نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر $g(x) = ۲x + ۱$ و $fog(x) = ۴x^۲ - x - ۱$، آن‌گاه $(f - g)(۱)$ کدام است؟

① ۴

② ۲

③ -۲

④ -۴

۲- اگر $f(x) = \begin{cases} |x| & x \geq -۱ \\ -|x| & x < -۱ \end{cases}$ و $g(x) = x$، چند عدد صحیح در معادلهٔ $(f \cdot g)(x) = ۱$، صدق می‌کند؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۳- f و g دو تابع درجه دوم هستند. اگر $(f + g)(x) = ۴x^۲ + ۱$ و $(f - g)(x) = ۲x + ۱$ باشند، $g(۲)$ کدام است؟

① ۴

② ۶

③ ۸

④ ۱۰

۴- اگر $f(x) = \sqrt{n - ۳x}$ و $g(x) = \sqrt{x - ۳m}$ و تابع $f + g$ به‌صورت $\{(۱, a)\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $am + n$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$

② ۳

③ صفر

④ ۱

۵- اگر $f=\{(۲,۱),(m^{۲}-m,۱),(-۱,۳),(\frac{m}{۲},m+۱)\}$ تابعی یک به یک و $g(x)=[\frac{۳x}{۲}+۱]$ باشد، حاصل $(f+g)(m)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۲

② $-\frac{۱}{۲}$

③ ۱

④ $\frac{۳}{۲}$

۶- اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}\ ,\ g(x)=\sqrt{a-x}+۲b\ ,\ D_{f-g}=[-۳,۱۰]$ و $(f+g)(۶)=۶$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

① $\frac{۱۹}{۲}$

② ۱۰

③ $\frac{۲۱}{۲}$

④ ۱۱

۷- اگر $f+g=\{(۳,۲),(۴,۲),(۵,-۱)\}$ و $f-g=\{(۳,۶),(۴,۶),(۵,۱)\}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع $\frac{۱}{f}$ شامل چند عدد حقیقی است؟

① ۳

② ۲

③ ۱

④ قابل تشخیص نمی‌باشد.

۸- اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x-۲}{x-۳}$ باشند، دامنهٔ تابع $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

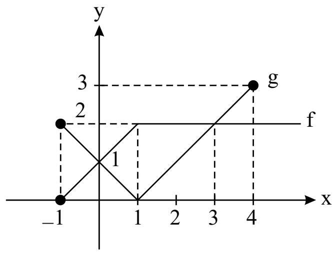
① $\mathbb{R}-\{-۱,۳\}$

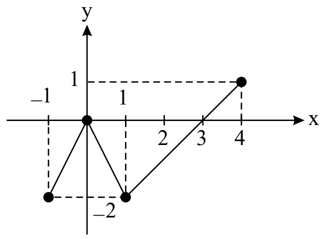
② $\mathbb{R}-\{-۱,\frac{۱}{۲},۳\}$

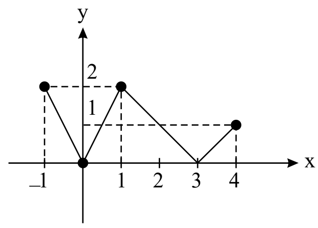
③ $\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$

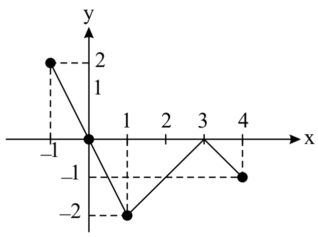
④ $\mathbb{R}-\{-۱,\frac{۱}{۲},۲,۳\}$

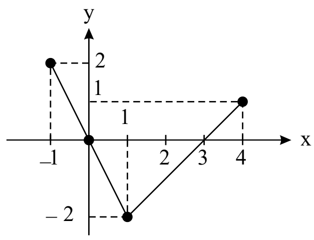
۹ - نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده‌اند. نمودار تابع $(g-f)(x)$ شبیه کدام‌یک از نمودارهای زیر است؟



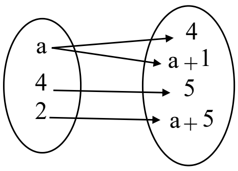
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰ - نمودار ون تابع f به‌صورت زیر و تابع g به‌صورت $g=\{(x,۲x-۱)|x\in R_f\}$ است، مقدار $f+g$ کدام است؟



۱) ۷

۲) ۹

۳) ۱۲

۴) ۱۵

۱۱ - اگر $f=\{(۱,m),(m,۲),(۴,۱),(۱,m^۲-۱۲)\}$ یک تابع باشد و $g(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند عضو دارد؟

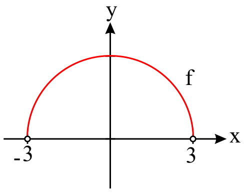
۱) ۱

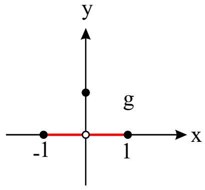
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۲ - اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟





① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۱۳ - توابع $f=\{(-۱,۴),(۲,۰),(-۳,\frac{۳}{۲})\}$ و $g=\{(۰,\frac{۳}{۲}),(۲,-۱),(-۱,۱)\}$ مفروض‌اند. مجموع همهٔ مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تابع $\frac{۱}{۲}f-۳g^{۲}$ کدام است؟ ($g\cdot g=g^{۲}$)

① -۱
② -۲
③ -۳
④ -۴

۱۴ - اگر $f=\{(-۲,۳),(-۱,-۱),(۰,-\frac{۲}{a})\}$ ، $g=\{(۲a,۳),(۰,۱),(-۳,۴)\}$ و $D_{f-g}=\{۰,-۱\}$ باشد، حاصل‌ضرب اعضای متمایز برد $۲f+g$ چندبرابر a است؟

① -۹
② ۹
③ ۱۸
④ -۱۸

۱۵ - اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{x+۴}}$ و $g(x)=\frac{x^{۲}-۲۵}{\sqrt{x+۴}}$ باشند، دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

① $(-۴,+\infty)-\{۵\}$
② $\mathbb{R}-\{-۵,۵\}$
③ $(-۴,+\infty)$
④ $(-۴,+\infty)-\{-\frac{۱}{۲}\}$

۱۶- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $f-g=\{(۱,-۴),(۳,۱)\}$، آن‌گاه تابع $h(x)=\dfrac{۱}{g(x)-۸}$ شامل کدام عضو است؟

① $(۱,\dfrac{۱}{۸})$

② $(۳,\dfrac{-۱}{۵})$

③ $(۳,\dfrac{۱}{۵})$

④ $(۱,-\dfrac{۱}{۸})$

۱۷- اگر داشته باشیم:

$f=\{(۱,۳),(۴,m),(۲,-n^۲+۱),(-۳,۱)\}$، $g=\{(۴,۱-n),(-۲,۱),(۲,۵),(-۳,n+۲)\}$ و $\dfrac{f}{g}=\{(۴,-۵),(۲,-\dfrac{۳}{۵})\}$

آن‌گاه حاصل $n-m$ کدام است؟

① ۱۷

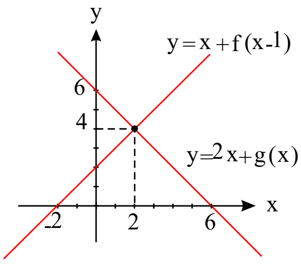
② -۷

③ ۸

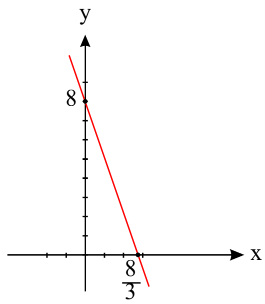
④ ۱۳

پاسخ

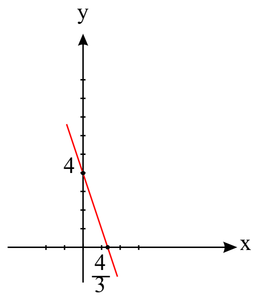
۱۸ - نمودار توابع $y = x + f(x-1)$ و $y = 2x + g(x)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. نمودار تابع $y = f(x) + g(x)$ کدام است؟



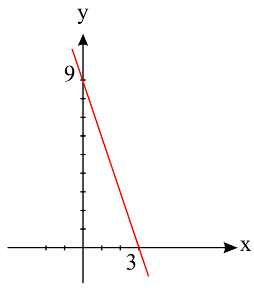
①



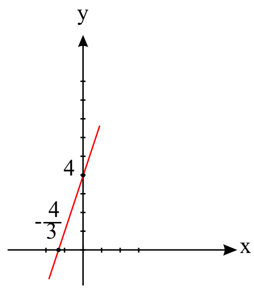
②



③



④



۱۹ - اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ 1 & , x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \sqrt{2 - x^2}$، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f + g$ کدام است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۲۰- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱]$

۲) $\mathbb{R}$

۳) $[-۱,+\infty)$

۴) $[۰,+\infty)$

۲۱- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۲-۲x^۴}$ باشند، آن‌گاه کدام گزینه نشان‌دهندهٔ تابع $h=\dfrac{f}{g}$ است؟

۱) $y=\dfrac{۱}{\sqrt{۲(۱+x^۲)}}$

۲) $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$

۳) $y=\dfrac{۱}{\sqrt{-۲(x^۲-۱)}}$

۴) تابع h تعریف نمی‌شود.

۲۲- حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(۵,۶),(۳,m^۲-m),(-۴,۲),(۴,m^۲-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

۱) $(-۲,۱)\cup(۲,۳)$

۲) $[-۲,۳]-(-۱,۲)$

۳) $[-۲,۳]-[-۱,۲]$

۴) $[-۲,۱]\cup[۲,۳]$

۲۳- وضعیت نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ چگونه است؟

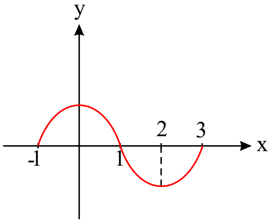
۱) همواره صعودی

۲) همواره نزولی

۳) برای $x>۱$ صعودی و برای $x<۱$ نزولی

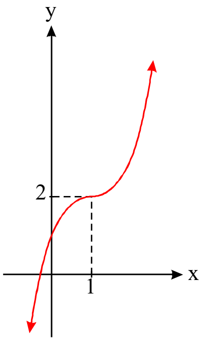
۴) برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی

۲۴ – شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(۱-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



① $[-۴,-۳]$
② $(-۳,-۱)$
③ $(-۱,۱)$
④ $[۱,۲]$

۲۵ – نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^۳+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a\cdot b$ کدام است؟



① ۲
② -۲
③ ۳
④ -۳

۲۶ – اگر f تابعی نزولی غیرثابت باشد که نمودار آن بالای محور xها قرار دارد، توابع $g(x)=x-f(x)$ و $h(x)=\dfrac{۱}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

① نزولی – نزولی
② صعودی – نزولی
③ نزولی – صعودی
④ صعودی – صعودی

۲۷ – تابع چندجمله‌ای $y=f(x)$ اکیداً صعودی است و نمودار آن از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-(f(x))^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

① ۱۰
② ۷
③ ۱۱
④ ۸

۲۸ - بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x - |x|$ در آن بازه صعودی است، کدام است؟

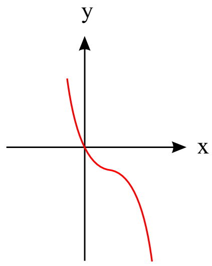
۱) $(-\infty, ۰]$

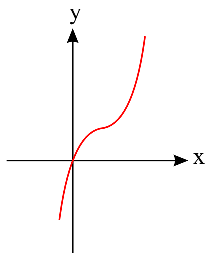
۲) $\mathbb{R}$

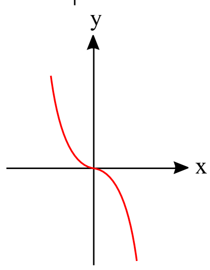
۳) $[۰, +\infty)$

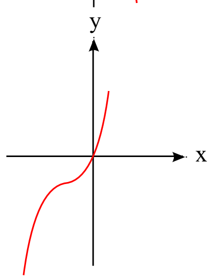
۴) $\varnothing$

۲۹ - نمودار تابع $f(x) = ۶x^۲ - x^۳ - ۱۲x$ شبیه کدام گزینه است؟

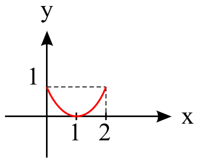
۱)


۲)


۳)


۴)


۳۰ - نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y = f(f(x))$ با ورودی $1 \leq x \leq 2$ چگونه است؟



(۱) صعودی

(۲) نزولی

(۳) ابتدا نزولی سپس صعودی

(۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$fog(x)=4x^2-x-1 \to f(g(x))=4x^2-x-1 \to f(2x+1)=4x^2-x-1$$
$$\xrightarrow{x=0} f(1)=-1$$

$$g(x)=2x+1 \to g(1)=2(1)+1=3$$

پس: $(f-g)(1)=f(1)=g(1)=-1-3=-4$

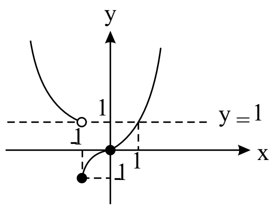
۲ - گزینه ۱ ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & -1\leq x<0 \\ x & x<-1 \end{cases}$$

حال تابع $(f\cdot g)(x)$ را به دست می آوریم:

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & -1\leq x<0 \\ x^2 & x<-1 \end{cases}$$

نمودار تابع $(f\cdot g)(x)$ به شکل مقابل است:



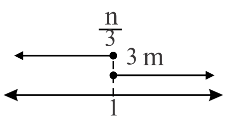
که تنها به ازای $x=1$ داریم: $(f\cdot g)(x)=1$

۳ - گزینه ۲ برای حل سؤال ابتدا $x=2$ را در هر دو تابع جایگذاری می‌نماییم و سپس به صورت یک دستگاه $g(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (f+g)(x)=f(x)+g(x)=4x^2+1 &\xrightarrow{x=2} \\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x+1 &\xrightarrow{x=2} \end{aligned} - \begin{cases} f(2)+g(2)=17 \\ f(2)-g(2)=5 \end{cases} \to 2g(2)=12 \to g(2)=6$$

۴ - گزینه ۲ ابتدا باید دامنهٔ $f+g$ را محاسبه کرده و برابر عدد ۱ قرار دهیم.

$$f(x)=\sqrt{n-3x} \to n-3x\geq 0 \to x\leq \frac{n}{3}$$
$$g(x)=\sqrt{x-3m} \to x-3m\geq 0 \to x\geq 3m$$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{1\} \to$ 

$$\frac{n}{3}=3m=1 \to \begin{cases} n=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$$

حال توابع f و g را مشخص می‌نماییم.

$$f(x)+g(x)=\sqrt{3-3x}+\sqrt{x-3(\frac{1}{3})}=\sqrt{3-3x}+\sqrt{x-1}$$
$$\xrightarrow{x=1} f(1)+g(1)=0+0=0 \to a=0$$

پس: $am+n=0\times\frac{1}{3}+3=3$

۵ - گزینه ۱ f تابعی یک به یک است یعنی:

$$\begin{cases} (2,1)\in f \\ (m^2-m,1)\in f \end{cases} \Rightarrow m^2-m=2$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ \text{یا} \\ m=-1 \end{cases}$$

$m=2$ قابل قبول نیست، چون f یک به یک نمی‌شود:

$$f=\{(2,1),(-1,3),(1,3)\}$$

ولی اگر $m=-1$ باشد، داریم:

$$f=\{(2,1),(-1,3),(-\frac{1}{2},0)\}$$

ما حاصل $(f+g)(-1)$ را می‌خواهیم:

$$(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=3+[-\frac{3}{2}+1]=3+[-\frac{1}{2}]=3-1=2$$

۶ - گزینه ۳ برای حل سوال ابتدا باید دامنهٔ هر دو ضابطه را تعیین نماییم و بین آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$f(x)=\sqrt{x+3}\rightarrow x+3\geq 0\rightarrow x\geq -3$$

$$g(x)=\sqrt{a-x}\rightarrow a-x\geq 0\rightarrow x\leq a$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=[-3,a]=[-3,10]\rightarrow \boxed{a=10}$$

حال برای محاسبهٔ پارامتر b باید تابع $f+g$ را بسازیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{a-x}+2b$$

$$(f+g)(6)=f(6)+g(6)=\sqrt{6+3}+\sqrt{10-6}+2b$$

$$3+2+2b=6\rightarrow 2b=1\rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

پس جواب نهائی برابر است با:

$$a+b=10+\frac{1}{2}=\frac{21}{2}$$

۷ - گزینه ۴ با جمع کردن دو تابع $f+g$ و $f-g$ داریم:

$$(f+g)+(f-g)=2f=\{(3,8),(4,8),(5,0)\}$$

پس $f=\{(3,4),(4,4),(5,0)\}$ پس این‌طور به نظر می‌رسد که:

$$\frac{1}{f}=\{(3,\frac{1}{4}),(4,\frac{1}{4})\}$$

یعنی دامنهٔ آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیش‌تر می‌توان فهمید که چون دامنه‌های $f+g$ و $f-g$ اشتراک دامنه‌های f و g هستند، دامنهٔ f شامل اعداد دیگری هم می‌تواند باشد که با دامنهٔ g مشترک نباشند. پس $\frac{1}{f}$ هم می‌تواند شامل زوج‌های بیش‌تری باشد. به‌طور کلی می‌توان گفت چون دامنهٔ f مشخص نیست، پس دامنهٔ $\frac{1}{f}$ مشخص نیست.

۸ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\rightarrow x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$g(x)=\frac{x-2}{x-3}\rightarrow x-3\neq 0\rightarrow x\neq 3\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{3\}$$

$$g(x)=0\rightarrow x-2=0\rightarrow x=2$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1,3\}-\{2\}\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-1,2,3\}$$

۹ - گزینه ۴ با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر تابع $g-f$ را به‌ازای اعداد صحیح ۱−، ۰، ۱، ۳ و ۴ پیدا می‌کنیم و از روش رد گزینه‌های نادرست استفاده می‌کنیم.

$$D_f\cap D_g=[-1,4]$$

$(g-f)(-1)=g(-1)-f(-1)=2-0=2\Rightarrow$ گزینهٔ ۱ نادرست

$(g-f)(0)=1-1=0$

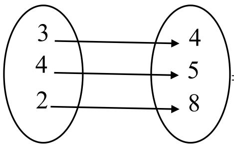
$(g-f)(1)=0-2=-2\Rightarrow$ گزینهٔ ۲ نادرست

$(g-f)(3)=2-2=0$

$(g-f)(4)=3-2=1\Rightarrow$ گزینهٔ ۳ نادرست

پس گزینه‌های «۱» تا «۳» نادرست هستند.

۱۰ - گزینه ۳

f شرط تابع بودن $\Rightarrow a+۱=۴ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow$  $\Rightarrow f=\{(۳,۴),(۴,۵),(۲,۸)\}$

$g=\{(x,۲x-۱)|x\in R_f\}=\{(۴,۷),(۵,۹),(۸,۱۵)\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۴\}$

$(f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۵+۷=۱۲$

۱۱ - گزینه ۲ ابتدا تابع بودن f را بررسی می‌کنیم:

$$(۱,m)=(۱,m^۲-۱۲) \Rightarrow m^۲-۱۲=m \Rightarrow m^۲-m-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} m_۱=۴ \\ m_۲=-۳ \end{cases}$$

اگر $m=۴$ آن‌گاه دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۴ و مؤلفهٔ دوم متفاوت خواهیم داشت و f تابع نخواهد بود، پس فقط $m=-۳$ پذیرفته است. حال در تابع $f=\{(۱,-۳),(-۳,۲),(۴,۱)\}$ تنها دو عضو در دامنهٔ $g(x)=\sqrt{x}$ صدق می‌کنند. پس دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ۲ عضو است.

۱۲ - گزینه ۱

با توجه به نمودار f و g داریم: $D_f=(-۳,۳)\ ,\ D_g=[-۱,۱]$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}\ ,\ D_f\cap D_g=[-۱,۱]$

$g(x)=۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱\ ,\ x\ne ۰ \Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-۱,۱]-([-۱,۱]-\{۰\})=\{۰\}$

دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x=۰$ است.

۱۳ - گزینه ۳

$f=\{(-۱,۴),(۲,۰),(-۳,\frac{۳}{۲})\}\quad D_f=\{-۱,۲,-۳\}$

$g=\{(۰,\frac{۳}{۲}),(۲,-۱),(-۱,۱)\}\quad D_g=\{۰,۲,-۱\}$

$D_f\cap D_g=\{۲,-۱\}$

$(\frac{۱}{۲}f-۳g^۲)(-۱)=\frac{۱}{۲}f(-۱)-۳g^۲(-۱)=\frac{۱}{۲}\times ۴-۳(۱)^۲=۲-۳=-۱$

$(\frac{۱}{۲}f-۳g^۲)(۲)=\frac{۱}{۲}f(۲)-۳g^۲(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۰-۳(-۱)^۲=۰-۳=-۳$

$\frac{۱}{۲}f-۳g^۲=\{(-۱,-۱),(۲,-۳)\} \Rightarrow -۱-۱+۲-۳=-۳$

۱۴ - گزینه ۴

$D_f=\{-۲,-۱,۰\}\ ,\ D_g=\{۲a,۰,-۳\} \Rightarrow D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۰,-۱\}$

باتوجه به رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت که $۲a$ باید -۱ باشد. پس داریم:

$۲a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow g=\{(-۱,۳),(۰,۱),(-۳,۴)\}\ ،\ f=\{(-۲,۳),(-۱,-۱),(۰,۴)\}$

$(۲f+g)(۰)=۲f(۰)+g(۰)=۲\times ۴+۱=۹$

$(۲f+g)(-۱)=۲f(-۱)+g(-۱)=۲(-۱)+۳=۱$

$۲f+g=\{(۰,۹),(-۱,۱)\} \Rightarrow$ برد $۲f+g=\{۹,۱\} \Rightarrow ۹\times ۱=۹ \Rightarrow \frac{۹}{a}=\frac{۹}{-\frac{۱}{۲}}=-۱۸$

۱۵ - گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{x+۴}}\longrightarrow D_f:\ x+۴>۰\longrightarrow x>-۴$$

$$g(x)=\frac{x^۲-۲۵}{\sqrt{x+۴}}\longrightarrow D_g:\ x+۴>۰\longrightarrow x>-۴$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=(x>-۴)\cap(x>-۴)-\{x|\frac{x^۲-۲۵}{\sqrt{x+۴}}=۰\}$$

$$=x>-۴-\{x=\pm۵\}=(-۴,+\infty)-\{۵\}$$

۱۶ - گزینه ۲ می‌دانیم $D_{f-g}=D_f\cap D_g$ و چون $D_{f-g}=\{۱,۳\}$ پس ۳ و ۱ حتماً در دامنهٔ g هستند.

$$(۱,-۴)\in f-g\longrightarrow(f-g)(۱)=-۴\longrightarrow f(۱)-g(۱)=-۴\longrightarrow ۴-g(۱)=-۴\longrightarrow g(۱)=۸$$

$$(۳,۱)\in f-g\longrightarrow(f-g)(۳)=۱\longrightarrow f(۳)-g(۳)=۱\longrightarrow ۴-g(۳)=۱\longrightarrow g(۳)=۳$$

پس : $\begin{cases}(۱,۸)\in g\longrightarrow\frac{۱}{g(x)-۸}:(۱,\frac{۱}{۸-۸})\ \text{غیر قابل قبول}\\(۳,۳)\in g\longrightarrow\frac{۱}{g(x)-۸}:(۳,\frac{۱}{۳-۸})=(۳,\frac{-۱}{۵})\end{cases}$

۱۷ - گزینه ۴

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$$

توجه کنید $D_f\cap D_g=\{-۳,۲,۴\}$ است و چون $D_{\frac{f}{g}}$ فقط شامل ۲ و ۴ است، پس حتماً $g(-۳)=۰$ است، یعنی:

$$g(-۳)=۰\to n+۲=۰\to n=-۲$$

اکنون تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g}=\{(۴,\frac{m}{۱-n}),(۲,\frac{۱-n^۲}{۵})\}=\{(۴,-۵),(۲,-\frac{۳}{۵})\}$$

$$\to\frac{m}{۱-n}=-۵\xrightarrow{n=-۲}\frac{m}{۳}=-۵\to m=-۱۵\to n-m=-۲+۱۵=۱۳$$

۱۸ - گزینه ۱ معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ را می‌یابیم و آن را برابر با عبارت $x+f(x-۱)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y}{x+۲}=\frac{۰-۲}{-۲-۰}=۱\Rightarrow y=x+۲\Rightarrow x+f(x-۱)=x+۲$$

$$\Rightarrow f(x-۱)=۲\xrightarrow{x\to x+۱}f(x)=۲$$

همچنین معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۶)$ و $(۶,۰)$ را یافته و برابر با عبارت $۲x+g(x)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y-۶}{x}=\frac{۰-۶}{۶-۰}=-۱\Rightarrow y-۶=-x\Rightarrow y=-x+۶\Rightarrow ۲x+g(x)=-x+۶\Rightarrow g(x)=-۳x+۶$$

پس: $y=f(x)+g(x)=۲+۶-۳x=۸-۳x\Rightarrow y=-۳x+۸$

که نمودارش در گزینهٔ اول آمده است.

۱۹ - گزینه ۱

$$g(x)=\sqrt{۲-x^۲}\to D_g:۲-x^۲\geq۰\to x^۲\leq۲\to-\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}$$

$D_f=\mathbb{R}$ است پس $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ است.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۱+\sqrt{۲-x^۲} & -\sqrt{۲}\leq x<۱\\x+\sqrt{۲-x^۲} & ۱\leq x\leq\sqrt{۲}\end{cases}$$

$(f+g)(x)=۰\to\begin{cases}\sqrt{۲-x^۲}=-۱\quad\text{امکان ندارد.}\\\sqrt{۲-x^۲}=-x\to ۲-x^۲=x^۲\to x^۲=۱\to\begin{cases}x=۱\quad\text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند.)}\\x=-۱\quad\text{غ ق ق (باتوجه به بازه)}\end{cases}\end{cases}$

پس معادلهٔ $(f+g)(x)=۰$ ریشه ندارد.

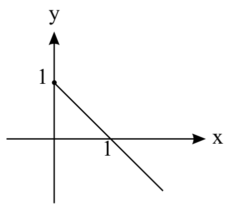
۲۰ - گزینه ۱

$f(x) = x + \sqrt{x} \to x \geq ۰ \to D_f = [۰, +\infty)$

$g(x) = ۱ + \sqrt{x} \to x \geq ۰ \to D_g = [۰, +\infty)$

$\to D_{(g-f)} = D_g \cap D_g = [۰, +\infty)$

$(g-f)(x) = ۱ + \sqrt{x} - (x + \sqrt{x}) \to (g-f)(x) = ۱ - x$



$\to R_{(g-f)} = (-\infty, ۱]$

۲۱ - گزینه ۴

$h = \dfrac{f}{g} \Rightarrow D_h = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$

$f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱} \Rightarrow x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \leq -۱$ یا $x \geq ۱ \Rightarrow D_f = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{۲ - ۲x^۴} \Rightarrow ۲ - ۲x^۴ \geq ۰ \Rightarrow x^۴ \leq ۱ \Rightarrow |x| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_g = [-۱, ۱]$

$D_f \cap D_g = \{-۱, ۱\}\ ,\ g(x) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲ - ۲x^۴} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x^۴ = ۰$

$\Rightarrow x^۴ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow D_h = \{-۱, ۱\} - \{-۱, ۱\} = \varnothing$

دامنهٔ تابع h برابر تهی است. یعنی تابع h تعریف نمی‌شود.

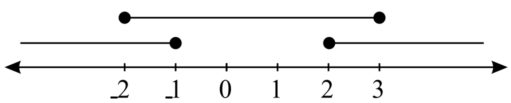
۲۲ - گزینه ۲ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$f : \{(-۴, ۲), (۳, m^۲ - m), (۴, m^۲ - m), (۵, ۶)\}$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱ < x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱) \leq f(x_۲)$ است پس:

$$۲ \leq m^۲ - m \leq ۶ \to \begin{cases} m^۲ - m \geq ۲ \to m^۲ - m - ۲ \geq ۰ \to (m-۲)(m+۱) \geq ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m \leq -۱ \ \text{یا}\ m \geq ۲ \quad (I) \\ m^۲ - m \leq ۶ \to m^۲ - m - ۶ \leq ۰ \to (m-۳)(m+۲) \leq ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ \leq m \leq ۳ \quad (II) \end{cases}$$

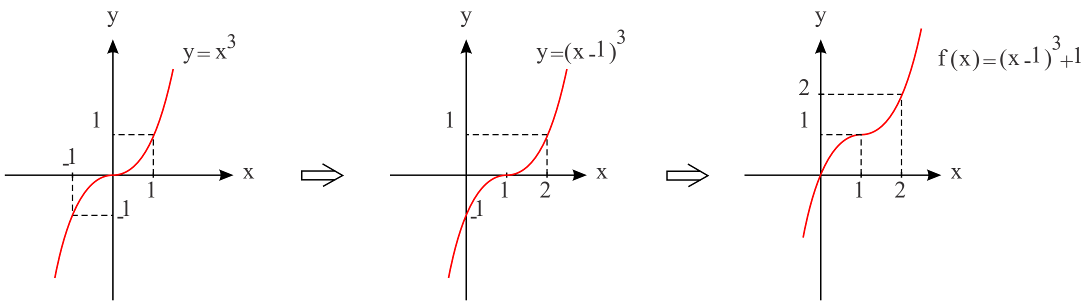
از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$\to m \in [-۲, ۳] - (-۱, ۲)$

۲۳ - گزینه ۱

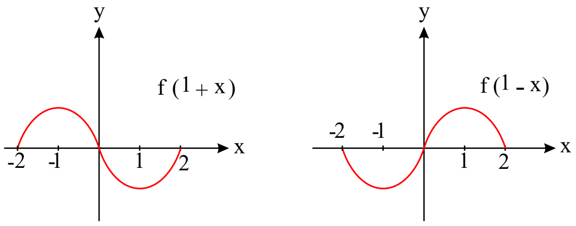
$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ + ۱ = (x-۱)^۳ + ۱$



تابع f در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۲۴ - گزینه ۴

نمودار تابع $y = f(۱-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار $f(۱-x)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار $f(۱-x)$، نمودار تابع $f(۱+x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های $[-۲,-۱]$ و $[۱,۲]$ اکیداً نزولی است.

۲۵ ـ گزینه ۱ نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y=(x-۱)^۳+۲$ به‌دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$a=۱\ ,\ \ b=۲\Rightarrow a\cdot b=۲$

۲۶ ـ گزینه ۲ چون نمودار f بالای محور xها قرار دارد یعنی مقادیر تابع f همواره مثبت است، پس f تابعی نزولی با مقادیر مثبت است و داریم:

$x_۱<x_۲\xrightarrow{\text{نزولی}}f(x_۱)\geq f(x_۲)\xrightarrow{\times(-۱)}-f(x_۱)\leq -f(x_۲)$

پس اگر f نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است. از طرفی جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است، پس:

$g(x)=x+(-f(x))\Rightarrow$ صعودی است g.

$x_۱<x_۲\Rightarrow -x_۱>-x_۲\xrightarrow{f\ \text{نزولی}}f(-x_۱)\leq f(-x_۲)$

$\xrightarrow{\text{مقادیر } f \text{ مثبت‌اند.}}\dfrac{۱}{f(-x_۱)}\geq\dfrac{۱}{f(-x_۲)}\Rightarrow h(x_۱)\geq h(x_۲)$

h نزولی است.

۲۷ ـ گزینه ۴ چون تابع f از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد، داریم: $f(-۴)=-۲\ ,\ \ f(۳)=۲$

$y=\sqrt{۴-f((x))^۲}\Rightarrow ۴-(f(x))^۲\geq ۰\Rightarrow (f(x))^۲\leq ۴\Rightarrow |f(x)|\leq ۲\Rightarrow -۲\leq f(x)\leq ۲$

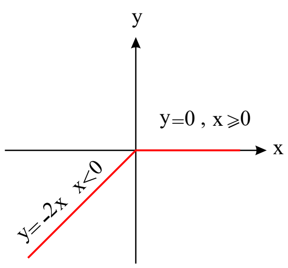
$\xrightarrow[f(۳)=۲]{f(-۴)=-۲}f(-۴)\leq f(x)\leq f(۳)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}}-۴\leq x\leq ۳\Rightarrow$ اعداد صحیح: $-۴,-۳,\cdots,۲,۳$

دامنه شامل ۸ عدد صحیح است.

۲۸ ـ گزینه ۲ شکل تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

$x\geq ۰\to y=x-x\to y=۰$

$x<۰\to y=x+x\to y=۲x\xrightarrow{\text{برای رسم}}\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}-۱\\-۲\end{vmatrix}$

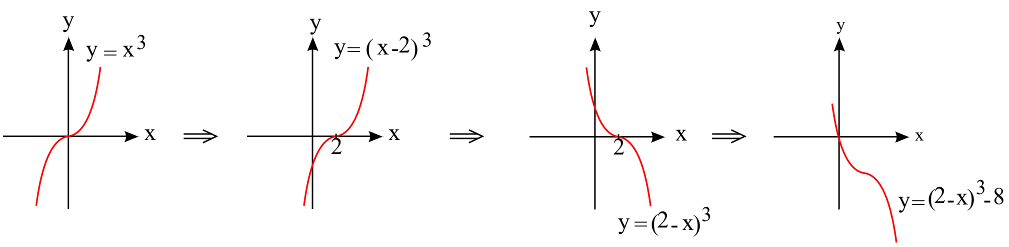


$\rightarrow$ تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۲۹ ـ گزینه ۱ عدد ۸ را اضافه و کم می‌کنیم:

$f(x)=\underbrace{۶x^۲-x^۳-۱۲x+۸}_{(۲-x)^۳}-۸=(۲-x)^۳-۸$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۳۰ - گزینه ۲ اگر x_1 و x_2 در بازهٔ $[1, 2]$ باشند، داریم:

$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اما مقادیر $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بین صفر و ۱ قرار دارند و f در فاصلهٔ صفر تا ۱ نزولی است. پس:

$f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \longrightarrow$ یعنی $f(f(x))$ نزولی است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۴	۱۲ - ۱	۱۷ - ۴	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۳	۱۸ - ۱	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۴	۱۹ - ۱	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۱	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۱	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲