نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ & ; x<-۱ \\ k & ; -۱\leq x<۱ \\ -x & ; x\geq ۱ \end{cases}$ بر روی دامنه‌اش نزولی است. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲ - اگر تابع $f=\Big\{(-۱,a-۱),(۰,a^{۳}-۱),(-۲,a)\Big\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$

(۲) $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

(۳) $(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$

(۴) $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$

۳ - تابع $f=\Big\{(-۶,۲),(۰,۴),(۶,۷),(۷,۹),(۲,m^{۲}-۳)\Big\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۶

۴ - کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} |x+۱| & ; x\leq -۱ \\ -x^{۲} & ; x\geq ۰ \end{cases}$ درست است؟

(۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

(۲) اکیداً صعودی است.

(۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

(۴) اکیداً نزولی است.

۵- اگر $y=f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $fof(x)$ کدام‌یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

(۱) $y=۳+x$

(۲) $y=x^{۹}$

(۳) $y=۴-x$

(۴) $y=۲x-۱$

۶- بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=\left(\frac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

(۱) $(-۱,\frac{۱}{۳})$

(۲) $(-۲,\frac{۱}{۳})$

(۳) $(-۳,\frac{۱}{۳})$

(۴) $(-۴,\frac{۱}{۳})$

۷- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-x|x|$ در بازهٔ $(-۱,۱)$ چگونه است؟

(۱) ابتدا نزولی، سپس صعودی

(۲) صعودی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

(۴) نزولی

۸- مساحت محصور بین محورهای مختصات و خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی به معادلهٔ $y=(x+۱)^۳$ با آن‌ها کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{۱}{۲}$

(۳) $\frac{۱}{۴}$

(۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ

۹ - تابع $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند. اگر حاصل‌ضرب طول این نقاط ۳ و $f(2)=15$ باشد، a کدام است؟

① 1

② -3

③ 3

④ -1

۱۰ - در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases}2(x+3)^3 & ;x<-3\\ -x^2-3x & ;-3\leq x<0\\ \sqrt{x} & ;x\geq 0\end{cases}$، به‌ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

① $(-2,-1)\ ,\ (-1,+\infty)$

② $[-1,1]\ ,\ (-3,-2)$

③ $[-1,0]\ ,\ [-4,-2]$

④ $\left[-\frac{3}{2},-1\right]\ ,\ [-2,-1]$

۱۱ - کدام‌یک از توابع زیر در طول دامنهٔ تعریف خود نزولی است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① $y=x+|x|$

② $y=x-[x]$

③ $y=|x|+|x-1|$

④ $y=x\left(\frac{1}{[x]+[-x]}\right)$

۱۲ - کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x^2+4x-5$ با دامنهٔ $\left|x+\frac{7}{2}\right|<\frac{3}{2}$ درست است؟

① مثبت است.

② نزولی است.

③ صعودی است.

④ غیر یکنوا است.

تابع

۱۳ - اگر f در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)}$ کدام است؟

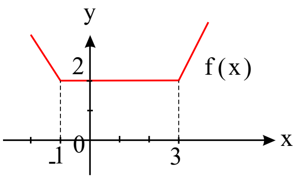
① $[۲,+\infty)$

② $[-۲,۲]$

③ $(-\infty,۰]$

④ $[-۳,۲]$

۱۴ - اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=f(۲+|x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟



① $[-۲,+\infty)$

② $[۱,+\infty)$

③ $[-۱,+\infty)$

④ $[-۳,+\infty)$

۱۵ - اگر ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۶x-۵ & , x>۳\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & , -۲\le x\le ۳\\ x^{۲}+۶x+۸ & , x<-۲\end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

① ۲

② ۵

③ ۶

④ ۳

۱۶ - اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $g(x)=\sqrt{(x^{۳}-x)f(x)}$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

① ۱

② صفر

③ -۱

④ ۲

۱۷ - تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log_{\frac{۱}{۳}}^{x} & , x\geq ۳ \\ ۲x+۱ & , x<۳ \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a، همواره در شرط $x_۲>x_۱ \Rightarrow f(x_۲)\geq f(x_۱)$ صدق می‌کند؟

(۱) $a \leq ۶$

(۲) $a \geq ۶$

(۳) هیچ مقدار a

(۴) فقط $a=۶$

۱۸ - اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۴}{f(۳-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) بی‌شمار

۱۹ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، روی کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty,-۲)$

(۲) $(-\infty,۱)$

(۳) $(-۲,۱)$

(۴) $(۱,+\infty)$

۲۰ - اگر اعداد $\dfrac{۱}{b-a}$، $\dfrac{۱}{۲b}$ و $\dfrac{۱}{b-c}$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، کدام سه عدد به ترتیب از چپ به راست همواره سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند؟

(۱) a, b, c

(۲) $a, ۲b, c$

(۳) $a, b^۲, c$

(۴) $\dfrac{۱}{a}, \dfrac{۱}{۴b}, \dfrac{۱}{c}$

۲۱ - اگر f تابعی صعودی اکید با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد و از مبدأ مختصات عبور کند، دامنه‌ی $g(x)=\sqrt{xf(۲-x)}$ کدام است؟

(۱) $[۰\,,\,۲]$

(۲) $(-\infty\,,\,۰]\cup[۲\,,\,+\infty)$

(۳) $[۰\,,\,\infty)$

(۴) $(-\infty\,,\,۲]$

۲۲ - تابع $y=۲x+\frac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی

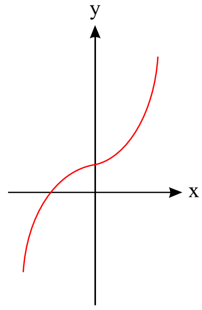
(۲) اکیداً نزولی

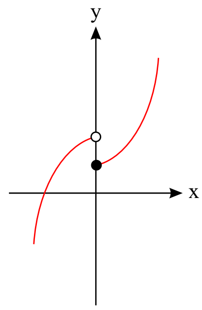
(۳) هم صعودی و هم نزولی

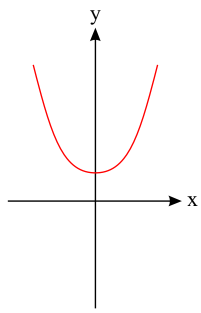
(۴) غیر یکنوا

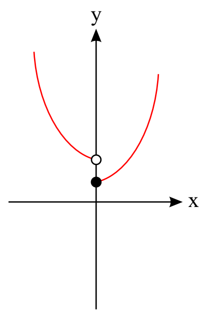
پاسخ

۲۳ - نمودار تابع $y = x^{۲}|x| + ۱$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۴ - تابع $f(x) = ۳x^{۲} + kx + ۳k^{۲}$ در بازهٔ $[-۲, +\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k \geq -۱۲$

۲) $k \leq -۱۲$

۳) $k \geq ۱۲$

۴) $k \leq ۱۲$

۲۵ - کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $x^{۳} = -|x| + ۲$ درست است؟

① فاقد ریشه

② فقط یک ریشهٔ مثبت

③ فقط یک ریشهٔ منفی

④ دو ریشهٔ مختلف‌العلامه

۲۶ - به‌ازای $x \in [a, b]$، تابع $f = \{(۱, ۲x + ۷), (-۲, ۱۰ - x), (۰, x^{۲} + ۴)\}$ یک تابع صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

① ۳

② ۴

③ ۱

④ ۲

۲۷ - اگر دامنهٔ تابع $f(x) = -x^{۳} + ۲$ بازهٔ $[-۱, ۳]$ باشد، برد آن به صورت $[a, b]$ می‌باشد. حاصل $b - a$ کدام است؟

① ۲۸

② ۳۲

③ ۱۸

④ ۲۲

۲۸ - به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x) = (\frac{۳m + ۱}{۴})^{x}$ نزولی است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ هیچ مقدار m

۲۹ - کدام‌یک از توابع زیر در بازه‌ی $[۲, \pi]$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[-\pi, ۱]$ اکیداً نزولی است؟

① $y_{۱} = |\sin x|$

② $y_{۲} = |x - ۳|$

③ $y_{۳} = -x^{۲} + ۴x$

④ $y_{۴} = ۲x^{۲} - ۸x + ۳$

۳۰ - کدام‌یک از توابع زیر اکیداً یکنوا است؟

① $f(x)=\frac{۱}{x}$

② $f(x)=x^{۲}$

③ $f(x)=x|x|$

④ $f(x)=[x]$

۳۱ - بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x+۱|+|x-۱|$ روی آن صعودی است، کدام است؟

① $[۱,+\infty)$

② $[-۱,+\infty)$

③ $(-\infty,-۱)$

④ $(-\infty,۱]$

۳۲ - تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر، برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو این بازه رابطه‌ی $x_۱<x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ برقرار است؟

① $(-۳,-۱)$

② $(-۲,۰)$

③ $(-۱,۱)$

④ $(۰,۱)$

۳۳ - تابع $f:R\to R$ یک تابع پیوسته و نزولی اکید است که محور xها را با طول یک قطع می‌کند. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

① $[۱,+\infty)$

② $[۰,+\infty)$

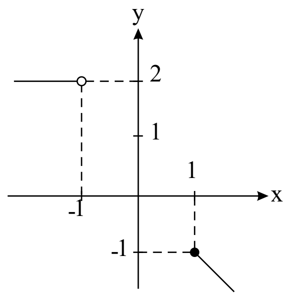
③ $(-\infty,۱]$

④ $[۰,۱]$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}2 & ;\ x<-1\\ k & ;\ -1\le x<1\\ -x & ;\ x\ge 1\end{cases}$$



با توجه به نمودار بالا برای این که تابع f نزولی باشد، باید داشته باشیم: $-1\le k\le 2$

k اعداد صحیح $=-1,0,1,2\Rightarrow$ ۴ مقدار

۲ - گزینه ۴ با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

$f:\{(-2,a),(-1,a-1),(0,a^3-1)\}$

$-2<-1<0\xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(-2)>f(-1)>f(0)\Rightarrow a>a-1>a^3-1$

$a>a-1\Rightarrow 0>-1\Rightarrow$ برقرار است $\Rightarrow a\in\mathbb{R}$ (۱)

$a^3-1<a-1\Rightarrow a^3-a<0\Rightarrow a(a^2-1)<0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$a(a^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Longrightarrow a<-1$ یا $0<a<1$ (۲)

$(1)\cap(2)\Rightarrow a<-1$ یا $0<a<1\Rightarrow a\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

۳ - گزینه ۲ با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

x	-6	0	2	6	7
y	2	4	m^2-3	7	9

با توجه به این که تابع غیریکنوا است، باید $m^2-3<4$ یا $m^2-3>7$ باشد، داریم:

$m^2-3<4\Rightarrow m^2<7\Rightarrow -\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$ (۱)

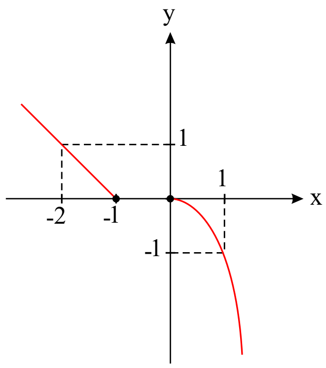
$m^2-3>7\Rightarrow m^2>10\Rightarrow m<-\sqrt{10}$ یا $m>\sqrt{10}$ (۲)

مجموعه جواب : $(1)\cup(2)\Rightarrow(-\infty,-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{7},\sqrt{7})\cup(\sqrt{10},+\infty)$

m اعداد صحیح ۳ و -3 را نمی‌تواند بپذیرد.

۴ - گزینه ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}|x+1| & ;\ x\le -1\Rightarrow y=|x+1|=-x-1\\ -x^2 & ;\ x\ge 0\end{cases}\rightarrow$$



با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-1)=f(0)=0$، تابع اکیداً نزولی نمی‌باشد.

۵ - گزینه ۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right) \Rightarrow (fof)(x_1) < (fof)(x_2)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right) \Rightarrow (fof)(x_1) < (fof)(x_2)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

بنابراین اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد آن‌گاه تابع fof در هر صورت اکیداً صعودی است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است و نمی‌تواند fof باشد. (گزینهٔ سوم خطی است با شیب منفی)

۶ - گزینه ۲ تابع نمایی $f(x) = a^x$ با شرط $a > 1$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

$$y = \left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x \Rightarrow \frac{5-k}{1-3k} > 1 \Rightarrow \frac{5-k}{1-3k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{5-k-1+3k}{1-3k} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2k+4}{1-3k} > 0$$

k	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\frac{2k+4}{1-3k}$		$-$	0	$+$	ت ن	$-$	

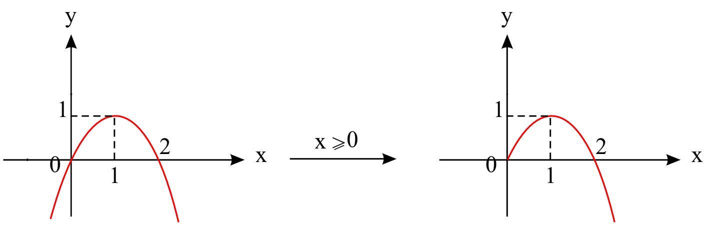
$$\Rightarrow -2 < k < \frac{1}{3}$$

۷ - گزینه ۲ ابتدا با گذاشتن شرط، قدرمطلق را از بین می‌بریم:

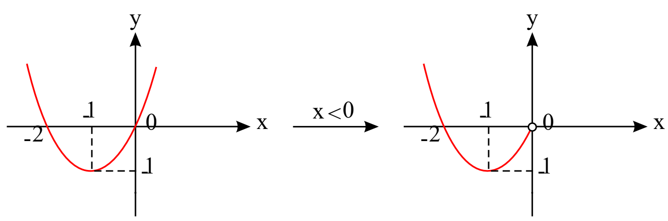
$$x \geq 0 \longrightarrow y = 2x - x^2 \longrightarrow S \left| \begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{matrix} \right. \longrightarrow S \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$x < 0 \longrightarrow y = 2x + x^2 \longrightarrow S \left| \begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{matrix} \right. \longrightarrow S \left| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

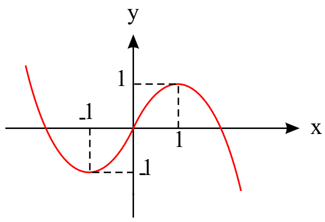
$y = 2x - x^2 \longrightarrow$



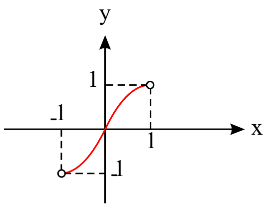
$y = 2x + x^2 \longrightarrow$



از ترکیب در شکل به

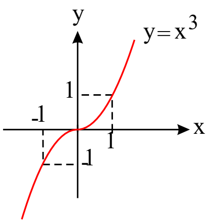


می‌رسیم که در بازهٔ $(-۱, ۱)$ به‌صورت

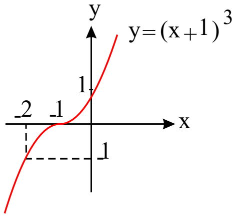


است که صعودی است.

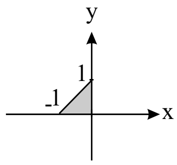
۸ ـ گزینه ۲ نمودار $y = x^{۳}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = (x + ۱)^{۳}$ حاصل شود.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

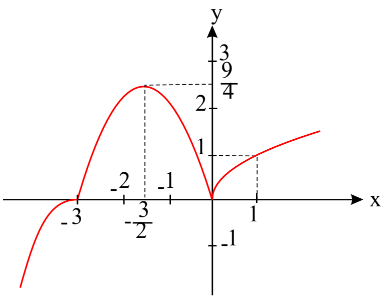
۹ ـ گزینه ۴ اگر تابع $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ax + b$ در سه نقطهٔ $x = \alpha$ و $x = \beta$ و $x = \gamma$ محور x ها را قطع کند، با توجه به این که ضریب $x^{۳}$ برابر یک است، می‌توان $f(x)$ را به‌صورت زیر نوشت.

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ax + b$$
$$\Rightarrow x^{۳} - (\alpha + \beta + \gamma)x^{۲} + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = x^{۳} + ۳x^{۲} + ax + b \quad (۱)$$

از طرفی $\alpha\beta\gamma = ۳$ پس داریم:

$$(۱) \Rightarrow -\alpha\beta\gamma = b \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ax - ۳$$
$$f(۲) = ۱۵ \Rightarrow ۸ + ۱۲ + ۲a - ۳ = ۱۵ \Rightarrow a = -۱$$

۱۰ ـ گزینه ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، توجه کنید سهمی $y = -x^{۲} - ۳x$ دارای رأس به مختصات $S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} = -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a} = \frac{۹}{۴} \end{array} \right.$ است که محور طول‌ها را در ۰ و -۳ قطع می‌کند.



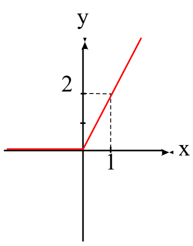
تابع در بازهٔ $(-\infty, -\frac{۳}{۲}]$ صعودی، در بازهٔ $[-\frac{۳}{۲}, ۰]$ نزولی و در بازهٔ $[۰, +\infty)$ صعودی است.

$$[-۴, -۲] \subset (-\infty, -\frac{۳}{۲}] \Rightarrow [-۴, -۲] \Rightarrow \text{صعودی}$$

$$[-۱, ۰] \subset [-\frac{۳}{۲}, ۰] \Rightarrow [-۱, ۰] \Rightarrow \text{نزولی}$$

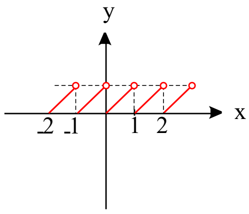
۱۱ ـ گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱) $y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow$



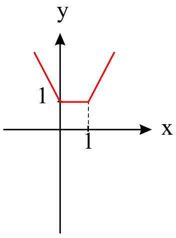
$\Rightarrow$ تابع صعودی است ·

گزینهٔ ۲) $y = x - [x] \Rightarrow$



$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است .

گزینهٔ ۳) $y = |x| + |x - ۱| \Rightarrow$

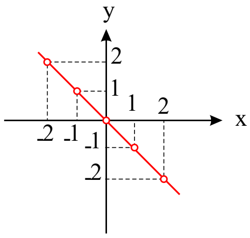


$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است .

گزینهٔ ۴) توجه کنید که $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ است.

$$y = x\left(\frac{۱}{[x]+[-x]}\right) \Rightarrow [x]+[-x] \neq ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \Rightarrow y = x(\frac{۱}{-۱}) = -x$$

$y = -x \ ,\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

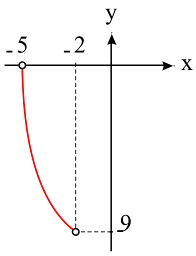


$\Rightarrow$ تابع نزولی است .

۱۲ - گزینه ۲

$$\left|x + \frac{۷}{۲}\right| < \frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} < x + \frac{۷}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} - \frac{۷}{۲} < x < \frac{۳}{۲} - \frac{۷}{۲} \Rightarrow -۵ < x < -۲$$

نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۴x - ۵$ را در بازهٔ $(-۵, -۲)$ رسم می‌کنیم، توجه کنید که رأس این سهمی $S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} = -۲ \\ \frac{۴ac-b^۲}{۴} = -۹ \end{array} \right.$ است و محور طول‌ها را در $x = ۱$ و $x = -۵$ قطع می‌کند.



تابع در بازهٔ $(-۵, -۲)$ نزولی است.

۱۳ - گزینه ۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \le f(b)$ آن گاه $a \ge b$.

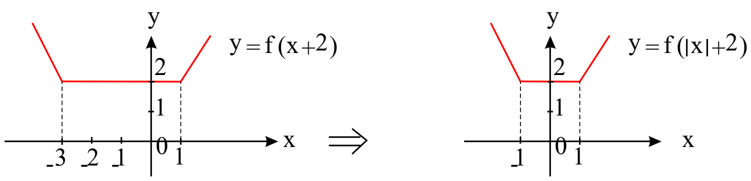
$$y = \sqrt{f(|x|) - f(۲)} \Rightarrow f(|x|) - f(۲) \ge ۰ \Rightarrow f(|x|) \ge f(۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x| \le ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow \text{دامنه} = [-۲, ۲]$$

۱۴ - گزینه ۳

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{x \to x+۲} y = f(x+۲) \xrightarrow{x \to |x|} y = f(|x| + ۲)$$

در نمودار $y = f(x+۲)$ سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینهٔ سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها یافته و به شکل اضافه می‌کنیم تا نمودار $y = f(|x| + ۲)$ حاصل شود.



بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(|x| + ۲)$ در آن بازه صعودی است بازهٔ $[-۱, +\infty)$ است.

۱۵ - گزینه ۳ تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

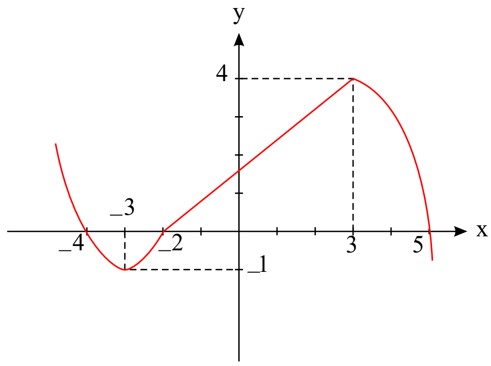
$$y_۱ = -x^۲ + ۶x - ۵ = -(x^۲ - ۶x + ۵) = -(x-۱)(x-۵) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = ۱ \ , \ x = ۵$$

$$\to S \left| \begin{array}{l} \dfrac{-b}{۲a} \\ \dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{array} \right. \to S \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۴ \end{array} \right.$$

$$y_۲ = \frac{۴}{۵}x + \frac{۸}{۵} \to \left| \begin{array}{l} -۲ \\ ۰ \end{array} \right. \ , \ \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۴ \end{array} \right. \quad \text{دو نقطه برای رسم}$$

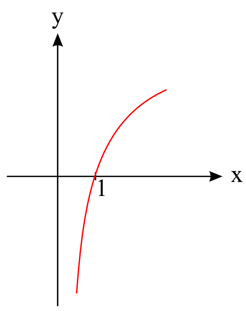
$$y_۳ = x^۲ + ۶x + ۸ = (x+۴)(x+۲) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = -۴ \ , \ x = -۲$$

$$\to S \left| \begin{array}{l} \dfrac{-b}{۲a} \\ \dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{array} \right. \to S \left| \begin{array}{l} -۳ \\ -۱ \end{array} \right.$$



تابع داده شده در بازهٔ $[-۳, ۳]$ اکیداً صعودی است و طول این بازه برابر ۶ است.

۱۶ - گزینه ۳ شکل فرضی



را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^۳ - x)f(x) \geq ۰ \to \begin{cases} x^۳ - x = ۰ \to x(x^۲ - ۱) = ۰ \to x = ۰ \ , \ x = \pm ۱ \\ f(x) = ۰ \to x = ۱ \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

x	−∞		−۱		۰		۱		+∞
$x^۳-x$		−	۰	+	۰	−	۰	+	
f(x)		−		−		−	۰	+	
عبارت ≥ ۰		+	۰	−	۰	+	۰	+	

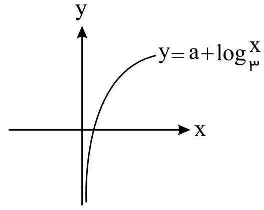
بنابراین دامنهٔ تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R} - (-۱, ۰)$ است پس:

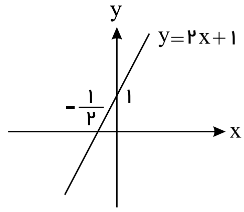
$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \to a + b = -۱$$

۱۷ - گزینه ۲ ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{۱}{۳}}^{x} & , x \geq ۳ \\ ۲x + ۱ & , x < ۳ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

تابع

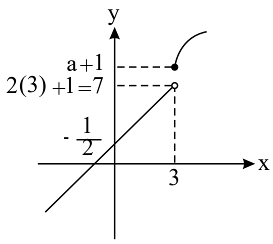
$$y = a - \log_{\frac{1}{3}}^{x} = a - \log_{3^{-1}}^{x} = a + \log_{3}^{x}$$





حال هردو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

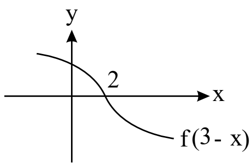
شرط $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$ به‌معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:



$\longrightarrow ۷ \leq a + ۱ \Rightarrow ۶ \leq a$

۱۸ - گزینه ۲ f اکیداً صعودی و $y = ۳ - x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(۳ - x)$ اکیداً نزولی است. چون $f(۱) = ۰$ است، $x = ۱$ صفر $f(x)$ و $x = ۲$ صفر تابع $f(۳ - x)$ است.

پس به‌طور نمادین تابع $f(۳ - x)$ به‌صورت مقابل است.



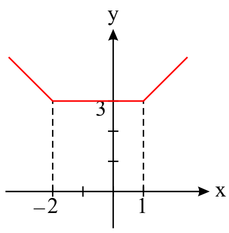
$$g(x) = \sqrt{\frac{x - ۴}{f(۳ - x)}} \Rightarrow \frac{x - ۴}{f(۳ - x)} \geq ۰$$

$\Longrightarrow$

x	$-\infty$	۲		۴	$+\infty$
x−۴	−		−	۰	+
f(۳−x)	+	۰	−		−
$\frac{x-۴}{f(۳-x)}$	−	ت ن	+	۰	−

$۲ < x \leq ۴ \Rightarrow$ اعداد صحیح: ۳ و ۴

۱۹ - گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x = -۲$ و $x = ۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\rightarrow x < -۲$: اکیداً نزولی

۲۰ - گزینه ۱ اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند در این صورت $b = \frac{a + c}{۲}$ است.

اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند در این صورت $b^۲ = ac$ است.

بنابراین:

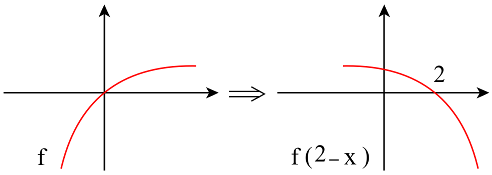
$$\frac{۱}{۲b} = \frac{\frac{۱}{b-c} + \frac{۱}{b-a}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{b} = \frac{b - a + b - c}{(b - c)(b - a)} \Rightarrow b = \frac{(b - c)(b - a)}{۲b - a - c}$$

$$\Rightarrow b = \frac{b^۲ + (-a - c)b + ac}{۲b - a - c} \Rightarrow ۲b^۲ - ab - bc = b^۲ - ab - bc + ac \Rightarrow b^۲ = ac$$

بنابراین b واسطهٔ هندسی بین جملات a و c است، یعنی a, b, c سه جملهٔ متوالی در یک دنبالهٔ هندسی‌اند.

۲۱ ـ گزینه ۱

ابتدا نمودار $f(x)$ و $f(۲-x)$ را رسم می کنیم.



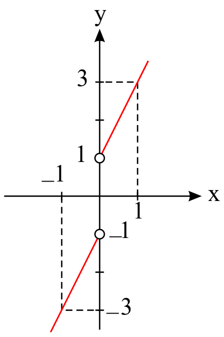
		۰		۲	
$f(۲-x)$	$+$		$+$	۰	$-$
x	$-$	۰	$+$		$+$
$xf(۲-x)\geq ۰$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow D_g=[۰\,,\,۲]$

۲۲ ـ گزینه ۱ ابتدا به صورت مشروط قدر مطلق را از بین می‌بریم:

$$x>۰\to y=۲x+\frac{x}{x}\to y=۲x+۱$$
$$x<۰\to y=۲x+\frac{-x}{x}\to y=۲x-۱$$

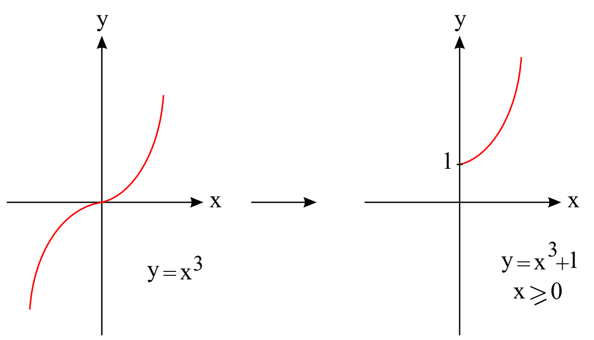
اکنون دو خط داده شده را با توجه به شرط رسم می‌کنیم.



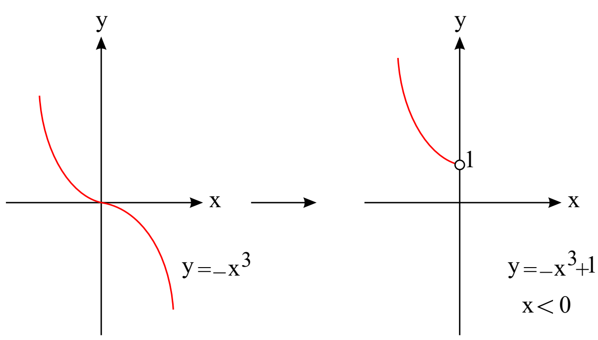
تابع اکیداً صعودی است

۲۳ ـ گزینه ۳ ابتدا به صورت مشروط، قدر مطلق را از بین می‌بریم.

$$x\geq ۰\to y=x^۲(x)+۱\to y=x^۳+۱$$

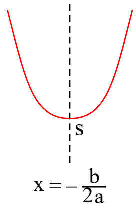


$$x<۰\to y=x^۲(-x)+۱\to y=-x^۳+۱$$



از ترکیب دو شکل به شکل گزینهٔ سوم می‌رسیم.

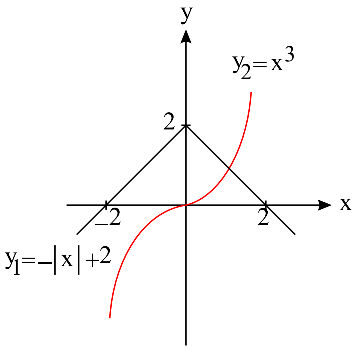
۲۴ – گزینه ۳ تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ با شرط $a>۰$ به صورت



است که در بازهٔ $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ صعودی است پس $x=-۲$ می‌تواند طول رأس سهمی و یا بزرگتر از طول رأس سهمی باشد.

$$-۲\ge\frac{-b}{۲a}\to -۲\ge\frac{-k}{۶}\to k\ge ۱۲$$

۲۵ – گزینه ۲ نمودارهای توابع $y_{۱}=-|x|+۲$ و $y_{۲}=x^{۳}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودارهای رسم‌شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۲۶ – گزینه ۳ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f=\{(-۲,۱۰-x),(۰,x^{۲}+۴),(۱,۲x+۷)\}$$

در تابع صعودی با افزایش x، مقدار y ثابت مانده یا افزایش می‌یابد، پس باید $۱۰-x\le x^{۲}+۴\le ۲x+۷$ باشد.

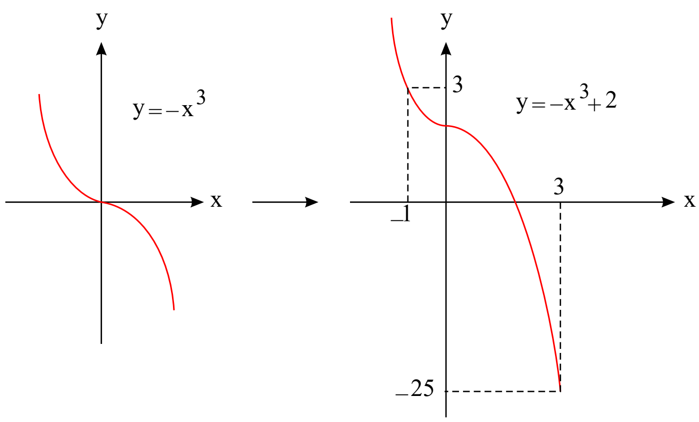
$$۱۰-x\le x^{۲}+۴\to x^{۲}+x-۶\ge ۰\to (x+۳)(x-۲)\ge ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le -۳ \text{ یا } x\ge ۲ \quad (I)$$

$$x^{۲}+۴\le ۲x+۷\to x^{۲}-۲x-۳\le ۰\to (x-۳)(x+۱)\le ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱\le x\le ۳ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲\le x\le ۳$ می‌رسیم.

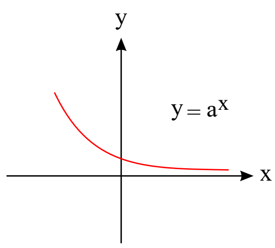
$$x\in[۲,۳]\to b-a=۳-۲=۱$$

۲۷ – گزینه ۱ با رسم تابع داده شده و تعیین نقاط ابتدائی و انتهایی بازهٔ داده شده، برد تابع مشخص می‌شود.



پس برد تابع به صورت $[-۲۵,۳]$ است و $b-a=۲۸$ می‌باشد.

۲۸ – گزینه ۲ تابع $y=a^{x}$ به‌ازای $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است و به صورت



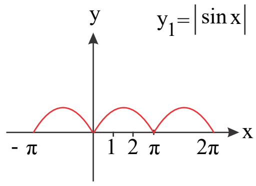
است و به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$\circ \leq \frac{\text{۳}m+\text{۱}}{\text{۴}} \leq \text{۱} \rightarrow \circ \leq \text{۳}m+\text{۱} \leq \text{۴} \rightarrow -\text{۱} \leq \text{۳}m \leq \text{۳} \rightarrow \frac{-\text{۱}}{\text{۳}} \leq m \leq \text{۱}$$

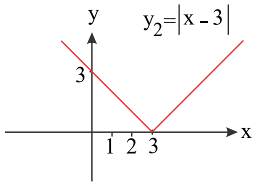
که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

۲۹ - گزینه ۴ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم (توجه کنید π را در رسم حدوداً ۳ در نظر می‌گیریم)

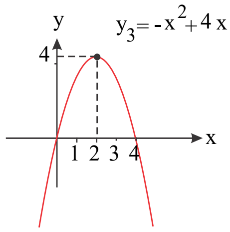
گزینه:1



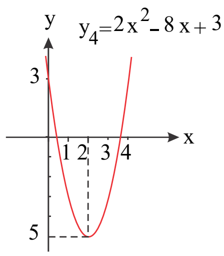
گزینه:2



گزینه:3



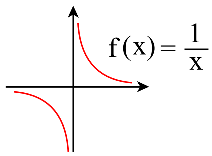
گزینه:4



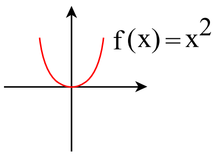
در مورد گزینه‌های سوم و چهارم به این نکته توجه کنید که رأس سهمی از رابطه‌ی $S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{\text{۲}a}\\ \frac{\text{۴}ac-b^{\text{۲}}}{\text{۴}a}\end{array}\right.$ به‌دست می‌آید.

با توجه به نمودارها، گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

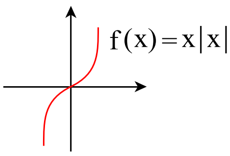
۳۰ - گزینه ۳ نمودار هر چهار تابع را رسم می‌کنیم:



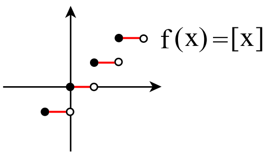
(1)



(2)



(3)

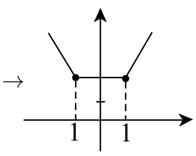


(4)

مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ی ۳ تابعی اکیداً یکنوا است.

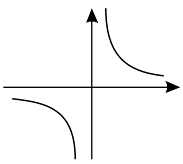
۳۱ - گزینه ۲ تابع داده شده، یک تابع گلدانی است آن را رسم می‌کنیم.

$$\begin{array}{rl} x<-\text{۱}: & y=-x-\text{۱}-x+\text{۱} \rightarrow y=-\text{۲}x \\ -\text{۱} \leq x \leq \text{۱}: & y=x+\text{۱}-x+\text{۱} \rightarrow y=\text{۲} \\ x>\text{۱}: & y=x+\text{۱}+x-\text{۱} \rightarrow y=\text{۲}x \end{array} \rightarrow$$

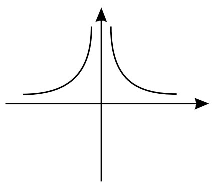


بازه‌ی $[-\text{۱},+\infty)$ بزرگ ترین بازه‌ای است که تابع داده شده روی آن صعودی است.

۳۲ - گزینه ۴ نمودار تابع $y=\frac{\text{۱}}{x}$ به صورت

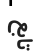


است، برای رسم نمودار $y=\frac{\text{۱}}{|x|}$ هر آنچه از شکل زیر محور xها است آئینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم یعنی شکل تابع به صورت



درمی‌آید. وقتی گفته می‌شود $x_{\text{۱}}<x \Leftrightarrow f(x_{\text{۱}})>f(x_{\text{۲}})$ یعنی بازه‌ای که در آن، تابع اکیداً نزولی است و با توجه به گزینه‌ها و نمودار، گزینه‌ی چهارم صحیح است.

۳۳ - گزینه ۴ چون تابع پیوسته و نزولی اکید و $f(\circ)=\circ$ است پس حتما به ازای $x>\text{۱}$، $f(x)<\circ$ است و به ازای $x<\text{۱}$، $f(x)>\circ$ است. برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ کافی است زیرا رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.



x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
x		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	۰	$+$	۰	$-$	
$xf(x)\geq 0$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$\Longrightarrow x \in [0,1]$

پاسخ

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴
۲ - ۴
۳ - ۲
۴ - ۳
۵ - ۳
۶ - ۲
۷ - ۲
۸ - ۲
۹ - ۴
۱۰ - ۳
۱۱ - ۴
۱۲ - ۲
۱۳ - ۲
۱۴ - ۳
۱۵ - ۳
۱۶ - ۳
۱۷ - ۲
۱۸ - ۲
۱۹ - ۱
۲۰ - ۱
۲۱ - ۱
۲۲ - ۱
۲۳ - ۳
۲۴ - ۳
۲۵ - ۲
۲۶ - ۳
۲۷ - ۱
۲۸ - ۲
۲۹ - ۴
۳۰ - ۳
۳۱ - ۲
۳۲ - ۴
۳۳ - ۴