+\alpha}{\pi} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos^2 \frac{3\pi}{4} \rightarrow (\underbrace{\cos^2 2x + \sin^2 2x}_1)(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$$

توجه کنید که $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۲ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\frac{\tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\tan^2 x}{(1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x)} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \tan 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \tan \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

۱۳ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

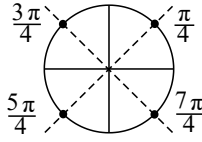
$$\tan x = \sin 2x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \rightarrow \sin x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$



حالت خاص $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$



اما چون جواب کلی معادله مثلثاتی در صورت سوال به فرم $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ است از دو جواب آخر به دست آمده، اجتماع می‌گیریم که جواب‌ها به صورت $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ درمی‌آیند بنابراین مجموعه مقادیر i به صورت $\{0, 1, 3\}$ است.

۱۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$, $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

۱۵ - گزینه ۱

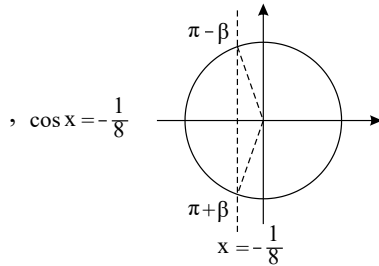
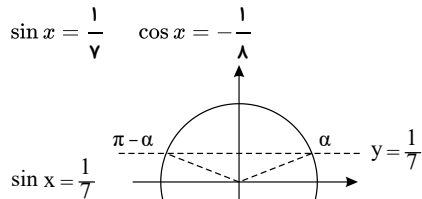
$$\frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ} = \frac{2 \sin(27^\circ - 2^\circ) + 3 \sin(36^\circ - 2^\circ)}{\cos(18^\circ + 2^\circ) - 4 \cos(36^\circ + 7^\circ)}$$

$$= \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \sin 2^\circ} = \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \sin 2^\circ}$$

$$\div \cos 2^\circ \rightarrow \frac{-2 - 3 \tan 2^\circ}{-1 - 4 \tan 2^\circ} = \frac{-2 - 3(0.04)}{-1 - 4(0.04)} = \frac{-2.12}{-1.16} = \frac{212}{116} = \frac{53}{29}$$

۱۶ - گزینه ۳ می‌دانیم که اگر $\sin x = \sin \alpha$ باشد آن گاه $\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ است و اگر $\cos x = \cos \alpha$ باشد آن گاه $x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

$$(\sqrt{7} \sin x - 1)(\lambda \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \lambda \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$



پس مجموع ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر برابر است با: $\alpha + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi + \beta) = 3\pi$

۱۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$(1 + \cot^2 x) \sin(\pi + 2x) = 2 \rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} (-\sin 2x) = 2$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x = -\sin 2x \rightarrow 2 \sin^2 x = -2 \sin x \cos x$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = 0$$

غرض (مخرج را صفر می‌کند) $2 \sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan(\frac{-\pi}{4}) \\ x = k\pi + \alpha \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 1 & 2 \\ \hline x & \frac{3\pi}{4} & \frac{7\pi}{4} \end{array} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها $\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ است.



می دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$, $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \rightarrow 4 + 4 \tan^2 x = 5 \cdot \tan x$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0 \rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9} \tan x = \frac{5 \pm 3}{4} = 2, \frac{1}{2}$$

پس:
$$\begin{cases} \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) \stackrel{\tan x = 2}{=} 1 \\ \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) \stackrel{\tan x = \frac{1}{2}}{=} 4 \end{cases}$$

۱۹ - گزینه ۳ می دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
 $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$

$$\frac{\sin 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} = \frac{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{2 \cos^2 1^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = \tan 1^\circ$$

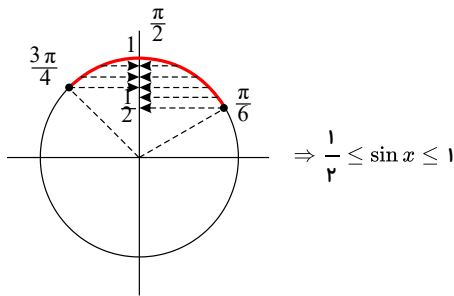
۲۰ - گزینه ۳ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی $\sin x < 0$ و $\tan x > 0$ است.

۲۱ - گزینه ۱

$$A = \frac{\sin 11^\circ + \cos 34^\circ}{2 \cos 11^\circ + \cos 65^\circ} = \frac{\sin(9^\circ + 2^\circ) + \cos(36^\circ - 2^\circ)}{2 \cos(9^\circ + 2^\circ) + \cos(36^\circ + 27^\circ + 2^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 2^\circ + \cos 2^\circ}{-2 \sin 2^\circ} = \frac{2 \cos 2^\circ}{-2 \sin 2^\circ} = -2 \cot 2^\circ = -2 \left(\frac{1}{\tan 2^\circ} \right) = \frac{-2}{0.3} = \frac{-20}{3}$$

۲۲ - گزینه ۲ در دایره مثلثاتی وقتی از $\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ تغییر می کند، از $\frac{\pi}{6}$ نیز عبور می کند. پس سینوس آن یک را نیز می پذیرد. لذا:



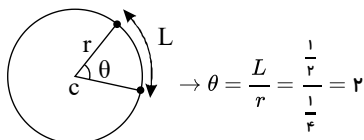
۲۳ - گزینه ۳ ابتدا زاویه را از درجه به رادیان تبدیل می کنیم.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{50}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{18}$$

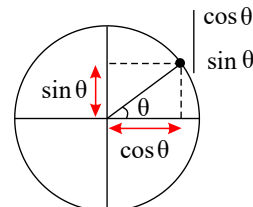
شعاع دایره: $\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{18} = \frac{10}{r} \Rightarrow r\pi = 36 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}$

$$\left. \begin{aligned} S = \text{مساحت دایره} &= \pi r^2 \\ P = \text{محیط دایره} &= 2\pi r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{r}{2} = \frac{36}{\pi} = \frac{18}{\pi}$$

۲۴ - گزینه ۳



۲۵ - گزینه ۲ اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، نقطه ی انتهایی کمان θ دایره ی مثلثاتی را طبق شکل مقابل در نقطه ی $\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$ قطع می کند.



پس $\cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \theta = \frac{1}{3}$ است.



$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1 + (-2\sqrt{2})^2}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{9}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -9\sqrt{2}$$

۲۶ - گزینه ۱ بعد از دوران 210° کابین A در موقعیت شکل زیر قرار می‌گیرد. با توجه به شکل:

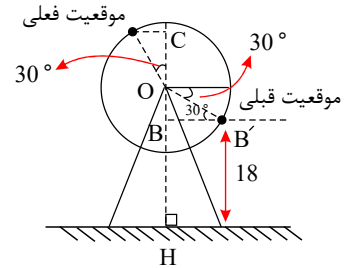
$$A \text{ ارتفاع فعلی کابین} = OC + OB + BH$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OC}{R} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OC}{12} \rightarrow OC = 6\sqrt{3}$$

$$\Delta OBB' = \sin 30^\circ = \frac{OB}{R} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OB}{12} \rightarrow OB = 6$$

$$\Rightarrow A \text{ ارتفاع فعلی کابین} = 6\sqrt{3} + 6 + 18 = 24 + 6\sqrt{3} = 6(4 + \sqrt{3})$$

حال با توجه به شعاع چرخ و فلک طول OC و OB را می‌یابیم:



۲۷ - گزینه ۲

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 - 2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 + A - 3 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} A = 1 \rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \quad (-1 \leq \sin x \leq 1) \quad \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

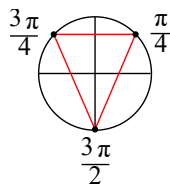
۲۸ - گزینه ۳

$$1 + \sin x = (2 + \sqrt{2}) \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = (2 + \sqrt{2})(1 - \sin^2 x) \rightarrow 1 + \sin x = (2 + \sqrt{2})(1 + \sin x)(1 - \sin x)$$

$$\rightarrow (1 + \sin x) - (2 + \sqrt{2})(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(1 + \sin x)}_{\text{فکتور}} ((2 + \sqrt{2})(1 - \sin x) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ 1 - \sin x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 - \sin x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$



جواب‌ها بر روی دایره‌ی مثلثاتی، رئوس مثلث متساوی الساقین هستند.

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \quad \tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \text{۲۹ - گزینه ۲ می‌دانیم:}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3 \rightarrow \frac{2}{\sin \alpha} = 3 \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

۳۰ - گزینه ۲

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می‌دانیم:}$$



$$\sin x \cdot \cos x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin 2x = 1$$

حالت خاص

$$\rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۱
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۱	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳
۴ - ۱	۹ - ۱	۱۴ - ۱	۱۹ - ۳	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲